

Van der Pol 振动系统同步时间与反馈增益的关系*

马米花 蔡建平

(漳州师范学院数学系,漳州 363000)

摘要 在受迫 Van der Pol 振动系统的近似解的基础上,获得驱动系统的虚拟轨线.将虚拟轨线代入驱动-响应振动系统的近似误差方程,再用多尺度法求得同步时间关于反馈增益的分析表达式,并且将数值与分析结果进行比较表明:用该方法求得的同步时间与反馈增益的关系和数值模拟结果相当一致.这方法也适用于研究自激 Van der Pol 振动系统.

关键词 受迫 Van der Pol 振子, 虚拟轨线, 多尺度法, 同步时间, 反馈增益

引言

自从 1990 年 Pecora 和 Carroll^[1]关于同步的研究以来,非线性振动在常规和混沌状态的同步成为非线性科学研究的热点之一,其主要原因是系统同步在很多领域都有重要的应用.比如,混沌同步理论已应用于许多技术和科学领域^[2-4],而振动同步与控制同步在机电系统也有很多应用与研究^[5-6].

近年来,越来越多的研究人员投入到同步控制方法的研究,得到了很多判定系统同步的判据或控制方法^[7-9].尽管已获得了大量的理论和实验结果,但是关于同步时间的研究的论文还很少,而同步时间在有涉及到同步的领域是很重要的.如果知道系统同步时间与反馈增益的关系,那么就可以适当选择反馈增益使同步时间和能量的输入都尽量减小,使系统同步的控制更加有效.本文主要用多尺度法导出系统同步时间关于反馈增益的分析表达式.

Van der Pol 振子是物理学、工程学、电子学、生物学等学科中最典型的自激振子,所以对 Van der Pol 振子有很多研究^[10-12].文[12]应用 Hill 方程的性质导出了自激 Van der Pol 振子的同步过程的稳定性条件和同步时间表达式.文[13]根据 Floquet 理论以及用有规则的虚拟轨道代替混沌轨道获得了 Duffing 振子混沌同步过程的稳定性条件.本文也用虚拟轨道代替驱动系统的轨道,然后用多尺度法求得同步时间关于反馈增益的分析表达式.

考虑 Van der Pol 方程的受迫振动系统,其动力学方程为:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \mu(1 - x^2)\dot{x} = f_0 \cos \omega t \quad (1)$$

其中“·”是关于 t 求导, μ 是小参数, $f_0 \cos \omega t$ 是系统的外激励.本文考虑非共振情形,即 ω 与 ω_0 不可通约.首先,用线性误差反馈控制法构造受迫 Van der Pol 振动系统的响应系统,求得驱动-响应振动系统的近似误差方程.其次,在受迫 Van der Pol 振动系统的近似解的

基础上寻找驱动系统的虚拟轨线,然后将虚拟轨线代入近似误差方程,用多尺度法求得驱动-响应振动系统同步时间关于反馈增益的分析表达式.最后,数值与分析结果的比较表明了用该方法求得的同步时间与反馈增益的关系和数值结果相当一致,并且这方法也适用于自激 Van der Pol 振动系统.

1 近似误差系统

在受迫振动系统的 Van der Pol 方程(1)中,令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$,将方程(1)写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2 + f_0 \cos \omega t \end{cases} \quad (2)$$

我们称系统(1)或(2)为驱动系统,并用线性误差反馈控制法构造该驱动系统的响应系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + k(x_1 - y_1) \\ \dot{y}_2 = -\omega_0^2 y_1 + \mu(1 - y_1^2)y_2 + f_0 \cos \omega t + k(x_2 - y_2) \end{cases} \quad (3)$$

其中 k 为反馈增益.由(3)式的第一个方程得

2006-09-21 收到第 1 稿,2006-12-1 收到修改稿.

* 福建省青年科技人才创新基金(2005J054)

$$\begin{aligned} y_2 &= \dot{y}_1 + k(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_2 &= \ddot{y}_1 + k(\dot{y}_1 - \dot{x}_1) \end{aligned} \quad (4)$$

将上式代入(3)式的第二个方程,并且令 $y_1 = y$, 得到驱动系统(1)的响应系统为

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \omega_0^2 y + k^2(y - x) + 2k(\dot{y} - \dot{x}) - \\ \mu(1 - y^2)[\dot{y} + k(y - x)] = f_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (5)$$

定义误差 $\varepsilon = y - x$, 由系统(1)和(5)可以得到误差系统

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} + 2k\dot{\varepsilon} + (\omega_0^2 + k^2)\varepsilon = \mu[\dot{\varepsilon}(1 - x^2) + \varepsilon(k - 2x\dot{x} - \\ kx^2)] - \mu(\varepsilon^2\dot{\varepsilon} + 2x\varepsilon\dot{\varepsilon} + \dot{x}\varepsilon^2 + k\varepsilon^3 + 2kx\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (6)$$

当系统(1)和(5)达到同步时,显然 ε 很小,略去误差系统(6)的高阶项,于是系统(1)和(5)的近似误差系统为

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} + 2k\dot{\varepsilon} + (\omega_0^2 + k^2)\varepsilon = \\ \mu[\dot{\varepsilon}(1 - x^2) + \varepsilon(k - 2x\dot{x} - kx^2)] \end{aligned} \quad (7)$$

2 Van der Pol 振动系统同步时间与反馈增益的关系

2.1 Van der Pol 振动系统的虚拟轨线

为了求 Van der Pol 振动系统同步时间与反馈增益的关系,下面先求方程(1)的虚拟轨线.文[14]用多尺度法求得 Van der Pol 方程(1)的一阶近似解为

$$x = a_0(t) \cos(\omega_0 t + \theta_0) + b \cos \omega t \quad (8)$$

其中

$$b = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \eta = 1 - \frac{f_0^2}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

且

$$a_0(t) = 2 \sqrt{\frac{\eta}{1 + (\frac{4\eta}{c_0^2 - 1})e^{-\mu\eta}}} \quad (9)$$

θ_0, c_0 为积分常数. 因为(8)式中 $a_0(t)$ 含有变量 t , 若把(8)式作为虚拟轨线方程代入近似误差系统(7),则很难求得近似误差系统(7)的近似解,所以要取适当的常数近似代替 $a_0(t)$. 由(9)式知,当 $\eta \geq 0$ 时, $a_0(\infty) \rightarrow 2\sqrt{\eta}$; 当 $\eta < 0$ 时, $a_0(\infty) \rightarrow 0$. $a_0(t)$ 与 $a_0(0)$ 和 $a_0(\infty)$ 都有关,于是取 $a_0(0)$ 和 $a_0(\infty)$ 的算术平均值近似代替 $a_0(t)$. 为了求 $a_0(0)$,不妨假设驱动系统的初始条件为

$$x_1(0) = A_1, \quad x_2(0) = A_2$$

将初始条件代入(8)式,得

$$a_0(0) = c_0 = \sqrt{(A_1 - b)^2 + \frac{A_2^2}{\omega_0^2}}$$

$$\text{tg}\theta_0 = \frac{A_2}{-\omega_0(A_1 - b)} \quad (10)$$

于是我们把系统(1)的轨线虚拟为

$$x = a \cos \phi + b \cos \varphi \quad (11)$$

其中

$$a = \frac{a_0(0) + a_0(\infty)}{2}, \quad b = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

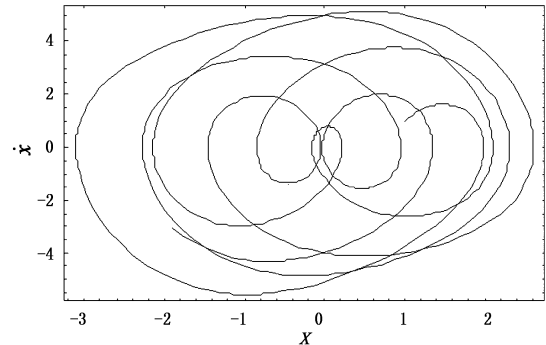
$$\phi = \omega_0 t + \theta_0, \quad \varphi = \omega t,$$

$$\theta_0 = -\arctan\left[\frac{A_2}{\omega_0(A_1 - b)}\right] \quad (12)$$

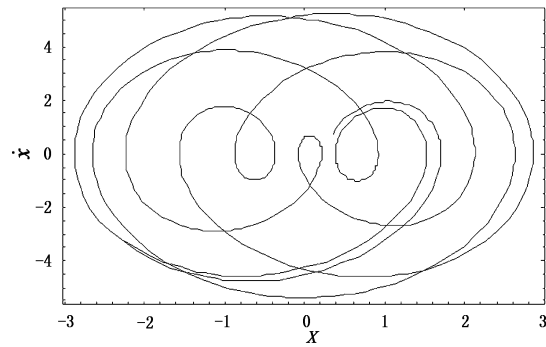
例1 当 $f_0 = 5, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 2, \omega = 2.463$ 时,则 $\eta = 0.244 > 0$,任意取驱动系统的初始条件为 $x_1(0) = 1, x_2(0)$,代入(10),(11)和(12)式得系统(1)的虚拟轨线方程为

$$x = 1.664 \cos(1.414t - 0.307) - 1.23 \cos 2.463t \quad (13)$$

系统(1)的虚拟轨线和数值模拟轨线的对比以及时间历程的比较分别为图1和图2.



(a) Numerical results



(b) Virtual trajectories (13)

图1 例1中取 $f_0 = 5, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 2, \omega = 2.463$, 受迫 Van der Pol 方程(1)的振动轨线

Fig. 1 The oscillatory trajectories of forced Van der Pol equation (1) with $f_0 = 5, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 2, \omega = 2.463$ in Example 1

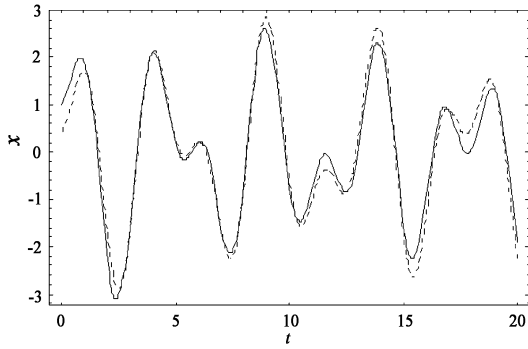


图 2 例 1 中取 $f_0 = 5, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 2, \omega = 2.463$, 受迫 Van der Pol 方程(1)的时间历程图(实线表示数值模拟结果,虚线表示(13)式)

Fig. 2 Time history of forced Van der Pol equation (1) with

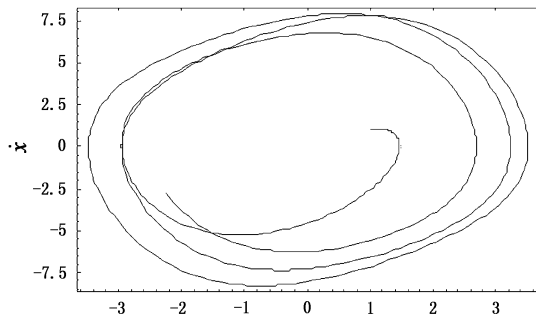
$$f_0 = 5, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 2, \omega = 2.463 \text{ in Example 1;}$$

solid curve for numerical results and dashed curve for expression (13)

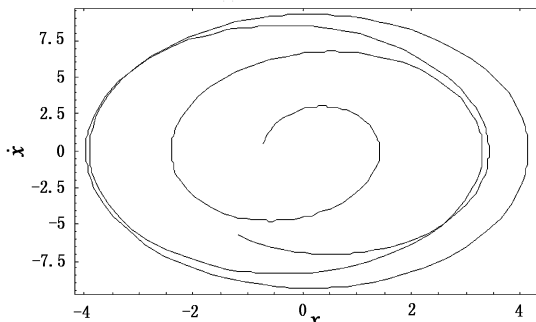
例 2 当 $f_0 = 5, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 4, \omega = 2.463$ 时, 则 $\eta = -1.929 < 0$, 仍取驱动系统的初始条件为 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$, 代入(10), (11)和(12)式可得系统(1)的虚拟轨线方程为

$$x = 1.728\cos(2t - 0.145) - 2.42\cos 2.463t \quad (14)$$

这时系统(1)的虚拟轨线和数值模拟轨线的对比以及时间历程的比较分别为图 3 和图 4.



(a) Numerical results



(b) Virtual trajectories(14)

图 3 例 2 中取 $f_0 = 5, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 4, \omega = 2.463$,

受迫 Van der Pol 方程(1)的振动轨线

Fig. 3 The oscillatory trajectories of forced Van der Pol

equation (1) with $f_0 = 5, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 4, \omega = 2.463$ in Example 2

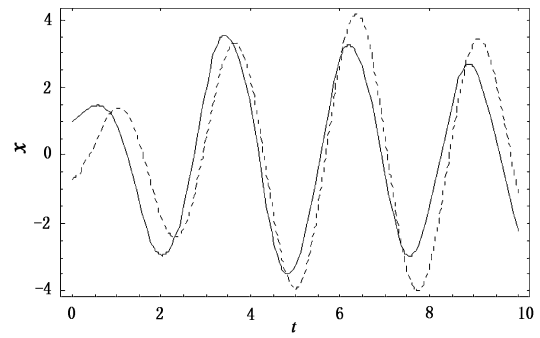


图 4 例 2 中取 $f_0 = 5, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 4, \omega = 2.463$, 受迫 Van der Pol 方程(1)的时间历程图(实线表示数值模拟结果,虚线表示(14)式)

Fig. 4 Time history of forced Van der Pol equation (1) with

$$f_0 = 5, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 4, \omega = 2.463 \text{ in Example 2;}$$

solid curve for numerical results and dashed curve for expression (14)

如果以 $a_0(0)$ 取代 $a_0(t)$, 那么会使虚拟轨线的误差较大. 而当 $a_0(\infty) \rightarrow 0$ 时, $a_0(0)$ 和 $a_0(\infty)$ 的几何平均值为 0, 所以取 $a_0(0)$ 和 $a_0(\infty)$ 的算术平均值近似代替 $a_0(t)$ 比较合理.

2.2 同步时间与反馈增益的关系

将系统(1)的虚拟轨线(11)代入近似误差系统(7), 为了简便, 略去含有和的项(因为这些项不会导致长期项的出现), 整理得

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} + 2k\dot{\varepsilon} + (\omega_0^2 + k^2)\varepsilon = \\ \mu\varepsilon \frac{2 - a^2 - b^2}{2} - \mu\varepsilon \frac{ka^2 + kb^2 - 2k}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

用多尺度法^[14]求误差系统(15)的一阶近似解, 设

$T_0 = t, T_1 = \mu t, \varepsilon(T_0, T_1) = \varepsilon_0(T_0, T_1) + \mu\varepsilon_1(T_0, T_1) + O(\mu^2)$ 将上式代入(15)式, 并令方程两边 μ 的同次幂的系数相等, 得

$$\begin{cases} D_0^2\varepsilon_0 + 2kD_0\varepsilon_0 + (\omega_0^2 + k^2)\varepsilon_0 = 0 \\ D_0^2\varepsilon_1 + 2kD_0\varepsilon_1 + (\omega_0^2 + k^2)\varepsilon_1 = -2D_0D_1\varepsilon_0 - \\ 2kD_1\varepsilon_0 + D_0\varepsilon_0 \frac{2 - a^2 - b^2}{2} - \varepsilon_0 \frac{ka^2 + kb^2 - 2k}{2} \end{cases} \quad (16)$$

其中 $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}, n = 0, 1$. (16)式的第一个方程的解为

$$\varepsilon_0 = e^{-kT_0} [A(T_1) \cos \omega_0 T_0 + B(T_1) \sin \omega_0 T_0] \quad (17)$$

将(17)式代入(16)式的第二个方程, 得

$$\begin{aligned} D_0^2\varepsilon_1 + 2kD_0\varepsilon_1 + (\omega_0^2 + k^2)\varepsilon_1 = e^{-kT_0} \times \\ [(-2\omega_0 D_1 B + \frac{2 - a^2 - b^2}{2} \omega_0 B) \cos \omega_0 T_0 + \\ (2\omega_0 D_1 A - \frac{ka^2 + kb^2 - 2k}{2} \omega_0 A) \sin \omega_0 T_0] \end{aligned} \quad (18)$$

为了不产生长期项,分别令 $e^{-kt_0} \cos\omega_0 T_0, e^{-kt_0} \sin\omega_0 T_0$ 的系数为0,得

$$-2\omega_0 D_1 B + \frac{2-a^2-b^2}{2} \omega_0 B = 0,$$

$$2\omega_0 D_1 A - \frac{2-a^2+b^2}{2} \omega_0 A = 0$$

从以上两式解得

$$A = A_0 e^{\frac{2-a^2-b^2}{4} T_1}, \quad B = B_0 e^{\frac{2-a^2-b^2}{4} T_1}$$

于是近似误差系统(7)的一阶近似解为

$$\varepsilon = e^{\frac{\mu(2-a^2-b^2)-4k}{4} t} (A_0 \cos\omega_0 t + B_0 \sin\omega_0 t) \quad (19)$$

或

$$\varepsilon = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} e^{\frac{\mu(2-a^2-b^2)-4k}{4} t} \cos(\omega_0 t - \Psi),$$

$$\cos\Psi = \frac{A_0}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2}} \quad (20)$$

为了确定 A_0, B_0 , 令驱动-响应系统的初始条件为

$$x_1(0) = A_1, \quad x_2(0) = A_2, \quad y_1(0) = B_1, \quad y_2(0) = B_2$$

那么误差系统的初始条件为

$$\varepsilon(0) = B_1 - A_1, \quad \dot{\varepsilon}(0) = B_2 - A_2$$

于是可以从(19)式解得

$$A_0 = B_1 - A_1, \quad B_0 = \frac{4(B_2 - A_2) - (B_1 - A_1)[\mu(2-a^2-b^2) - 4k]}{4\omega_0} \quad (21)$$

且由(20)式知误差系统的振幅为

$$A_\varepsilon = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} e^{\frac{\mu(2-a^2-b^2)-4k}{4} t}$$

定义当 $|\varepsilon| \leq h$ 时,驱动系统(1)和响应系统(5)达到全局同步, h 为同步的精确度. 因为 $|\varepsilon| \leq A_\varepsilon$, 所以当反馈增益 k 使 $A_\varepsilon \leq h$ 时,驱动系统(1)和响应系统(5)达到全局同步. 于是令

$$A_\varepsilon = \sqrt{A_0^2 + B_0^2} e^{\frac{\mu(2-a^2-b^2)-4k}{4} T} = h$$

其中 T 是同步时间,即可解得同步时间关于反馈增益 k 的分析表达式为

$$T = \frac{-\ln h + 0.5 \ln(A_0^2 + B_0^2)}{k - 0.25\mu(2-a^2-b^2)} \quad (22)$$

例如,任意取驱动-响应系统的初始条件分别为

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 2$$

且任意取 $k=0.6$,取例1中的参数值 $f_0=5, \mu=0.2, \omega_0^2=2, \omega=2.463$. 由例1知 $a=1.664, b=-1.23$. 将以上参数值代入(20)和(21)式,得

$$\varepsilon = 1.751e^{-0.714t} \cos(1.414t - 0.963) \quad (23)$$

近似误差系统(7)的近似解与系统(1)和(5)的误

差系统(6)的数值解的比较,如图5.

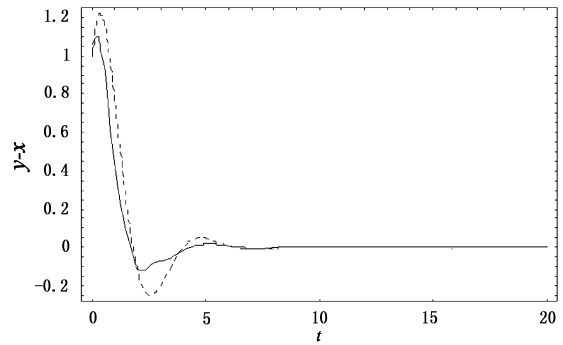


图5 取例1中的参数值 $f_0=5, \mu=0.2, \omega_0^2=2, \omega=2.463$

且 $k=0.6$,驱动-响应系统的误差方程的时间历程图

(实线表示数值模拟结果,虚线表示(23)式)

Fig.5 Time history of the error system between the master and the response systems with $f_0=5, \mu=0.2, \omega_0^2=2, \omega=2.463$, which are the same as Example 1, and $k=0.6$; solid curve for numerical results and dashed curve for expression (23)

取 $h=10^{-3}$,由(22)式可得同步时间 T 关于反馈增益 k 的分析表达式为

$$T = \frac{6.909 + 0.5 \ln[1 + 0.5(1.114 + k)^2]}{k + 0.114} \quad (24)$$

同步时间 T 与反馈增益 k 的关系的数值模拟结果与分析结果的比较,如图6.

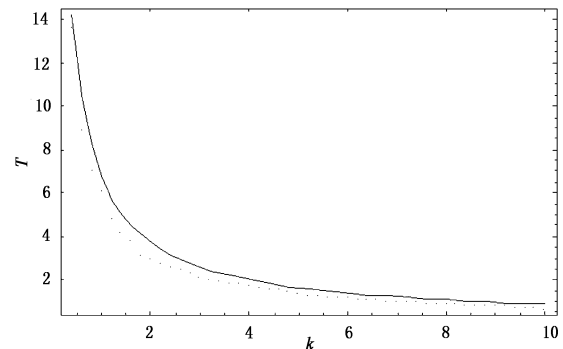


图6 取例1中的参数值 $f_0=5, \mu=0.2, \omega_0^2=2, \omega=2.463$,同步时间 T 与反馈增益 k 的关系(点线表示数值模拟结果,实线表示(24)式)

Fig.6 Synchronization time versus K with $f_0=5,$

$\mu=0.2, \omega_0^2=2, \omega=2.463$, which are the same as Example 1;

dashed curve for numerical results and solid curve for expression (24)

如果取例2中的参数值 $f_0=5, \mu=0.2, \omega_0^2=4, \omega=2.463$,驱动-响应系统的初始条件以及 k 的取值和以上相同,则由例2知 $a=1.728, b=-2.42$. 将以上参数值代入(20)和(21)式,得

$$\varepsilon = 1.394e^{-0.942t} \cos(2t - 0.771) \quad (25)$$

近似误差系统(7)的近似解与系统(1)和(5)的误差系统(6)的数值解的比较,如图7.

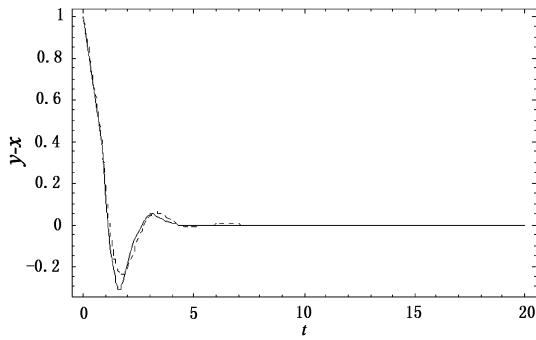


图7 取例2中的参数值 $f_0=5, \mu=0.2, \omega_0^2=4, \omega=2.463$

且 $k=0.6$, 驱动-响应系统的误差方程的时间历程图
(实线表示数值模拟结果, 虚线表示(25)式)

Fig.7 Time history of the error system between the master and the response systems with $f_0=5, \mu=0.2, \omega_0^2=4, \omega=2.463$, which are the same as Example 2, and $k=0.6$; solid curve for numerical results and dashed curve for expression (25)

仍然取 $h=10^{-3}$, 由(22)式可得同步时间 T 关于反馈增益 k 的分析表达式为

$$T = \frac{6.909 + 0.5 \ln[1 + 0.25(1.342 + k)^2]}{k + 0.342} \quad (26)$$

同步时间 T 与反馈增益 k 的关系的数值模拟结果与分析结果的比较, 如图8.

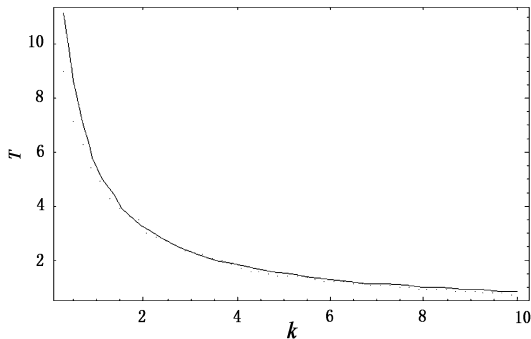


图8 取例2中的参数值 $f_0=5, \mu=0.2, \omega_0^2=4, \omega=2.463$, 同步时间 T 与反馈增益 k 的关系(点线表示数值模拟结果, 实线表示(26)式)

Fig.8 Synchronization time versus K with $f_0=5, \mu=0.2, \omega_0^2=4, \omega=2.463$, which are the same as Example 2; dashed curve for numerical results and solid curve for expression (26)

特别地, 当 $f_0=0$ 时, Van der Pol 方程(1)为自激振动系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \mu(1-x^2)\dot{x} = 0 \quad (27)$$

其相应的响应系统为

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + k^2(y-x) + 2k(\dot{y}-\dot{x}) - \mu(1-y^2)[\dot{y} + k(y-x)] = 0 \quad (28)$$

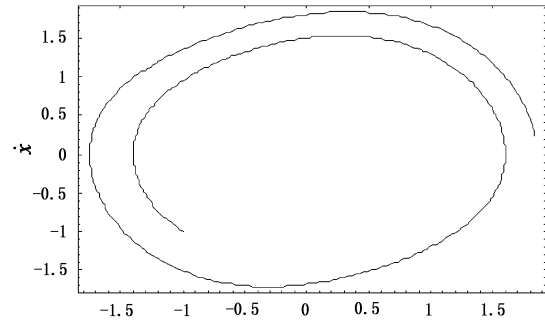
显然系统(27)与(28)的近似误差系统与(7)式相同. 这时

$$b = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0, \eta = 1 > 0.$$

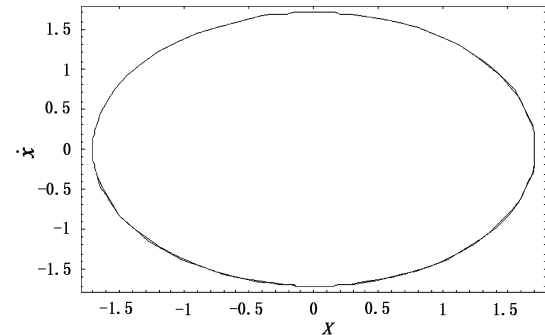
任意取驱动-响应系统的初始条件分别为 $x_1(0) = -1, x_2(0) = -1, y_1(0) = 2, y_2(0) = 2$, 且令 $\mu = 0.2, \omega_0^2 = 1$. 根据(10)式可得 $a = \bar{a}_0 = \frac{a_0(0) + a_0(\infty)}{2} = \frac{1.414 + 2}{2} = 1.707, \theta_0 = 2.356$. 于是自激振动系统的虚拟轨线方程为

$$x = 1.707 \cos(t + 2.356) \quad (29)$$

这时系统(27)的虚拟轨线和数值模拟轨线的对比以及时间历程的比较分别为图9和图10.



(a) Numerical results



(b) Virtual trajectories (29)

图9 $f_0=0, \mu=0.2, \omega_0^2=1$ 时, 受迫 Van der Pol 方程(27)的振动轨线

Fig.9 The oscillatory trajectories of forced Van der Pol equation (27) with $f_0=0, \mu=0.2, \omega_0^2=1$

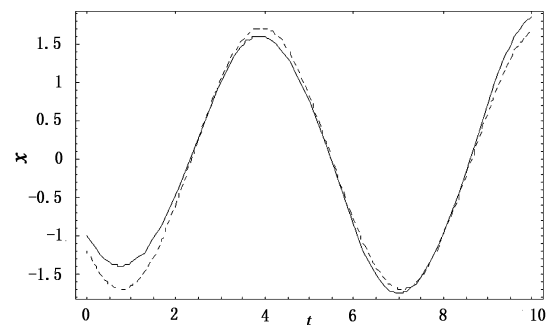


图10 $f_0=0, \mu=0.2, \omega_0^2=1$ 时, 受迫 Van der Pol 方程(27)的时间历程图(实线表示数值模拟结果, 虚线表示(29)式)

Fig.10 Time history of forced Van der Pol equation (27) with $f_0=0, \mu=0.2, \omega_0^2=1$; solid curve for numerical results and dashed curve for expression (29)

仍取 $k = 0.6$, 将 $a = 1.707, b = 0$ 代入 (20) 和 (21) 式, 得

$$\varepsilon = 5.777e^{-0.646t} \cos(t - 1.025) \quad (30)$$

近似误差系统 (7) 的近似解与系统 (27) 和 (28) 的误差系统的数值解的比较, 如图 11.

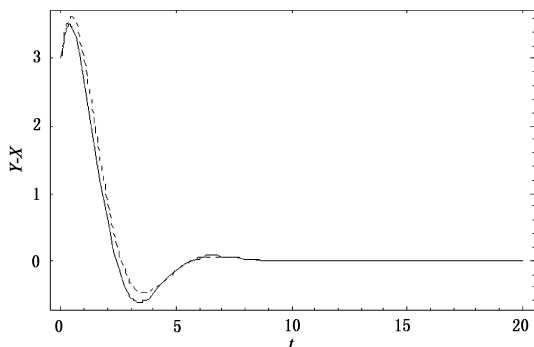


图 11 $f_0 = 0, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 1, k = 0.6$, 驱动 - 响应系统的误差方程的时间历程图 (实线表示数值模拟结果, 虚线表示 (30) 式)

Fig. 11 Time history of the error system between the master and the response systems with $f_0 = 0, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 1, k = 0.6$;

solid curve for numerical results and dashed curve for expression (30)

仍然取 $h = 10^{-3}$, 由 (22) 式可得同步时间 T 关于反馈增益 k 的分析表达式为

$$T = \frac{6.909 + 0.5 \ln[9 + (3.137 + 3k)^2]}{k + 0.046} \quad (31)$$

同步时间 T 与反馈增益 k 的关系的数值模拟结果与分析结果的比较, 如图 12.

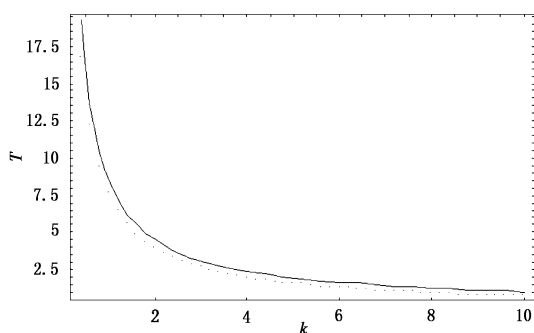


图 12 $f_0 = 0, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 1$, 同步时间 T 与反馈增益 k 的关系 (点线表示数值模拟结果, 实线表示 (31) 式)

Fig. 12 Synchronization time versus K with $f_0 = 0, \mu = 0.2, \omega_0^2 = 1$; dashed curve for numerical results and solid curve for expression (31)

3 结论

用虚拟轨线代替驱动系统的轨线代入驱动 - 响应振动系统的近似误差方程, 然后用多尺度法求得同步时间的表达式, 从而获得同步时间与反馈增

益的关系. 数值与分析结果的比较表明用该方法求得的同步时间与反馈增益的关系与数值模拟结果相当一致, 并且这方法也适用于自激 Van der Pol 振动系统的研究. 至于 μ 是大参数及混沌的情况还有待于进一步研究.

参 考 文 献

- 1 Pecora LM, Carroll TL. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 1990, 64: 821 ~ 824
- 2 Yang T, Chua LO. Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: Theory and application to secure communication. *Circuits and Systems I: IEEE Transactions. Circuits systems - I*, 1997, 44: 976 ~ 988
- 3 Ge ZM, Leu WY. Chaos synchronization and parameter identification for loudspeaker systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 21: 1231 ~ 1247
- 4 Sugawara T, Tachikawa M, Tsudamoto T, Shimizu T. Observation of synchronization in laser chaos. *Physical Review Letters*, 1994, 72: 3502 ~ 3505
- 5 Wu XF, Cai JP, Wang WH. Master - slave chaos synchronization criteria for the horizontal platform systems via linear state error feedback control. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 295: 378 ~ 387
- 6 Yamapi R, Wofo P. Dynamics and synchronization of coupled self - sustained electromechanical devices. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 285: 1151 ~ 1170
- 7 Jiang GP, Tang WKS, Chen GR. A simple global synchronization criterion for coupled chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 15: 925 ~ 935
- 8 Liao XX, Chen GR, Xu BJ, Shen Y. On global exponential synchronization of Chua circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, 15: 2227 ~ 2234
- 9 陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步. 动力学与控制学报, 2006, 4(1): 1 ~ 4 (Chen Baoying. Linear feedback control for synchronization of Liu chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1): 1 ~ 4 (in Chinese))
- 10 Tang JS, Chen ZL. Amplitude control of limit cycle in Van der Pol system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16: 487 ~ 495
- 11 Xu JX, Jiang J. The global bifurcation characteristics of the forced Van der Pol oscillator. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1996, 7: 3 ~ 19
- 12 Wofo P, Kraenkel RA. Synchronization: Stability and du-

- ration time. *Physical Review E*, 2002, 65:036225
- 13 Kouomou YC, Wofo P. Stability and optimization of chaos synchronization through feedback coupling with delay. *Physics Letters A*, 2002, 298:18~28
- 14 刘延柱,陈立群. 非线性振动. 北京:高等教育出版社, 2001 (Liu Yanzhu, Chen Liqun. Nonlinear vibrations. Beijing:Higher Education Press, 2001)

RELATION BETWEEN SYNCHRONIZATION TIME AND FEEDBACK GAIN OF VAN DER POL OSCILLATOR *

Ma Mihua Cai Jianping

(Department of Mathematics, Zhangzhou Teachers College, Zhangzhou 363000, China)

Abstract The virtual trajectories were obtained based on the approximate solution of the forced Van der Pol equation. By substituting the virtual trajectories into the approximate error system between the master and the response systems, we derived the relation between synchronization time and feedback gain by the multiple scale method. A fairly good agreement was obtained between the analytical and numerical results. The method is also valid for the self-sustained Van der Pol oscillator.

Key words forced Van der Pol oscillator, virtual trajectories, multiple scale method, synchronization time, feedback gain