第5卷第2期2007年6月
1672-6553/2007/05(2)/118-7

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.5 No.2
Jun. 2007

二维空间旋转孤立波的相互作用*

那仁满都拉[1]　王克协[2]

(内蒙古民族大学物理与机电学院,通辽　028043)(吉林大学物理学院,长春　130021)

摘要　利用图形分析方法对(2+1)维频散长波方程的旋转孤立波之间的相互作用进行了详细分析,发现了旋转孤立波相互作用产生的一些新的重要非线性现象.这就是,两个旋转孤立波的碰撞是完全非弹性的,它们碰撞之后可以合并成一个旋转孤立波或一个不旋转孤立波,同时可以发生波形转换及性质改变等现象.这些现象的发现,对非线性水波传播与相互作用规律的进一步认识、对非线性水波的控制与利用都具有重要的理论意义.

关键词　相互作用,　旋转孤立波,　不旋转孤立波,　非线性水波

引 言

人们研究浅水波运动时,得到了很多(1+1)维非线性物理模型,如频散长波方程、长水波近似方程、变形频散水波方程、Kupershmidt 方程、Whitham - Broer - Kaup 方程以及 Broer - Kaup 方程等等.这些方程描述的是无限长、确定深度、狭窄的渠道中非线性水波的传播.后来,为了研究较宽的渠道或海洋中水波传播问题,人们把这些方程推广到二维的情况,得到了(2 + 1)维频散长波方程[1]和(2 + 1)维 Broer - Kaup 方程[2]等.这些方程的研究对了解海洋中非线性水波的形成、传播以及相互作用规律都具有重要的理论意义;对航海、海洋建筑的安全带来很大的益处.目前对这些方程的研究已引起人们的高度重视,很多学者对这些方程进行了研究并提出了很多有效的方法[4-10].其中 Zhang[9]先利用齐次平衡法,给出了(2 + 1)维频散长波方程的类多孤子解,之后利用推广的齐次平衡法还给出了该方程的 Dromion 解、多 Dromion 解等丰富的似孤子解[10].我们改进齐次平衡法的应用,给出了(2 + 1)维频散长波方程新的类多孤子解[11].但我们注意到,不管是文[9]还是文[11]中,对得到的类孤子(孤立波)之间的相互作用都没有进行详细分析.实际上,非线性的一个最主要的物理机制,可以说就是相互作用.之所以说世界在本质上是非线性的,在很大程度上就是由于相互作用的普遍存在.孤立子(波)能够吸引人的一个最重要的性质,也就是它们的相互作用性质.因此孤立子(波)之间相互作用性质的研究是非常重要的,这一直受到人们极大的关注[3-5].

本文根据文[11]中我们得到的(2+1)维频散长波方程的类多孤子解,利用图形分析方法对旋转孤立波之间的相互作用进行了详细分析,从而发现了相互作用产生的旋转孤立波的合并(或分裂)、形成不旋转孤立波、波形转换及性质改变等一些重要的非线性现象.

1　(2+1)维频散长波方程的旋转孤立波解

(2+1)维频散长波方程为

$$u_{ty}+\eta_{xx}+\frac{1}{2}(u^2)_{xy}=0 \tag{1}$$

$$\eta_t+(u\eta+u+u_{xy})_x=0 \tag{2}$$

这里 $\eta(x,y,t)$ 表示表面波的幅度,$u(x,y,t)$ 表示水平方向的传播速度.用改进后的齐次平衡法求解该方程,我们得到了如下类多孤子解[11]

$$u=2\delta\frac{\sum_{i=1}^{n}\{M_i(y)\mathrm{sh}[M_i(y)\zeta_i+\alpha_i(y)]+k_i(y)\mathrm{ch}[M_i(y)\zeta_i+\alpha_i(y)]\}\exp[\zeta_i+\beta_i(y)]}{1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}[M_i(y)\zeta_i+\alpha_i(y)]\}\exp[\zeta_i+\beta_i(y)]}+c(y) \tag{3}$$

2006-10-07 收到第1稿,2006-11-16 收到修改稿.
*内蒙古自然科学基金资助项目(200408020113),国家自然科学基金资助项目(40564001)

$$\eta = \delta \frac{\partial u}{\partial y} - 1 \tag{4}$$

其中 $\delta \pm 1$, $M_i(y) = \delta\sqrt{\delta[l_i(y) + c(y)k_i(y) + \delta k_i^2(y)]}$, $\zeta_i = x - [c(y) + 2\delta k_i(y)]t$, $\zeta_i = k_i(y)x + l_i(y)t$. 因为解(3)和(4)中带有 $k_i(y)$, $l_i(y)$, $\alpha_i(y)$, $\beta_i(y)$ 以及 $c(y)$ 等关于 y 的任意函数,所以当这些函数取不同形式的函数时,解(3)和(4)表示不同形式的解,即这两种解的形式非常丰富,结构比较复杂. 为了简单且不失一般性,我们要考虑 $\alpha_i(y)$, $\beta_i(y)$, $M_i(y) = 0$, $c(y) = 0$, $\delta = -1$ 的情况. 首先,在解(3)和(4)中取 $n = 1$,则可得

$$u = -k_1(y)\{\tanh[\frac{k_1(y)}{2}(x + k_1(y)t)] + 1\} \tag{5}$$

$$\eta = k_1'(y)\{\frac{k_1(y)}{2}[x + 2k_1(y)t]\mathrm{sech}^2[\frac{k_1(y)}{2}(x + k_1(y)t)] + \tanh[\frac{k_1(y)}{2}(x + k_1(y)t)] + 1\} - 1 \tag{6}$$

可看出,单孤立波解(5)的形式比较复杂,它虽然具有扭结函数形式,但它的传播速度是 y 的任意函数,幅度也是 y 的任意函数,因此它与通常意义上的扭结孤子不同. 单孤立波解(6)的形式更复杂,它是钟型函数与扭结函数的组合而成,它的幅度是 y,x 及 t 的函数,速度是 y 的任意函数,因此它也与通常意义上的钟型孤子不同. 总之,不管是解(5)还是解(6)它们所表示的都不是通常意义上的孤子,故我们称为类孤子或统称为孤立波. 当 $k_i(y)$ 取满足条件 $k_i(0) = 0$ 的某些函数时,解(5)和(6)可表示一种旋转孤立波,而解(3)和(4)表示多旋转孤立波及它们的相互作用. 在图 1 和图 2 中,当 $k_i(y) = y$ 时,绘制了解(5)和(6). 从图 1 可看出,这是一种幅度随 y 的增加而直线增加,传播速度也随 y 的增加而直线增加的扭结孤立波. 因为这种扭结孤立波作旋转运动(这里绘制了 $y \geq 0$ 的部分),故我们称为变幅度旋转直线扭结孤立波. 由图 2 可看出,这是一种幅度随 y,x 和 t 的增加而增加,传播速度随 y 的增加而直线增加的扭结孤立波之上的钟型孤立波. 因为这种钟型孤立波也作旋转运动,我们称为变幅度旋转钟型孤立波. 在图 3 和图 4 中,当 $k_1(y) = \sinh(y)$ 时,绘制了解(5)和(6). 从图 3 可看出,这是一种幅度随 y 的增加而曲线关系增加,传播速度也随 y 的增加而曲线关系增加的扭结孤立波. 因为这种扭结孤立波同样也作旋转运动,故我们称为变幅度旋转曲线扭结孤立波. 而图 4 表示的是一种幅度随 y,x 和 t 的增加而增加,传播速度随 y 的增加而曲线关系增加的曲线扭结孤立波之上的钟型孤立波,我们也称为变幅度旋转钟型孤立波.

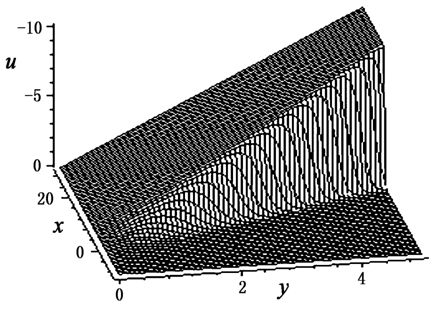

图 1　变幅度旋转直线扭结孤立波

Fig. 1　Variable amplitude rotating line-kink solitary wave

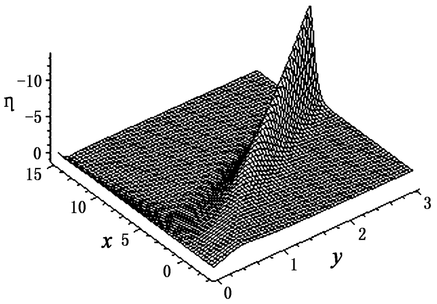

图 2　变幅度旋转钟型孤立波

Fig. 2　Variable amplitude rotating bell solitary wave

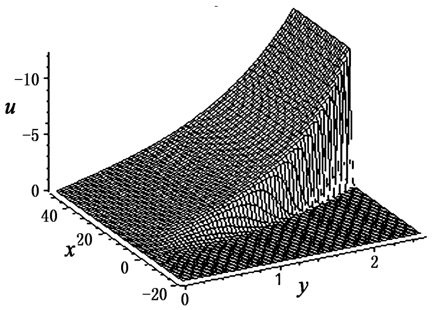

图 3　变幅度旋转曲线扭结孤立波

Fig. 3　Variable amplitude rotating curve-kink solitary wave

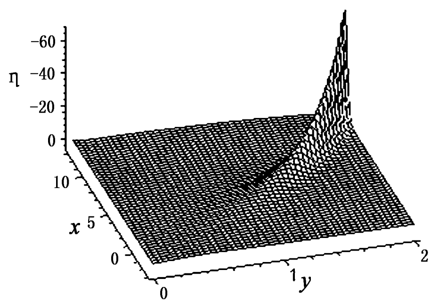

图 4　变幅度旋转钟型孤立波

Fig. 4　Variable amplitude rotating bell solitary wave

2　旋转孤立波之间的相互作用

由以上的分析我们可知,这些旋转孤立波的形

状、传播速度以及运动方式都不同于通常意义上的孤子，因此可认为是一类新的孤立波. 那么，这些新的孤立波之间的相互作用的性质如何？它们的相互作用是否产生一些新的现象？下面我们详细分析它们的相互作用. 当 $n=2, k_i(y)=0.5y, k_2(y)=-y$ 时，根据解(3)绘制了(图 5，图 6，图 7)旋转速度不同、旋转方向相反的两个变幅度直线扭结孤立波的碰撞过程. 从图可看出，这两个旋转扭结孤立波碰撞之后，合并成一个变幅度直线扭结孤立波，并以旋转速度大的直线扭结孤立波的旋转方向继续旋转；当 $k_1(y)=y, k_2(y)=-y$ 时，我们绘制了(图 8，图 9，图 10)旋转速度相同、旋转方向相反的两个变幅度直线扭结孤立波的碰撞过程. 从图可看出，这两个旋转扭结孤立波碰撞之后，合并成一个变幅度直线扭结孤立波，并停止在相碰的位置不继续旋转，即形成了 *Wu* 等[12]发现的不传播孤子类似的一种不旋转的变幅度直线扭结孤立波. 当 $k_1(y)=0.5\sinh(y), k_2(y)=-\sinh(y)$ 时，根据解(3)绘制了(图 11，图 12，图 13)旋转速度不同、旋转方向相反的两个变幅度曲线扭结孤立波的碰撞过程. 从图可看出，这两个旋转扭结孤立波碰撞之后，合并成一个变幅度曲线扭结孤立波，并以旋转速度大的曲线扭结孤立波的旋转方向继续旋转；当 $k_1(y)=\sinh(y) k_2(y)=-\sinh(y)$，时，我们绘制了(图 14，图 15，图 16)旋转速度相同、旋转方向相反的两个变幅度曲线扭结孤立波的碰撞过程. 可看出，这两个旋转扭结孤立波碰撞之后，合并成一个变幅度曲线扭结孤立波，并停止在相碰的位置不继续旋转，即形成了一种不旋转的变幅度曲线扭结孤立波. 因此，两个旋转扭结孤立波的碰撞是完全非弹性的，它们碰撞之后可以合并成一个旋转扭结孤立波或一种类似于 *Wu* 孤子[12]的不旋转扭结孤立波.

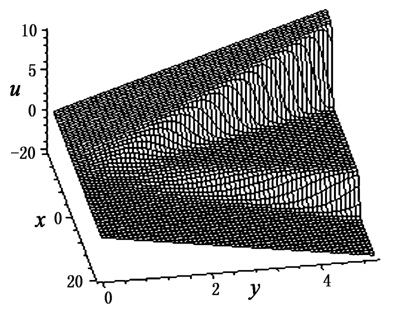

图 5 $t=-3$ 时，碰撞前的两个旋转直线扭结孤立波

Fig. 5 When t = -3, two rotating line-kink solitary waves

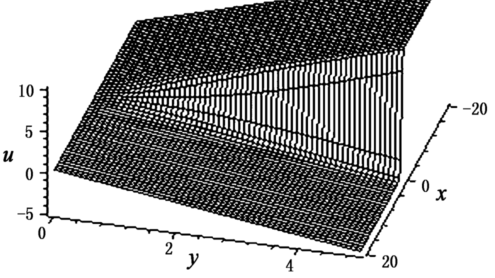

图 6 $t=0$ 时，两个旋转直线扭结孤立波的碰撞

Fig. 6 When t = 0, the collision of two rotating line-kink solitary waves

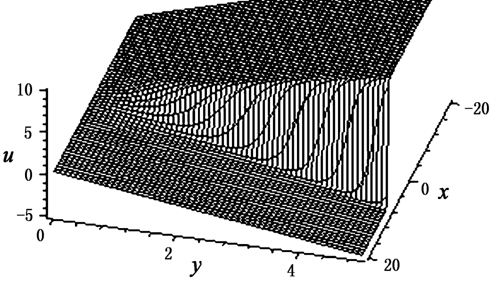

图 7 $t=3$ 时，合并后的旋转直线扭结孤立波

Fig. 7 When t = 3, the merged rotating line-kink solitary waves

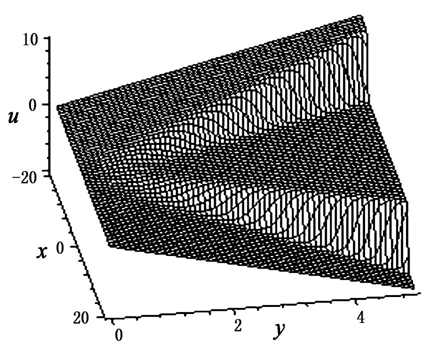

图 8 $t=-3$ 时，碰撞前的两个相同旋转直线扭结孤立波

Fig. 8 When t = -3, two identical rotating line-kink solitary waves

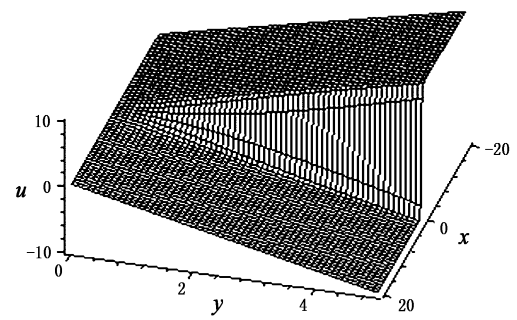

图 9 $t=0$ 时，两个相同旋转直线扭结孤立波的碰撞

Fig. 9 When t = 0, the collision of two non-identical rotating line-kink solitary waves

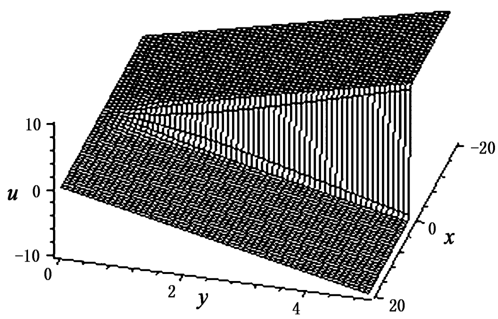

图 10　$t=3$ 时,合并后的不旋转直线扭结孤立波

Fig. 10　When t = 3, the merged rotating line-kink solitary waves

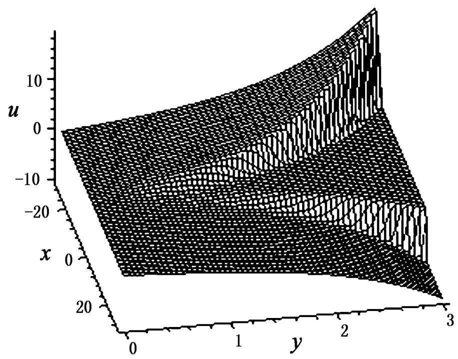

图 11　$t=-3$ 时,碰撞前的两个旋转曲线扭结孤立波

Fig. 11　When t = −3, two rotating curve-kink solitary waves

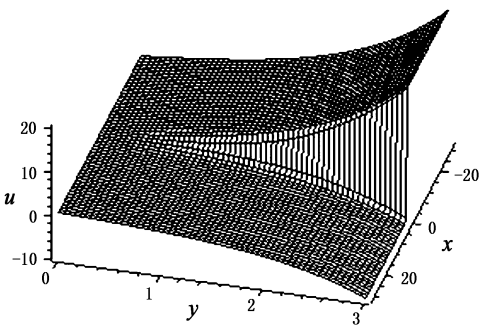

图 12　$t=0$ 时,两个旋转曲线扭结孤立波的碰撞

Fig. 12　When t = 0, the collision of

ttwo rotating curve-kink solitary waves

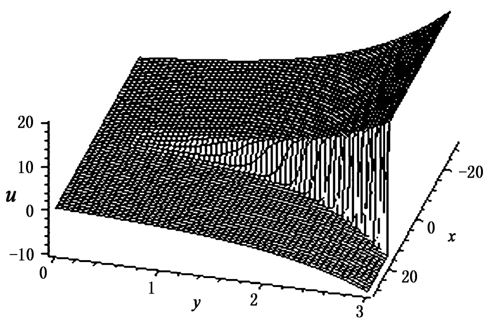

图 13　$t=3$ 时,合并后的旋转曲线扭结孤立波

Fig. 13　When t = 3, the merged rotating curve-kink solitary waves

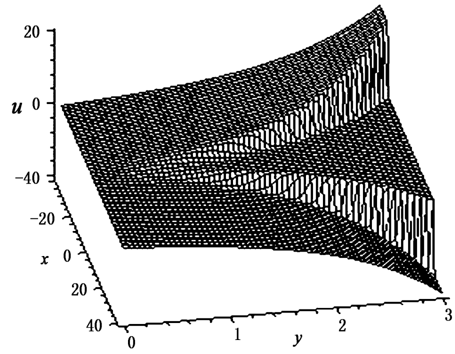

图 14　$t=-3$ 时,碰撞前的两个相同旋转曲线扭结孤立波

Fig. 14　When t = −3, two identical rotating curve-kink solitary waves

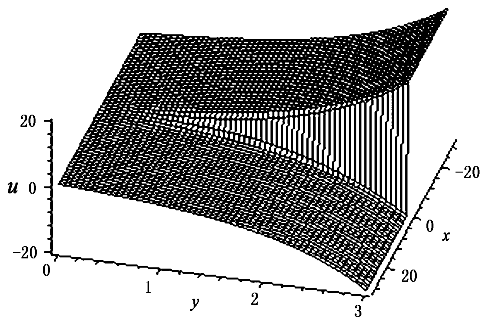

图 15　$t=0$ 时,两个相同旋转曲线扭结孤立波的碰撞

Fig. 15　When t = 0, the collision of

two non-identical rotating curve-kink solitary wavess

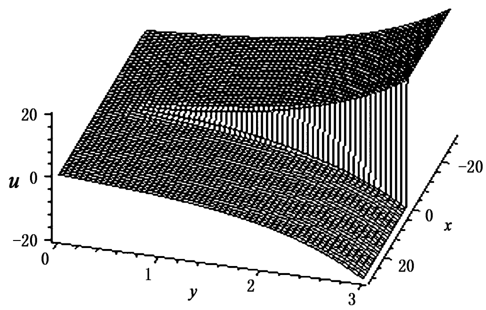

图 16　$t=3$ 时,合并后的不旋转曲线扭结孤立波

Fig. 16　When t = 3, the merged rotating curve-kink solitary waves

当 $k_1(y)=0.5y, k_2(y)=-y$ 时,根据解(4)绘制了(图 17,图 18,图 19)旋转速度不同、旋转方向相反的变幅度旋转钟型孤立波与旋转反钟型孤立波的碰撞过程. 从图可看出,旋转速度快的钟型孤立波与旋转速度慢的反钟型孤立波碰撞之后,合并成一个变幅度旋转反钟型孤立波,并以旋转速度快的钟型孤立波的旋转方向继续旋转. 这表明,通过相互碰撞旋转钟型孤立波变成了旋转反钟型孤立波,即孤立波的性质发生了改变 ;当 $k_1(y)=y$, $k_2(y)=-y$ 时,绘制了(图 20,图 21,图 22)旋转速度相同、旋转方向相反的变幅度旋转钟型孤立波与旋转反钟型孤立波的碰撞

过程. 从图可看出,相同旋转速度的旋转钟型孤立波与旋转反钟型孤立波碰撞之后,合并成一个类扭结孤立波,并停止在相碰的位置不继续旋转,即形成了一种不旋转的类扭结孤立波,因此发生了波形转换现象. 当 $k_1(y)=0.5\sinh(y)$, $k_2(y)=-\sinh(y)$ 时,根据解(4)绘制了(图23,图24,图25)旋转速度不同、旋转方向相反的变幅度旋转钟型孤立波与旋转反钟型孤立波的碰撞过程. 从图可看出,旋转速度快的变幅度旋转钟型孤立波与旋转速度慢的变幅度旋转反钟型孤立波碰撞之后,合并成一个变幅度旋转反钟型孤立波,并以旋转速度快的钟型孤立波的旋转方向继续旋转,即同样发生了性质的改变现象;当 $k_1(y)=\sinh(y)$, $k_2(y)=-\sinh(y)$ 时,我们绘制了(图26,图27,图28)旋转速度相同、旋转方向相反的变幅度旋转钟型孤立波与旋转反钟型孤立波的碰撞过程. 从图看出,它们碰撞之后合并成一个变幅度曲线扭结孤立波,并停止在相碰的位置不继续旋转,即形成了一种不旋转的曲线扭结孤立波,这里也发生了波形转换现象. 因此,旋转钟型孤立波与旋转反钟型孤立波的碰撞也是完全非弹性的,它们碰撞之后可以合并成一个旋转反钟型(或钟型)孤立波或者一种类似于 *Wu* 孤子[12]的不旋转直线(或曲线)扭结孤立波.

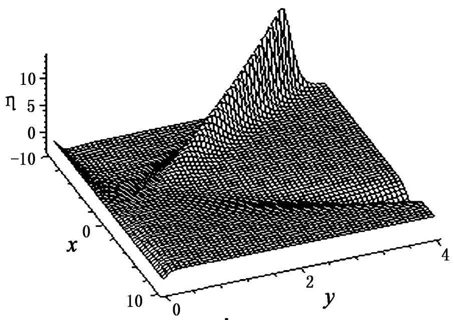

图17 $t=-3$ 时,碰撞前的两个旋转钟型孤立波

Fig. 17 When t = −3, two rotating bell solitary waves

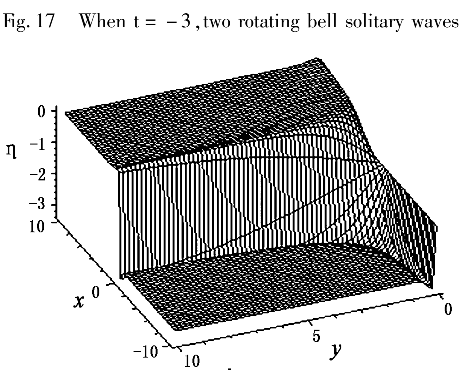

图18 $t=0$ 时,两个旋转钟型孤立波的碰撞

Fig. 18 When t = 0, the collision of two rotating bell solitary waves

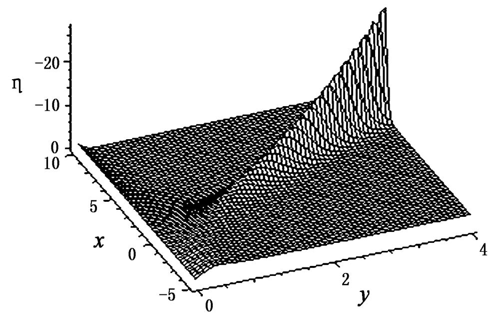

图19 $t=3$ 时,合并后的旋转反钟型孤立波

Fig. 19 When t = 3, the merged trotating identical anti-bell solitary waves

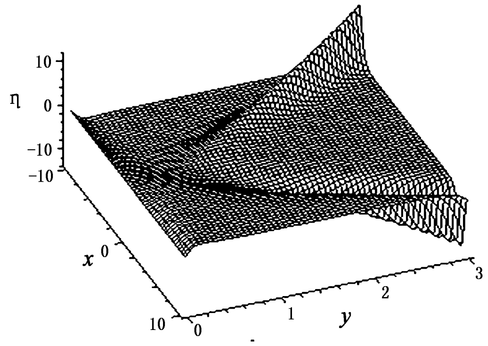

图20 $t=-3$ 时,碰撞前的两个相同旋转钟型孤立波

Fig. 20 When t = −3, two rotating bell solitary waves

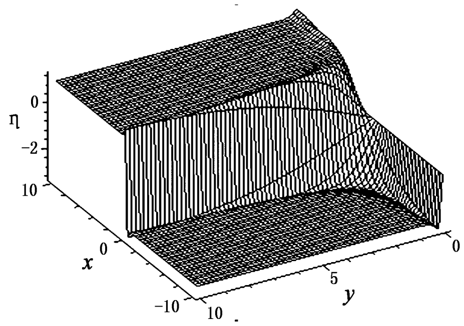

图21 $t=0$ 时,两个相同旋转钟型孤立波的碰撞

Fig. 21 When t = 0, the collision of two non-identical rotating bell solitary waves

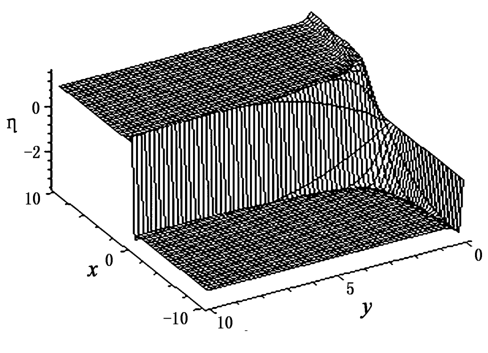

图22 $t=3$ 时,合并后的不旋转类扭结孤立波

Fig. 22 When t = 3, the merged rotating like kink solitary waves

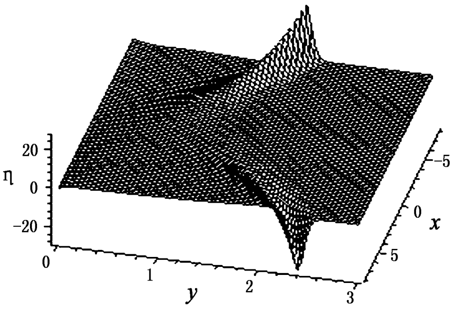

图 23　$t = -3$ 时,碰撞前的两个旋转钟型孤立波

Fig. 23　When t = −3, two rotating bell solitary waves

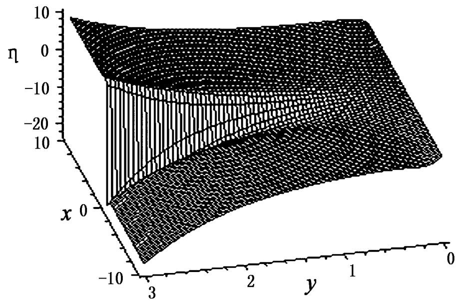

图 24　$t = 0$ 时,两个旋转钟型孤立波的碰撞

Fig. 24　When t = 0, the collision of rotating bell solitary waves

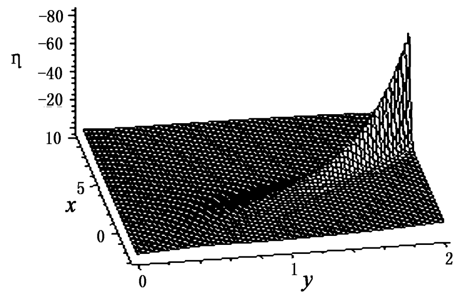

图 25　$t = 3$ 时,合并后的旋转反钟型孤立波

Fig. 25　When t = 3, the merged rotating anti-bell solitary waves

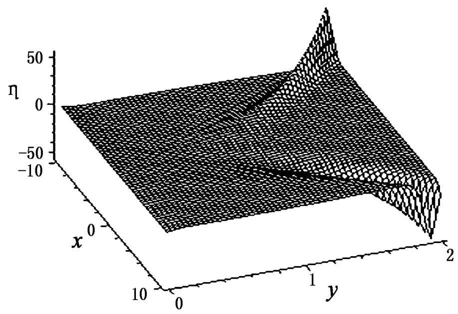

图 26　碰撞前的两个相同旋转钟型孤立波

Fig. 26　When t = −3, two identical rotating bell solitary waves

如果取 $\delta = 1$ 而其它函数与以上相同时,我们就可看到旋转扭结孤立波和旋转钟型孤立波的分裂过程. 由于分裂过程可看成合并过程的相反过程,所以在本文里我们不作详细分析.

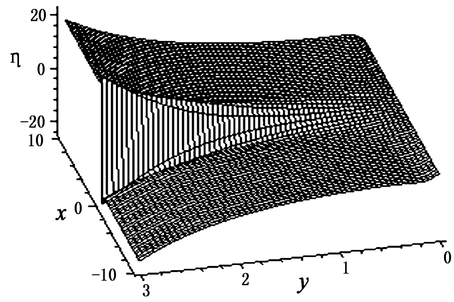

图 27　$t = 0$ 时,两个相同旋转钟型孤立波的碰撞

Fig. 27　When t = 0, the collision of two non-rotating identical rotating bell solitary waves

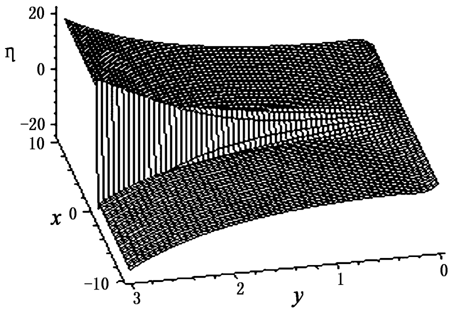

图 28　$t = 3$ 时,合并后的不旋转曲线扭结孤立波

Fig. 28　When t = 3, the merged curve-kink solitary waves

3　结语

本文根据我们在前文中得到的(2 + 1)维频散长波方程的类多孤子解,利用图形分析方法对旋转孤立波之间的相互作用进行了详细分析,从而发现了旋转孤立波相互作用产生的一些新的重要非线性现象. 这些现象的发现,解释了非线性水波相互作用的内在的一些基本机制,这对进一步认识非线性水波的传播与相互作用规律具有重要的理论意义;对航海、海洋建筑等实际问题具有潜在的应用价值.

参　考　文　献

1　Boiti Marco, Leon Jerome J P and Pempinelli Flora. Spectral transform for a two spatial dimension extension of the dispersive long wave equation. *Inverse Problems*, 1987, 3: 371 ~ 387

2　Lou SenYue and Hu XingBiao. Broer-Kaup system from darboux transformation related symmetry constrants of Kadomtsev-Petviashvili equation. *Communication in Theoretical Physics*, 1998, 29(3): 145 ~ 150

3 Neil C. Freeman. Soliton interactions in two dimensions. *Advances in Applied Mechanics*, 1980, 20: 1 ~ 37

4 Lou Senyue. (2 + 1)-dimensional compacton solutions with and without completely elastic interaction properties. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, 35: 10619 ~ 10628

5 阮航宇.(2 + 1)维 Sawada-Kotera 方程中两个 Y 周期孤子的相互作用. 物理学报, 2004, 53(6): 1617 ~ 1622 (Ruan Hangyu. Interactions between two Y-periodic solitons in the (2 + 1)-dimensional Sawada- Kotera equations. *Acta Physical Sinica*, 2004, 53(6): 1617 ~ 1622 (in Chinese))

6 阮航宇,陈一新.(2 + 1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程中孤子相互作用的探索. 物理学报, 2003, 52(6): 1313 ~ 1318 (Ruan Hangyu, Chen Yixin. Study on soliton interaction in the (2 + 1)-dimensional Nizhnik- Novikov-Veselov equation. *Acta Physical Sinica*, 2003, 52(6): 1313 ~ 1318 (in Chinese))

7 叶健芬,郑春龙,陈立群.(2 + 1)维广义 Borer-Kaup 系统的变量分离解和半包局域结构. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 24 ~ 29 (Ye Jianfen, Zheng Chunlong and Chen Liqun. Variable separation solutions and semifolded localized structures for (2 + 1)-dimensional generalized Borer-Kaup system. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 24 ~ 29 (in Chinese))

8 Wang Mingliang. Solitary wave solutions for variant boussinesq equations. *Physics Letters A*, 1995, 199: 169 ~ 172

9 谢元喜,唐驾时. 求一类非线性偏微分方程精确解的简化试探函数法. 动力学与控制学报, 2005, 3(1): 15 ~ 18 (Xie Yuanxi, Tang Jiashi. A simplified trial function method for seeking the exact solutions to a class of nonlinear PDEs. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(1): 15 ~ 18 (in Chinese))

10 Zhang Jie-Fang. Backlund transformation and multisoliton-like solutions for (2 + 1) dimensional dispersive long wave equations. *Communication in Theoretical Physics*, 2000, 33(4): 577 ~ 580

11 Zhang Jie-Fang. Exotic localized coherent structures of the (2 + 1) dimensional dispersive long wave equations. *Communication in Theoretical Physics*, 2002, 37(3): 277 ~ 282

12 那仁满都拉,王克协.(2 + 1)维频散长波方程与(2 + 1)维 Broer-Kaup 方程的新的类多孤子解. 物理学报, 2003, 52(7): 1565 ~ 1568 (Naranmandula, Wang kexie. New multisoliton-like solutions for (2 + 1)-dimensional dispersive long-wave equations and (2 + 1)-dimensional Broer-Kaup equations. *Acta Physical Sinica*, 2003, 52(7): 1565 ~ 1568 (in Chinese))

13 Wu Junru, Robert Keolian and Isadore Rudnick. Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton. *Physical Review Letters*, 1984, 52(16): 1421 ~ 1424

INTERACTION OF ROTATING SOLITARY WAVES IN TWO-DIMENSIONAL SPACES *

Naranmandula[1] Wang Kexie[2]

(1. *College of Physics and Electromechanics*, *Inner Mongolia University for Nationalities*, *Tongliao* 028043, *China*)

(2. *College of Physics*, *Jilin University*, *Changchun* 130021, *China*)

Abstract Using the method of figure-analysis, we investigated the interaction between rotating solitary waves for (2 + 1)-dimensional dispersive long-wave equations, and found some new nonlinear phenomena of rotating solitary wave interactions. These phenomena are: (1) the interaction between rotating solitary waves is completely non-elastic, (2) two rotating solitary waves may merge into one rotating solitary wave or one non-rotating solitary wave through the collision, and at the same time waveform conversion or property change of solitary wave may happen.

Key words interaction, rotating solitary wave, non-rotating solitary wave, nonlinear water wave

Received 7 October 2006, revised 16 November 2006.

* Project supported by the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Province (200408020113), and the National Natural Science Foundation of China (40564001)