

悬索的超谐波共振与 1:3 内共振分析*

赵跃宇^{1,2} 李永鼎² 王连华¹ 康厚军¹

(1. 湖南大学土木工程学院, 长沙 410082) (2. 湖南大学力学与航空航天学院, 长沙 410082)

摘要 研究了悬索在超谐波共振和 1:3 内共振共同作用下的两模态响应. 首先利用 Galerkin 方法对悬索的面内运动方程进行离散, 得到无穷维离散模型. 并利用多尺度法推导出悬索同时发生超谐波共振和 1:3 内共振时的平均方程以及近似响应. 最后研究了平均方程的稳态解以及垂跨比对幅频曲线、水平张力以及时间历程的影响.

关键词 悬索, 多尺度法, 内共振, 超谐波共振

引言

大跨度的索结构在很多工程领域有着广泛的应用: 电气工程中的高压输电线路、桥梁工程中的斜拉桥和悬索桥以及海洋工程的缆索. 然而通常的索结构其基本特点是低阻尼、质量轻以及比较柔. 因此在外载的作用下, 索结构容易出现大幅的振动, 非线性现象非常明显. 所以在很多领域中对索结构的动力学研究是一个很重要的课题.

按照索结构的线性理论, 可以确定索面内运动和面外运动的固有频率和固有振型. 对于垂跨比较小的悬索, 面内对称模态的固有频率由悬索的弹性—几何参数来确定; 而面内反对称模态和面外模态的固有频率和几何参数没有任何关系. 当悬索的弹性—几何参数取不同的值时, 固有频率之间可能存在某种比例关系. 因此悬索模态之间内共振可能被激发, 导致能量在不同模态之间进行转换^[1].

Rao 等^[2]研究了周期荷载作用下悬索的非线性响应, 其中考虑了面内对称模态和面外模态之间的 1:2 内共振. 利用 Galerkin 方法, Perkins^[3]基于一个两自由度离散模型研究了悬索的 1:2 内共振. Pakdemirli 等^[4]研究了第二阶面内对称模态和面外模态之间的 1:1 内共振, 发现不同的方法可能导致不同的幅频响应曲线. Benedettini 等^[5]利用多尺度法对悬索的四自由度离散模型进行了分析, 其中考虑了 1:1 和 1:2 内共振同时存在的情况. Zhao 等^[6]研究了斜拉索在 1:1 内共振情况下面内振动

和面外摆振的耦合现象. 近年来, Wang 和 Zhao 分别利用直接法^[7]和离散法^[8]研究了悬索结构的 1:3 内共振, 同时讨论了摄动结果与积分结果的差别^[8]. 然而这些研究主要关注索结构的主共振情况. 最近 Wang 和 Zhao^[8]的研究结果表明, 悬索在考虑 1:3 内共振情况时, 在超谐波共振区出现了复杂的非线性动力学现象.

本文主要研究悬索在同时发生超谐波共振与 1:3 内共振时的非线性动力学. 首先对索的面内一维振动方程进行 Galerkin 离散. 并用多尺度法对离散模型进行了摄动求解, 得到了悬索的面内位移及相应的平均方程. 最后利用数值方法对悬索的两模态响应进行了分析.

1 基本方程

如果不考虑弯曲、扭转以及剪切, 则两端悬挂, 受面内谐波激励作用弹性悬索的非线性面内运动方程可以用下面无量纲的偏微分方程来确定^[9]

$$\ddot{w} + 2c\dot{w} - w'' - \alpha(w'' + y'') \int_0^1 (y'w' + \frac{1}{2}w^2) dx = F(x) \cos(\Omega t) \quad (1)$$

其中 $F(x)$ 是描述谐波激励面内分布的无量纲函数, Ω 是谐波激励的无量纲频率, w 是悬索无量纲的竖向位移, c 是无量纲阻尼, 一点代表对无量纲时间 t 的导数, $y(x)$ 是悬索的无量纲初始变形曲线, α 的定义见文献^[9]. 悬索的边界条件可以写成 $w(x, t)|_{x=0,1} = 0$.

2007-01-08 收到第 1 稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10502020)

2 摄动分析

首先把面内运动方程进行 Galerkin 离散,因此可以假设悬索的挠度

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \phi_k(x) \quad (2)$$

其中 $u_k(t)$ 为广义坐标,对于只考虑为对称的面内模态情况

$$\begin{aligned} \phi_i &= c_i [1 - \tan(\frac{1}{2}\omega_i) \sin\omega_i x - \cos\omega_i x], \\ i &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

式中 c_i 满足正交化条件. 而 ω_i 由下式来确定

$$\frac{1}{2}\omega_i - \tan(\frac{\omega_i}{2}) - \frac{1}{2\lambda^2}\omega_i^3 = 0 \quad (4)$$

其中 $\lambda^2 = EA/mgl(8b/l)^3$. m 是悬索单位长度的质量, b 是悬索的垂度, l 是悬索的跨径, E 是悬索的弹性模量, A 是悬索的横截面积, g 是重力加速度. 对于一定范围内的 λ 值,悬索不同模态之间可能存在 1:3 内共振^[7]. 例如,当 λ 接近 1.51π 时,第一阶对称模态和第三阶对称模态可能存在 1:3 内共振,同样当 λ 接近 2.55π 时,第一阶对称模态和第四阶对称模态之间可能存在 1:3 内共振. 接下来,对悬索中可能存在的 1:3 内共振进行分析. 把(3)式代入(1)式,并对(1)式进行 Galerkin 积分之后可以得到

$$\begin{aligned} \ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k &= -2\mu_k \dot{u}_k + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{kij} u_i u_j + \\ &\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \Gamma_{kijh} u_i u_j u_h + f_k \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (5)$$

其中系数的定义见文献[8]. 为了使阻尼效应和非线性全部出现在同阶中,用 $\varepsilon^2 \mu_k$ 代替 μ_k . 同时为了利用多尺度法^[10]求二次近似解,引入时间尺度

$$T_i = \varepsilon^i t, \quad (i=1, 2, \dots) \quad (6)$$

因此关于时间 t 的导数可以转变成关于 T_i 偏导数的展开式,即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $D_n = \partial/\partial T_n$. 因为永年项出现在 $O(\varepsilon^3)$, 方程的解不依赖时间 T_1 . 因此可以把解设成

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \varepsilon u_{k1}(T_0, T_2) + \varepsilon^2 u_{k2}(T_0, T_2) + \\ &\varepsilon^3 u_{k3}(T_0, T_2) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

从上式明显可以看到 $D_1 u_{ki} \equiv 0$. 把(8)式代入(5)式同时考虑(7)式,代入之后按 ε 的幂次进行整理可以得到

$$\text{Order } \varepsilon^1: \quad D_0^2 u_{k1} + \omega_k^2 u_{k1} = f_k \cos(\Omega t) \quad (9)$$

$$\text{Order } \varepsilon^2: \quad D_0^2 u_{k2} + \omega_k^2 u_{k2} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{kij} u_{i1} u_{j1} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{Order } \varepsilon^3: \quad D_0^2 u_{k3} + \omega_k^2 u_{k3} &= -2\mu_k D_0 u_{k1} - 2D_2 D_0 u_{k1} + \\ &\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{kij} (u_{i1} u_{j2} + u_{i2} u_{j1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \Gamma_{kijh} u_{i1} u_{j1} u_{h1} \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $D_n = \partial/\partial T_n$. (9)式的复数解形式可以写为

$$u_{k1} = A_k(T_2) \exp(i\omega_k T_0) + g_k \exp(i\Omega T_0) + cc \quad (12)$$

式中 cc 代表前面项的共轭项,且 $g_k = f_k/(\omega_k^2 - \Omega^2)$. 将(12)代入(10)可得

$$\begin{aligned} D_0^2 u_{k2} + \omega_k^2 u_{k2} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{kij} (A_i A_j e^{i(\omega_i + \omega_j) T_0} + \\ &A_i \bar{A}_j e^{i(\omega_i - \omega_j) T_0} + g_i g_j e^{2i\Omega T_0} + g_i g_j + \\ &A_i g_j e^{i(\omega_i + \Omega) T_0} + A_j g_i e^{i(\omega_j - \Omega) T_0} + A_j g_i e^{i(\omega_i + \Omega) T_0} + \\ &A_i g_j e^{i(\omega_i - \Omega) T_0}) + cc \end{aligned} \quad (13)$$

因此(13)式的解可以写成

$$\begin{aligned} u_{k2} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{kij} \left(\frac{A_i A_j e^{i(\omega_i + \omega_j) T_0}}{\omega_k^2 - (\omega_i + \omega_j)^2} + \right. \\ &\frac{A_i \bar{A}_j e^{i(\omega_i - \omega_j) T_0}}{\omega_k^2 - (\omega_i - \omega_j)^2} + \frac{g_i g_j e^{2i\Omega T_0}}{\omega_k^2 - 4\Omega^2} + \frac{g_i g_j}{\omega_k^2} + \\ &\frac{A_i g_j e^{i(\omega_i + \Omega) T_0}}{\omega_k^2 - (\omega_i + \Omega)^2} + \frac{A_j g_i e^{i(\omega_j - \Omega) T_0}}{\omega_k^2 - (\omega_j - \Omega)^2} + \\ &\left. \frac{A_j g_i e^{i(\omega_j + \Omega) T_0}}{\omega_k^2 - (\omega_j + \Omega)^2} + \frac{A_i g_j e^{i(\omega_i - \Omega) T_0}}{\omega_k^2 - (\omega_i - \Omega)^2} \right) + cc \end{aligned} \quad (14)$$

在研究悬索第一阶对称模态和第三或第四阶对称模态之间的 1:3 内共振时. 为了定量描述 ω_r ($r=3, 4$) 和 $3\omega_1$ 的接近程度以及 3Ω 和 ω_1 的接近程度,引进调谐参数 σ_1 和 σ_2

$$\omega_r = 3\omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_1, \quad 3\Omega = \omega_1 + \varepsilon^2 \sigma_2 \quad (15)$$

如果只考虑第一阶和第 r 阶模态的响应,此时认为其他模态的响应是迅速衰减的. 因此可解性条件可以写成

$$\begin{aligned} -2i\omega_1 (A_1' + \mu_1 A_1) + A_1 \sum_{j=1}^{\infty} S_{1j} A_j \bar{A}_j + \\ \bar{A}_1^2 A_r e^{i\sigma_1 T_2} \xi_{1r} + A_1 P_{11} + e^{i\sigma_2 T_2} P_r = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$-2i\omega_r(A_r' + \mu_r A_r) + A_r \sum_{j=1}^{\infty} S_{ij} A_j \bar{A}_j + S_r A_1^3 e^{-i\sigma_1 T_2} + A_r P_{r1} = 0 \quad (17)$$

式中 S_{ij}, P_i, ξ_{ij} 参见附录. 令 $A_j = \frac{1}{2} a_j e^{i\beta_j}$ 代入(16)和(17)式, 分离实部虚部得到平均方程的极坐标形式为

$$a_1' = -\mu_1 a_1 + \frac{\xi_{1r} a_1^2 a_r}{8\omega_1} \sin\gamma_1 + \frac{P_r}{2\omega_1} \sin\gamma_2 \quad (18)$$

$$a_r' = -\mu_r a_r - \frac{S_r a_1^3}{8\omega_r} \sin\gamma_1 \quad (19)$$

$$a_1 \beta_1' = -\frac{S_{11} a_1^3}{8\omega_1} - \frac{S_{1r} a_1 a_r^2}{8\omega_1} - \frac{P_{11} a_1}{2\omega_1} - \frac{\xi_{1r} a_1^2 a_r}{8\omega_1} \cos\gamma_1 - \frac{P_r}{2\omega_1} \cos\gamma_2 \quad (20)$$

$$a_r \beta_r' = -\frac{S_{31} a_1^2 a_r}{8\omega_r} - \frac{S_{rr} a_r^3}{8\omega_r} - \frac{S_r a_1^3}{8\omega_r} \cos\gamma_1 - \frac{P_{r1} a_3}{2\omega_r} \quad (21)$$

其中 $\gamma_1 = \sigma_1 T_2 - 3\beta_1 + \beta_r, \gamma_2 = \sigma_2 T_2 - \beta_1$. 所以悬索的面内位移可以写成

$$w(x, t) = (a_1 \cos(3\Omega t - \gamma_2) + 2g_1 \cos(\Omega t)) \times \phi_1(x) + (a_r \cos(9\Omega t + \gamma_1) + 2g_r \cos(\Omega t)) \times \phi_r(x) + a_1^2 \cos(6\Omega t - 2\gamma_2) \psi_1(x) + a_r^2 \cos(18\Omega t + 2\gamma_1) \psi_2(x) + a_1 a_r \cos(12\Omega t + \gamma_1 - \gamma_2) \psi_3(x) + a_1^2 \psi_4(x) + a_r^2 \psi_5(x) + a_1 a_r \cos(6\Omega t + \gamma_1 + \gamma_2) \psi_6(x) + \psi_7(x) + \cos(2\Omega t) \psi_8(x) + a_1 \cos(4\Omega t - \gamma_2) \psi_9(x) + a_r \cos(10\Omega t + \gamma_1 - 3\gamma_2) \psi_{10}(x) + a_1 \cos(2\Omega t - \gamma_2) \psi_{11}(x) + a_r \cos(8\Omega t + \gamma_1 - 3\gamma_2) \psi_{12}(x) \quad (22)$$

上式中已令 ε 等于 1, $\psi_i(x)$ 参见附录.

3 数值结果与讨论

在进行悬索 1:3 内共振的数值研究时, 在下面所有的数值研究中假设 $\mu_1 = 0.05, \mu_r = 0.01 (r = 3, 4), f_1 = 0.5$. 平均方程的稳态解可以通过在平均方程的极坐标形式中令 $a_1' = a_r' = \gamma_1' = \gamma_2' = 0$ 来确定. 先选取一个较大(较小)的参数值, 然后利用 Newton - Naphson 方法来求得一组解. 在确定一组解之后, 就可以利用拟弧长的延拓算法来确定整条解的曲线. 所有解的稳定性可以按通常的方法^[10] 来确定. 在下面的幅频响应曲线中实线代表稳定解, 虚线代表不稳定解.

3.1 张拉索 ($\lambda = 1.51\pi$)

对于垂跨比较小的悬索, 第一阶对称模态与第三阶对称模态之间存在 1:3 内共振, 因此 $r = 3$. 图 1 给出了悬索在 $\Omega \approx \omega_1/3$ 即第一阶对称模态超谐波共振情况下的幅频响应曲线, SN 代表鞍结点分叉. 可以看出第一阶对称模态的幅频响应曲线呈硬弹簧性质, 主要是因为激励幅值较大, 导致悬索第一阶对称模态较大的幅值, 当幅值超过一定值后, 由伸长引起的立方非线性的影响超过由垂度引起的平方非线性的影响, 从而幅频响应曲线呈硬弹簧性质. 值得指出的是当激励幅值较小时, 主共振情况下的幅频响应曲线呈软弹簧性质^{[7][8]}. 而此时, 间接激发的高阶模态的幅频曲线跟主共振情况下的曲线性质一致^{[7][8]}, 都呈现硬弹簧性质. 同时类似于 Duffing 方程的幅频响应曲线. 在 σ_2 较大时, 平均方程存在三条稳态解分支, 其中两条稳定, 一条不稳定. 很明显不稳定解在实际响应中不存在, 而其它两条稳定解的选取必须由悬索的初始条件来确定. 对于第一阶对称模态的幅频曲线, 两条幅值较大的解分支随着 σ_2 的减小而不断减小, 最终这两条解分支终止于一个鞍结点分叉点 (SN1) ($\sigma_2 \approx 0.91$).

此外值得指出的是幅频曲线的一条稳定解分支在接近 $\Omega \approx \omega_1/2$ 时, 随着 σ_2 的增大而迅速增大, 其主要原因是在悬索的第二阶摄动分析过程中出现了永年项 (Secular terms) (见 (16) 式), 为了消除这项的影响, 必须利用一种“重组”方法^[10].

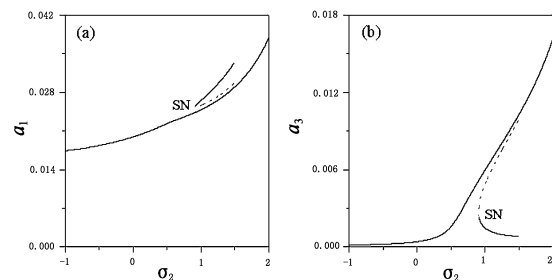


图 1 幅频响应曲线: (a) 第一阶模态, (b) 第三阶模态

Fig. 1 The frequency - response curves of tension cable

(a) The first mode, (b) The third mode

由于非线性的存在, 在不同初值条件下, 结构可能存在不同的非线性响应. 为了研究初始条件对悬索非线性振动的影响, 图 2 给出了不同初值条件下悬索中跨位置的非线性响应. 可以看出由于初值

的不同,跨中的时间历程呈现明显的不同(图(a)),明显可以看出高阶模态的幅值在很大程度上影响了悬索的非线性响应.此外高阶模态的存在导致了非线性响应中出现了很多高阶谐波,而且高阶模态幅值的大小影响了不同模态在非线性响应中的比重(图(b)).

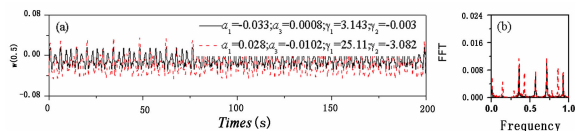


图2 悬索中点位移的非线性响应($\sigma_2 = 1.5$):(a)时间历程;(b)FFT

Fig. 2 The nonlinear response of the suspended cable's midpoint ($\sigma_2 = 1.5$) (a)The time history ; (b) FFT

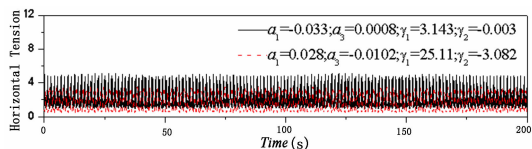


图3 张拉索的水平张力

Fig. 3 The time history of horizontal tensions with

因为在悬索的建模过程中,忽略了悬索的抗弯刚度,所以悬索的水平张力必须大于零.此外,因为悬索任意一点的水平张力都为常数,接下来考虑悬索的无量纲水平张力:

$$H_T = 1 + \frac{EA}{H} \cdot \int_0^1 (y' w' + \frac{1}{2} w'^2) dx = 1 + \alpha \cdot \int_0^1 (y' w' + \frac{1}{2} w'^2) dx \quad (23)$$

其中上式利用了拟静态假设.图3给出了不同初值条件下的水平张力.从图中可以看出,主要由于间接激发的高阶模态的影响,导致水平张力有一定幅值的漂移.此外,悬索的最大水平张力主要由第一阶对称模态确定.显然无论何种初值条件,索的水平张力都要大于零,验证了分析近似解的正确性.

3.2 松弛索 ($\lambda = 2.55\pi$)

为了研究悬索第一阶对称模态与第四阶对称模态之间的1:3内共振,令 $\lambda = 2.55\pi, r = 4$.图4给出了悬索在第一阶对称模态超谐波共振情况下的幅频响应曲线.低价模态与高阶模态的幅频曲线与张拉索的幅频曲线相类似,较大的不同出现在调谐参数 σ_2 较小时,第一阶对称模态的幅频曲线呈现出软弹簧特性.对比图2,可以明显看出,随着垂跨比的增大,在相同激励幅值的作用下,低价模态

与高阶模态的幅值都有明显的减小.其主要原因是因为悬索的水平张力较小.

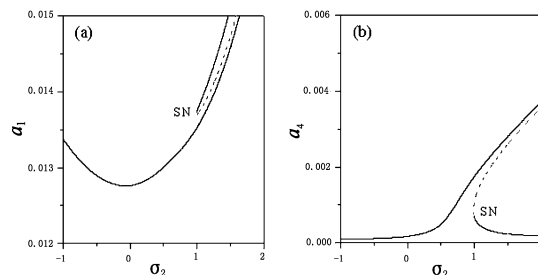


图4 幅频响应曲线:(a)第一阶模态,(b)第四阶模态

Fig. 4 The frequency - response curves of relaxation cable (a)The first mode, (b)The third mode

图5给出了不同初值条件下悬索中跨位置的非线性响应.由于高阶模态的幅值较小,所以初值条件对跨中的时间历程影响较小(图a).此外可以看出,高阶模态在非线性响应所占的比重也较小(图b).对比图3,我们可以得知,由于对称模态形状的改变降低了模态之间的相互作用.图6给出了当时由不同初值条件得到的水平张力时间历程.因为高阶模态的影响较小,所以初值条件的影响较小.同时可以看出,在两种情况下水平张力都大于零.

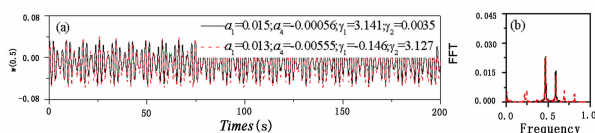


图5 悬索中点位移的非线性响应($\sigma_2 = 1.5$):(a)时间历程;(b)FFT

Fig. 5 The nonlinear response of the suspended cable's midpoint ($\sigma_2 = 1.5$) (a)The time history ; (b) FFT

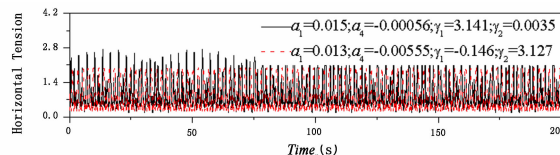


图6 松弛索的水平张力; $\sigma_2 = 1.5$

Fig. 6 Time history of horizontal tension of relaxation cable; $\sigma_2 = 1.5$

4 结论

对悬索的面内运动方程进行 Galerkin 离散,得到了结构的无穷维离散模型.考虑结构同时发生超谐波共振($3\Omega \approx \omega_1$)和内共振($\omega_r \approx 3\omega_1$),利用多尺度法对其进行摄动求解.得到了四个描述幅值和相位关系的一阶非线性常微分方程.分析了垂跨比对

稳态解以及 1:3 内共振的影响,讨论了响应幅值,水平应力的时间响应历程对初始条件的敏感性.

参 考 文 献

- 1 Nayfeh AH. Non - linear interactions. Wiley - Interscience, New York, 2000
- 2 Rao GV, Iyengar R N. Internal resonance and non - linear response of a cable under periodic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 149: 25 ~ 41
- 3 Perkins NC. Modal interactions in the non - linear response of elastic cables under parametric/external excitation. *International Journal of Non - linear Mechanics*, 1992, 27: 233 ~ 250
- 4 Pakdemirli M, Nayfeh SA, Nayfeh AH. Analysis of one - to - one autoparametric resonances in cables; Discretization versus direct treatment. *Nonlinear Dynamics*, 1995, 8: 65 ~ 83
- 5 Benedettini F, Rega G, Alaggio R. Non - linear oscillations of a four - degree - of - freedom model of a suspended cable under multiple internal resonance conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 182: 775 ~ 798
- 6 Zhao YY, Wang LH, Chen DL, Jiang LZ. Nonlinear dynamic analysis of the two - dimensional simplified model of an elastic cable. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 255: 43 ~ 59
- 7 Zhao Y, Wang L. On the symmetric modal interaction of the suspended cable; three - to - one internal resonance. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 294: 1073 ~ 1093
- 8 Wang L, Zhao Y. Nonlinear interactions and chaotic dynamics of suspended cables with three - to - one internal resonances. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43: 7800 ~ 7819
- 9 赵跃宇, 王连华, 刘伟长, 周海兵. 悬索非线性动力学中的直接法与离散法. *力学学报*. 2005, 37(5): 329 ~ 338 (Zhao yueyu, Wang lianhua, Liu weichang, Zhou haibin. Direct treatment and discretizations of non - linear dynamics of suspend cables. *Acta mechanica sinica*, 2005, 37(5): 329 ~ 338)
- 10 Nayfeh AH. Perturbation Methods. Wiley - Interscience, New - York, 1981

附录

$$S_{kj} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} [(\Lambda_{kkn} + \Lambda_{knk}) (\frac{2\Lambda_{nkk}}{\omega_n^2} + \frac{\Lambda_{nkk}}{\omega_n^2 - 4\omega_k^2})] + 3\Gamma_{kkkk} & k = j \\ \sum_{n=1}^{\infty} [(\Lambda_{kkn} + \Lambda_{knk}) \frac{2\Lambda_{nkk}}{\omega_n^2} + (\Lambda_{kjn} + \Lambda_{knj}) (\Lambda_{nkj} + \Lambda_{jnk}) (\frac{1}{\omega_n^2 - (\omega_k + \omega_j)^2} + \frac{1}{\omega_n^2 - (\omega_k - \omega_j)^2})] + 2(\Gamma_{kjjk} + \Gamma_{kjjk} + \Gamma_{kkjj}) & k \neq j \end{cases}$$

$$S_r = \sum_{n=1}^{\infty} [(\Lambda_{rln} + \Lambda_{ml}) \frac{2\Lambda_{n11}}{\omega_n^2 - 4\omega_1^2}] + 3\Gamma_{r111}, \quad \xi_{13} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\Lambda_{1jl} + \Lambda_{1lj}\Lambda_{j31})}{\omega_j^2 - (\omega_3 - \omega_1)^2} + \Gamma_{1311} + \Gamma_{1131} + \Gamma_{1113}$$

$$P_{1l} = (2\Lambda_{11l}(2\Lambda_{11l}g_1^2 + (\Lambda_{1lr} + \Lambda_{1rl})g_1g_r) + (\Lambda_{1lr} + \Lambda_{1rl})(2\Lambda_{11l}g_1g_r + (\Lambda_{1lr} + \Lambda_{1rl})g_r^2)) (\frac{1}{\omega_1^2 - (\omega_1 + \Omega)^2} + \frac{1}{\omega_1^2 - (\omega_1 - \Omega)^2}) + (2\Lambda_{1lr}(2\Lambda_{r1l}g_1g_r + (\Lambda_{r1r} + \Lambda_{r1l})g_r^2) + (\Lambda_{1lr} + \Lambda_{1rl})(2\Lambda_{r1l}g_1^2 + (\Lambda_{r1r} + \Lambda_{r1l})g_1g_r)) \times (\frac{1}{\omega_r^2 - (\omega_1 + \Omega)^2} + \frac{1}{\omega_r^2 - (\omega_1 - \Omega)^2}) + 6\Gamma_{111l}g_1^2 + 4(\Gamma_{11lr} + \Gamma_{11rl} + \Gamma_{1r1l})g_1g_r + 4(\Gamma_{11lr} + \Gamma_{1r1l} + \Gamma_{1rlr})g_r^2 + 2\Lambda_{11l}(2\Lambda_{11l}g_1^2 + (\Lambda_{1lr} + \Lambda_{1rl})g_1g_r) \frac{1}{\omega_1^2} + (\Lambda_{1lr} + \Lambda_{1rl})(\Lambda_{r1l}g_1^2 + (\Lambda_{r1r} + \Lambda_{r1l})g_1g_r) \frac{1}{\omega_r^2}$$

$$P_{rl} = (2\Lambda_{r1l}(2\Lambda_{r1l}g_1g_r + (\Lambda_{1lr} + \Lambda_{1rl})g_1^2) + (\Lambda_{r1r} + \Lambda_{r1l})(2\Lambda_{r1l}g_r^2 + (\Lambda_{1lr} + \Lambda_{1rl})g_1g_r)) (\frac{1}{\omega_1^2 - (\omega_r + \Omega)^2} + \frac{1}{\omega_1^2 - (\omega_r - \Omega)^2}) + (2\Lambda_{rr}(2\Lambda_{rr}g_r^2 + (\Lambda_{r1r} + \Lambda_{r1l})g_1g_r) + (\Lambda_{r1r} + \Lambda_{r1l})(2\Lambda_{rr}g_1g_r + (\Lambda_{r1r} + \Lambda_{r1l})g_1^2)) \times (\frac{1}{\omega_r^2 - (\omega_r + \Omega)^2} + \frac{1}{\omega_r^2 - (\omega_r - \Omega)^2}) + 6\Gamma_{rrr}g_r^2 + 4(\Gamma_{r1r} + \Gamma_{r1r} + \Gamma_{rr1})g_1g_r + 4(\Gamma_{r1l} + \Gamma_{r1l} + \Gamma_{r1l})g_1^2 +$$

$$\begin{aligned}
& 2\Lambda_{rr}(2\Lambda_{rl}g_1^2 + (\Lambda_{rlr} + \Lambda_{rll})g_1g_3)\frac{1}{\omega_r} + (\Lambda_{llr} + \Lambda_{lll})(\Lambda_{lll}g_1^2 + (\Lambda_{llr} + \Lambda_{lll})g_1g_r)\frac{1}{\omega_l} \\
P_r = & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{lmn}g_i g_m g_n + (2\Lambda_{lll}(\Lambda_{lll}g_1^3 + (\Lambda_{llr} + \Lambda_{lll})g_1^2g_r) + (\Lambda_{llr} + \Lambda_{lll})((\Lambda_{lll}g_1^2g_r + (\Lambda_{llr} + \Lambda_{lll})g_1^2g_r)) \times \\
& \frac{1}{\omega_l^2 - 4\Omega^2} + (2\Lambda_{llr}(\Lambda_{rl}g_1^2g_r + (\Lambda_{rlr} + \Lambda_{rll})g_r^2g_1) + (\Lambda_{llr} + \Lambda_{lll})((\Lambda_{rl}g_1^3 + (\Lambda_{rlr} + \Lambda_{rll})g_1^2g_r))\frac{1}{\omega_r^2 - 4\Omega^2} \\
\psi_1(x) = & \sum_{i=1,3,4}^{\infty} \frac{\Lambda_{i11}}{(\omega_i^2 - 4\omega_1^2)}\phi_i(x), & \psi_2(x) = & \sum_{i=1,3,4}^{\infty} \frac{\Lambda_{i33}}{(\omega_i^2 - 4\omega_3^2)}\phi_i(x) \\
\psi_3(x) = & \sum_{i=1,3,4}^{\infty} \frac{(\Lambda_{i13} + \Lambda_{i31})}{(\omega_i^2 - (\omega_1 + \omega_3))}\phi_i(x), & \psi_4(x) = & \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{\Lambda_{i11}}{2\omega_i^2}\phi_i(x) \\
\psi_5(x) = & \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{\Lambda_{i33}}{2\omega_i^2}\phi_i(x), & \psi_6(x) = & \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{(\Lambda_{i13} + \Lambda_{i31})}{\omega_i^2 - (\omega_1 - \omega_3)^2}\phi_i(x) \\
\psi_7(x) = & \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{(\Lambda_{i13} + \Lambda_{i31})g_1g_3 + \Lambda_{i11}g_1^2 + \Lambda_{i33}g_3^2}{\omega_i^2}\phi_i(x), & \psi_8(x) = & \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{(\Lambda_{i13} + \Lambda_{i31})g_1g_3 + \Lambda_{i11}g_1^2 + \Lambda_{i33}g_3^2}{\omega_i^2 - 4\Omega^2}\phi_i(x) \\
\psi_9(x) = & \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{((\Lambda_{i13} + \Lambda_{i31})g_3 + 2\Lambda_{i11}g_1^2)}{2(\omega_i^2 - (\omega_1 + \Omega^2))}\phi_i(x), & \psi_{10}(x) = & \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{((\Lambda_{i13} + \Lambda_{i31})g_1 + 2\Lambda_{i11}g_3^2)}{2(\omega_i^2 - (\omega_3 + \Omega^2))}\phi_i(x) \\
\psi_{11}(x) = & \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{((\Lambda_{i13} + \Lambda_{i31})g_3 + 2\Lambda_{i11}g_1^2)}{2(\omega_i^2 - (\omega_1 - \Omega^2))}\phi_i(x), & \psi_{12}(x) = & \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{((\Lambda_{i13} + \Lambda_{i31})g_1 + 2\Lambda_{i11}g_3^2)}{2(\omega_i^2 - (\omega_3 - \Omega^2))}\phi_i(x)
\end{aligned}$$

ON ONE-TO-THREE INTERNAL RESONANCES AND SUPERHARMONIC RESONANCES OF SUSPENDED CABLES *

Zhao Yueyu^{1,2} Li Yongding² Wang Lianhua¹ Kang Houjun¹

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

(2. College of Mechanics and Aerospace, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract The two -mode nonlinear response of suspended cables subjected to superharmonic resonances with one-to-three internal resonances was investigated. Firstly, the Galerkin method was used to discrete the governing equation to a discrete form of the equations of motion. And the method of multiple scales was applied to attack the equations of motion leading to averaging equations. At last the equilibrium solutions of averaging equation were examined. Also the effects of the sag-to-span ratios on the frequency-response curves, horizontal tensions and the time history were discussed.

Key words suspended cable, multiple scales method, internal resonances, superharmonic resonances