

大型二维稳态声场问题的一种预测方法

黄飞 何 铿 彭伟才

(华中科技大学 力学系, 武汉 430074)

摘要 对于大型二维稳态声场问题, 本文提出了一种基于间接 Trefftz 方法的波数法. 在该方法中, 声压响应解用一组精确满足 Helmholtz 控制方程的波函数通解和由外部激励在自由空间产生的特解来近似表示. 通过在边界上采用加权余量法得到各个波函数的系数, 从而得到所求声场的声压响应. 一个 $60\text{m} \times 40\text{m}$ 的大型声场算例表明, 得到相同精度和收敛性的结果时, 波数法比 BEM 所需的自由度少.

关键词 加权余量法, 声学, Trefftz 方法, BEM

引言

大多数的声场问题, 由于其复杂的几何形状和边界条件, 很难得到解析解, 一般采用数值方法来进行求解, 如有限元法 (FEM) 和边界元法 (BEM) 等^[1-3]. 这些方法的缺点在于所需单元数目随着所求声场的空间尺寸和频率的增加而不断增大, 这将导致计算模型不断增大, 从而降低计算效率, 因此被限制用在处理低频、小型声场问题. 对于中高频声场问题, 文献[7-12]提出了基于间接 Trefftz 方法^[4-6]的 Wave Based Method (WBM). 在该方法中, 方程的解可以用一组满足控制方程的通解和特解的波函数来表示. 波函数的系数通过边界条件来得到, 从而得到问题的解. 该方法具有如下优点: 计算模型比相应的边界元模型要小的多; 由其解可以推出次级解变量, 如从声压解可以得到速度解; 求解范围从低频扩展到中高频段. 但 WBM 中基波函数的构成与所求域的大小有关, 因此限制了该方法在大型声场中的应用.

对于中高频和大型声场问题, 本文提出了另一种基于间接 Trefftz 法的波数法 (Wave Number Method, WNM), 该方法选取一组简单的基波函数, 它与所求区域的大小无关而仅仅与波数相关. 通过计算一个 $60\text{米} \times 40\text{米}$ 的大型声场, 结果表明, 得到相同精度和收敛性的结果时, WNM 比 BEM 所需的自由度少.

1 WNM 的基本原理

WNM 将声场的动力学响应分解为 2 部分, 一部分为一组精确满足齐次 Helmholtz 方程的通解 (基函数), 另一部分为外部激励产生的满足自由空间非齐次 Helmholtz 方程的特解. 各个通解的加权系数可以在满足边界条件的基础上, 采用加权余量法得到.

1.1 声学问题描述

考虑一个二维的稳态声场 Ω_a , 其边界为 Γ , 如图 1 所示. 声场 Ω_a , 在 r_q 点受到源强度幅值为 q 的柱声源. 点 $r = (x, y)$ 处的声压响应 p 满足非齐次 Helmholtz 控制方程

$$(\nabla^2 + k^2)p(\mathbf{r}) = -j\rho\omega q\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q), \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_a \quad (1)$$

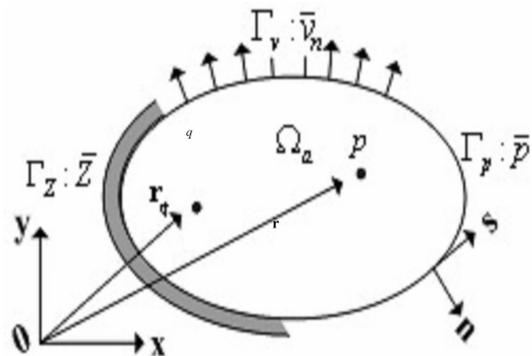


图 1 二维声学模型

Fig. 1 2D acoustic problem

其中 ∇^2 为 Laplace 算子, $k = \omega/c$ 为声学波数, ω 为圆周频率, c 和 ρ 分别为介质的声速和密度, $j =$

$\sqrt{-1}$ 为虚数单位, δ 为迪拉克 δ 函数. 边界 Γ 由三部分组成($\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_v \cup \Gamma_z$), Γ_p, Γ_v 和 Γ_z 分别表示应力, 法向速度和法向阻抗边界, 其边界条件表示如下:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= \bar{p}, \forall \mathbf{r} \in \Gamma_p \\ L_v(p(\mathbf{r})) &= \bar{v}_n, \forall \mathbf{r} \in \Gamma_v \\ L_v(p(\mathbf{r})) &= p(\mathbf{r})/\bar{Z}, \forall \mathbf{r} \in \Gamma_z \\ L_v &= \frac{j}{\rho_a \omega} \frac{\partial}{\partial n} \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\partial/\partial n$ 表示外法线方向 n 的导数.

1.2 声压近似值

根据间接 Trefftz 法的基本原理, 方程(1)的动力学响应 $p(\mathbf{r})$ 可以用 $p_c(\mathbf{r})$ 和 \hat{p}_q 来表示, $p_c(\mathbf{r})$ 是满足齐次 Helmholtz 方程的通解, \hat{p}_q 是外部激励在自由空间的特解.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}) &= p_c(\mathbf{r}) + \hat{p}_q(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{r}) c_i + \hat{p}_q(\mathbf{r}) = \\ &\Phi(\mathbf{r}) \mathbf{c} + \hat{p}_q(\mathbf{r}) = \hat{p}(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_a \end{aligned} \quad (3)$$

此处, $\Phi(\mathbf{r})$ 为 $1 \times N$ 的向量表示基函数, \mathbf{c} 为 $N \times 1$ 的向量表示 Φ_i 的加权系数.

WBM 采用一种较为复杂的通解构造形式:

$$\begin{cases} \Phi_l(x, y) = \cos(k_{l,x}x) \exp(-jk_{l,y}(y - f_{l,y}L_y)) \\ \Phi_s(x, y) = \exp(-jk_{s,x}(x - f_{s,x}L_x)) \cos(k_{s,y}y) \\ k_{a,x}^2 + k_{a,y}^2 = k^2, \quad a = l, s \end{cases} \quad (4)$$

式中 L_x 和 L_y 为完全包围所求声场的任意矩形的边长, 为了提高求解过程的收敛性, 一般选取面积最小的矩形. $f_{l,y}$ 和 $f_{s,x}$ 为尺度系数, 用于调整衰减波的强度, 使其最大幅值为 1.

$$f_{l,y} = \begin{cases} 1, \text{Im}(k_{l,y}) > 0 \\ 0, \text{Im}(k_{l,y}) < 0 \end{cases} \quad f_{s,x} = \begin{cases} 1, \text{Im}(k_{s,x}) > 0 \\ 0, \text{Im}(k_{s,x}) < 0 \end{cases} \quad (5)$$

式(4)中:

$$k_l = (k_{l,x}, k_{l,y}) = \left(\frac{l\pi}{L_x}, \pm \sqrt{k^2 - k_{l,x}^2} \right), \quad \forall l = 0, 1, \dots, n_l$$

$$k_s = (k_{s,x}, k_{s,y}) = \left(\pm \sqrt{k^2 - k_{s,y}^2}, \frac{s\pi}{L_x} \right), \quad \forall s = 0, 1, \dots, n_s \quad (6)$$

可以看出, WBM 的基函数形式复杂, 而且与所求声场的大小有关, 因此限制了该方法在大型声场中的使用. 本文中 Φ_i 选取如下形式:

$$\begin{aligned} \Phi_i(\mathbf{r}) &= \exp(jk(\cos\theta_i x + \sin\theta_i y)) \\ \theta_i &= 2\pi \cdot i/N \quad i = 1 \sim N \end{aligned} \quad (7)$$

由于选取的基函数都为简谐波, 只是各个波的波数

不同, 因此本方法称为波数法. 可以看出, 这里 Φ_i 与所求声场的大小无关.

方程(1)中柱声源在自由空间的特解 \hat{p}_q 可以表示为

$$\hat{p}_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} \rho_a \omega q H_0^{(2)}(k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q\|) \quad (8)$$

其中 $H_0^{(2)}$ 为第二类零阶汉克耳函数.

1.3 基波函数系数的确定

式(3)中声压近似 \hat{p} 优先满足 Helmholtz 方程, 其基波函数的系数 c_i 可以通过强制使 \hat{p} 满足边界条件得到. 这里采用边界上的加权余量公式 (Weighted Residual Formulation) 进行求解.

首先定义满足 3 个声学边界条件的残余误差:

$$\begin{aligned} R_v(\mathbf{r}) &= \frac{j}{\rho \omega} \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} - \bar{v}_n(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_v \\ R_p(\mathbf{r}) &= \hat{p}(\mathbf{r}) - \bar{p}(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_p \\ R_z(\mathbf{r}) &= \frac{j}{\rho \omega} \frac{\partial \hat{p}}{\partial n} - \hat{p}(\mathbf{r})/\bar{Z}(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \Gamma_z \end{aligned} \quad (9)$$

在加权余量公式中, 引入权函数 g 使得边界上的残值误差在平均意义上为 0,

$$\int_{\Gamma_v} g R_v d\Gamma + \int_{\Gamma_p} \frac{-j}{\rho \omega} \frac{\partial g}{\partial n} R_p d\Gamma + \int_{\Gamma_z} g R_z d\Gamma = 0 \quad (10)$$

其中权函数 g 的选择与有限元中的伽辽金方法相似, 可以是基函数 Φ_i 的线性组合.

$$g(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{r}) w_i, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_a \quad (11)$$

其中 w_i 为任意权函数的系数. 将声压近似值 \hat{p} 和权函数 g 代入加权余量公式(11)中. 对任意的系数 w_i , 方程都必须成立, 可以得到一组线性方程

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (12)$$

其中系统矩阵 \mathbf{A} 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{\Gamma_v} \Phi^T \frac{j}{\rho \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \frac{j}{\rho \omega} \frac{\partial \Phi^T}{\partial n} \Phi d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma_z} \Phi^T \left(\frac{j}{\rho \omega} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\Phi}{Z} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (13)$$

系统向量 \mathbf{b} 定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= - \int_{\Gamma_v} \Phi^T \left(\frac{j}{\rho \omega} \frac{\partial \hat{p}_q}{\partial n} - \bar{v}_n \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_p} \frac{j}{\rho \omega} \frac{\partial \Phi^T}{\partial n} (\hat{p}_q - \\ &\bar{p}) d\Gamma - \int_{\Gamma_z} \Phi^T \left(\frac{j}{\rho \omega} \frac{\partial \hat{p}_q}{\partial n} - \frac{\hat{p}_q}{Z} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (14)$$

此处 \cdot^T 表示转置. 求解方程(12)即可得到基波函数的系数 \mathbf{c} .

1.4 WNM, WBM 和 BEM 的比较

由前面的理论分析我们可以看出, 由于 WNM

和 WBM 都基于间接 Trefftz 方法,因此他们具有相似的性质,同 BEM 比较,其系统矩阵 \mathbf{A} 具有如下性质:

1,由于误差仅仅出现在边界上,并且在边界上不需要离散,因此系统矩阵比相应的 BEM 要小.

2,次级解变量与原解具有相同的空间分布,因此很容易由原近似解得到次级解变量,例如从压强解得到法向速度解等. 该性质在处理耦合结构-声问题时将显示巨大的优势,这是因为在耦合问题中,流体对结构的作用体现在压强上,而结构对流体的作用体现在法向速度上.

3,由于每个基波函数与频率相关,因此系统矩阵 \mathbf{A} 也与频率相关.

4,系统矩阵是满阵.

对于同样基于间接 Trefftz 方法的 WNM 和 WBM 来说,WNM 有 2 个优点

1,WNM 的基波函数与所求域无关,而 WBM 需要附加矩形,其基波函数的选择与附加矩形的尺寸相关,因此所得结果的精度和收敛性与附加矩形的选取相关. 其次,对于几何尺寸相差不大的声场,WNM 可以采用相同的基波函数,而 WBM 一般需选择不同的基波函数,这在复杂声场进行域分解时显示出优势.

2,WNM 的基波函数的选择比 WBM 简单,因此在加权余量公式的边界积分中,WNM 比 WBM 要更加容易.

由上述性质可知,无论是与 BEM 还是 WBM 相比,WNM 都显示出一定的优越性.

2 大型二维声场算例

图 2 所示为大型二维声场问题. 在边界 Γ_v 上受到 $v_n = 1\text{m/s}$ 的法向激励,边界 Γ_z 处的法向阻抗为 $\bar{Z} = -10\rho c$,其他位置具有刚性边界条件. 声场内介质的密度和声速分别为 $\rho = 1.2\text{kg/m}^3$ 和 $c = 344\text{m/s}$,点 1,2 和 c 为观测点位置. 各个点的位置如表 1 所示.

表 1 图 2 所示各个点的坐标

Table 1 The coordinates of the points shown in Fig. 2

point	a	b	c	d	e	f	1	2
x (m)	0	60	60	50	20	0	0	35.2
y (m)	0	0	30	40	40	20	6	28

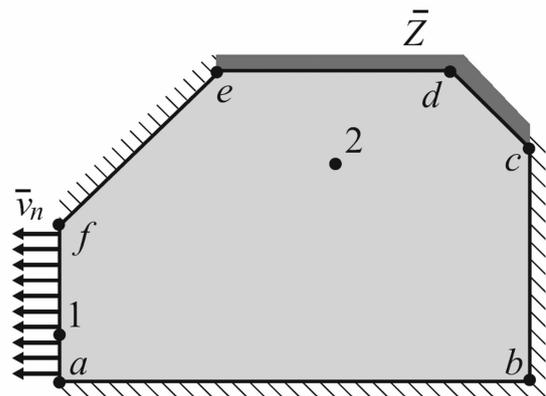


图 2 二维声场问题

Fig. 2 2D acoustic cavity problem

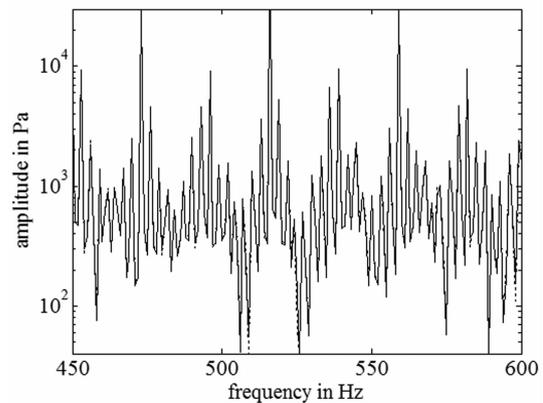


图 3 点 1 的声压频率响应

Fig. 3 Pressure FRF at point 1

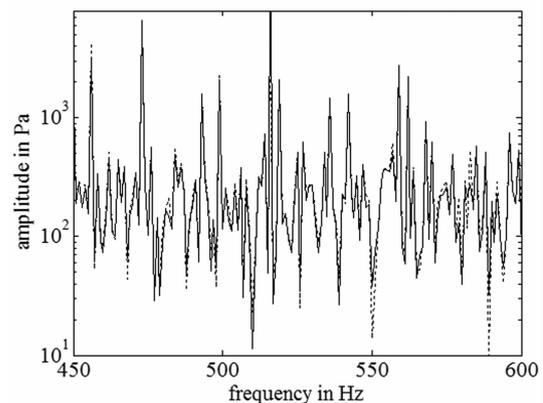


图 4 点 2 的声压频率响应

Fig. 4 Pressure FRF at point 2

图 3,图 4 和图 5 分别表示观测点 1,2 和 c 的声压频率响应函数 (Frequency Response Function, FRF) 的幅值曲线. 实线表示采用 1000 个自由度的 WNM 的结果,虚线表示具有 3649 个单元的 BEM

的结果. 在 BEM 中, 为了保证结果的收敛, 单元数量的选取必需满足每个波长内至少 6 个单元的经验法则, 对于本文选取的 3649 个单元, 可以计算的最大频率为 $f_{max} = 1146$ Hz. 对于更严格的要求, 要获得精确的结果, 所能计算的最大频率应该为所求频率的 2 倍. 从图中可以看出, 观测点 1 和 2 的 WNM 结果与 BEM 吻合很好, 对于观测点 c, 由于该点处于法向阻抗边界和刚性边界的交界点, 其 WNM 与 BEM 的结果在峰值上吻合稍微差一些.

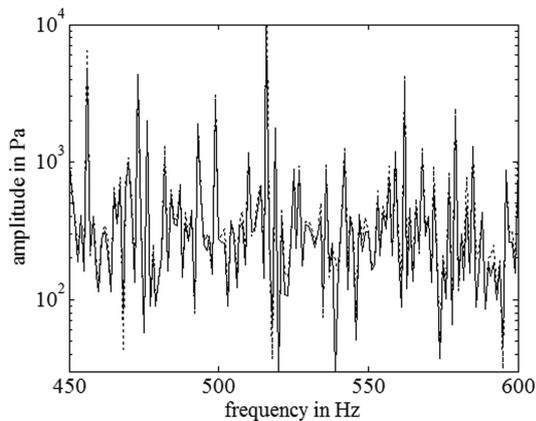


图5 点 c 的声压频率响应

Fig.5 Pressure FRF at point c

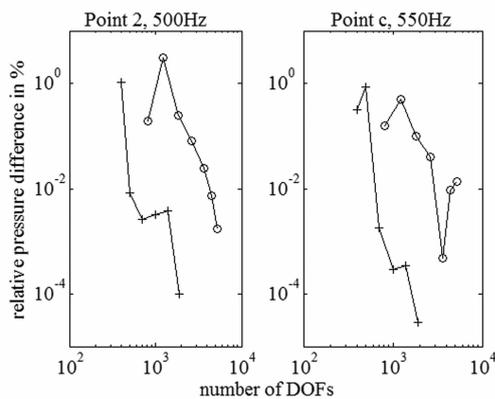


图6 收敛曲线

Fig.6 Convergence curves

图6 为观测点 2 在 500Hz 以及观测点 c 在 550Hz 时的收敛曲线. 横坐标表示自由度数目, 纵坐标表示相对误差. 其中“+”表示 WNM, “o”表示 BEM. 此处选取 2500 个自由度的 WNM 作为基准值. 结果表明, WNM 比 BEM 具有更好的收敛性.

3 结论

为了对中高频段的大型声场进行预测, 本文提出了一种基于间接 Trefftz 法的 WNM, 该方法将 Helmholtz 控制方程的解近似表示为两部分, 一部分包含精确满足方程的一组与域大小无关的通解, 另一部分为外部激励在自由空间的特解. 通过采用加权余量公式, 强迫该近似解在平均意义上满足边界条件, 以此获得各个通解的系数, 从而得到方程的最终解. 由于近似解优先满足控制方程, 因此误差仅仅出现在边界上. 通过计算一个 60 米 × 40 米的大型声场, 结果表明, 达到相同的精度和收敛性时, WNM 比 BEM 所需的自由度少. 可以确信, 对于中高频和大型声场问题, WNM 具有很好的应用前景.

参 考 文 献

- 1 Atalla N, Bernhard R J. Review of numerical solutions for low-frequency structural-acoustic problems. *Applied Acoustics*, 1994 (43): 271 ~ 294
- 2 Deraemaeker A, Babuka I, Bouillard P. Bouillard. Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999 (46): 471 ~ 499
- 3 Desmet W. Mid-frequency vibro-acoustic modelling challenges and potential solutions. *Proceedings of ISMA2002*, Leuven, Belgium, 2002 (2): 835 ~ 862
- 4 Kita E, Kamiya N. Trefftz method: an overview. *Advances in Engineering Software*, 1995 (24): 3 ~ 12
- 5 Zielinski A P. On trial functions applied in the generalized Trefftz method. *Advances in Engineering Software*, 1995 (24): 147 ~ 155
- 6 Pluymers B, Desmet W, Vandepitte D, et al. A Trefftz-based prediction technique for multi-domain steady-state acoustic problems. *Proceedings of the Tenth International Congress on Sound and Vibration*, Stockholm, Sweden,

- 2003;2833 ~ 2840
- 7 Desmet W. A wave based prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis. Leuven, K U Leuven,1998
- 8 Van Hal B, Hepberger A, Priebisch H H, et al. High performance implementation and conceptual development of the wave based method for steady-state dynamic analysis of acoustic problems. Proceedings of ISMA 2002, Leuven, Belgium,2002(2): 817 ~ 826
- 9 Pluymers B, Desmet W, Vandepitte D, et al. Application of the wave based prediction technique for the steady-state dynamic analysis of multi-domain acoustic problems. Proceedings of the 6th National Congress on Applied and Theoretical Mechanics, Gent, Belgium,2003
- 10 Van Hal B. Automation and performance optimization of the wave based method for interior structural-acoustic problems. Leuven, K U Leuven,2004
- 11 Pluymers B, Desmet W, Vandepitte D, et al. Feasibility study of the wave based method for high frequency steady-state acoustic analysis. Proceedings of ISMA2004, Leuven, Belgium 2004;1555 ~ 1574
- 12 彭伟才,何镗. WB法在多域声学分析中的应用. 动力与控制学报,2006,4(3):278 ~ 283(Peng Weicai, He Zeng. Wave based method for multi-domain acoustic analysis. *Journal of Dynamics and Control*,2006,4(3): 278 ~ 283(in Chinese))

A EFFICIENT PREDICTION METHOD FOR STEADY – STATE DYNAMIC ANALYSIS OF TWO DIMENSIONAL LARGE ACOUSTIC DOMAIN PROBLEM

Huang Fei He Zeng Peng Weicai

(*Department of Mechanics, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China*)

Abstract A wave number method (WNM) was proposed to deal with the steady – state mid – frequency acoustic problem. Based on an indirect Trefftz approach, the dynamic pressure response variable was approximated by a set of wave functions, which exactly satisfied the Helmholtz equation. The set of wave functions comprised the exact solutions of the homogeneous part of the governing equations and some particular solution functions, which were derived from the external excitations. The coefficients of the wave functions could be obtained by enforcing the pressure approximation to satisfy the boundary conditions, on which the weighted residual formulation was applied. The results show that the WNM can obtain the same accuracy and convergence as the BEM with less degrees of freedoms.

Key words weighted residual formulation, acoustic, Trefftz – method, BEM