第 5 卷第 1 期 2007 年 3 月
1672-6553/2007/05(1)/058-4

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 5 No. 1
Mar. 2007

基于遗传算法的切换控制器设计与优化*

向伟铭　向峥嵘　陈庆伟
(南京理工大学自动化学院, 南京 210094)

摘要　利用遗传算法研究了一类切换规则只由状态决定的切换系统的控制器优化设计问题. 首先由线性矩阵不等式(LMI)来设计切换控制器,然后应用遗传算法来对切换规则进行优化. 优化后的切换规则不仅可保证闭环系统渐近稳定,而且具有良好的动态性能. 将本文提出的方法应用在小车倒立摆控制系统上,仿真结果表明了本文设计方法的有效性.

关键词　切换系统,遗传算法,优化设计,动态性能,倒立摆

引言

切换系统是一类重要的混杂系统,是指由一组连续或离散动态子系统组成,并按某种切换规则在各子系统间切换的动力系统[1]. 切换系统的研究具有很重要的应用价值和理论意义. 切换控制在很多实际系统中得到了应用,包括:计算机磁盘控制系统[2]、熔炉的开关控制[3]、汽车引擎转矩控制系统[4]等. 在很多情况下,选用切换控制往往能够获得比连续控制更好的效果.

切换系统的稳定性是切换系统研究的一个重要方面. 研究表明,由不稳定的子系统组成的切换系统经过选择合适的切换可以使得切换系统稳定,而即使全部由指数稳定子系统构成的切换系统却在某些切换序列下失稳[5]. 切换系统的稳定性可以分为特定序列下的稳定和任意序列下稳定两大类. 类李雅普诺夫函数方法、多李雅普诺夫函数方法等方法研究了特定序列下的稳定性[6];而文献[7]指出当各个子系统存在公共李雅普诺夫函数时,可以保证对任意的切换序列,系统是渐近稳定的;文献[8]给出了一类非线性切换系统的二次稳定的充要条件;文献[9]研究了基于多李雅普诺夫函数的输出反馈镇定控制器的设计方法;文献[10]给出了单输入输出切换系统在任意切换序列下的二次可镇定条件.

另外,切换控制技术在工程上得到广泛应用得一个重要原因是它可以明显改善动态性能. 而对于切换系统来说,仅仅保证系统稳定是不够的,动态过程的良好与否在很大程度上决定了研究结果的实际应用价值. 切换序列的选取对系统的动态性能有很大的影响. 本文研究了使用遗传算法来优化一类基于状态空间划分的切换规则的方法,并且将该方法应用到小车倒立摆的控制中. 仿真结果表明采用本文提出的方案取得了良好的控制效果.

1　问题的描述与预备知识

考虑如下的切换系统

$$\dot{x} = f_{i(x,t,u)}(x,t,u) \quad i \in \{1,2,3,\cdots,N\} \tag{1}$$

其中状态变量 $x \in R^n$,输入 $u \in R^m$,f 是光滑的向量场, 切换规则 $i(x,t,u)$ 表示为映射 $i: R^n \times T \times R^m \to I$, $T = [0, \infty)$, $I = \{1,2,\cdots,N\}$. 当输入 $u = g_i(x)$ 时,(1)可写为

$$\dot{x} = f_{i(x,t)}(x,t) \quad i \in \{1,2,3,\cdots,N\} \tag{2}$$

本文考虑以划分状态空间来确定的切换规则,因此(2)式可简化为

$$\dot{x} = f_{i(x)}(x,t) \quad i \in \{1,2,3,\cdots,N\} \tag{3}$$

其中切换规则表示为映射 $i: R^n \to I$, $I = \{1,2,\cdots,N\}$. 如果子系统都是线性自治系统,则(2)式可表示为

$$\dot{x} = A_{i(x)}x \quad i \in \{1,2,3,\cdots,N\} \tag{4}$$

引理 1:存在一组 K 类函数 $\alpha(x)$;$\beta_i(x)$ $i \in \{1,2,3,\cdots,N\}$,存在一个连续可微函数 $V: R^n \times [0,\infty) \to R^n$,满足 $V(x,t) > \alpha(x)$,且 $L_{f_i(x,t)} < -\beta_i(x)$, $i \in \{1,2,3,\cdots,N\}$. 则系统(2)在任意切换序列下

2006-07-25 收到第 1 稿,2006-09-25 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(60474034)

渐近稳定.

证明:在任意的切换序列下,选择 $V(x,t)$ 为系统切换系统(2)的李雅普诺夫函数. 又因为 $L_{f_i(x,t)}V(x,t) < -\beta_i(x)$, $i \in \{1,2,3,\cdots,N\}$, 令 $\beta(x) = \arg\min\beta_i(x)$, $i \in \{1,2,3,\cdots,N\}$, 于是可以得到 $L_{f_i(x,t)}V(x,t) < -\beta(x)$, 即 $\dot{V}(x,t) < -\beta(x)$. 因此系统(2)渐近稳定.

推论 1:如果存在 $p>0$,且满足 $A_i^TP+PA_i<0$,其中 $i \in \{1,2,3,\cdots,N$, 则系统(4)在任意切换序列下指数稳定.

证明:由引理 1 容易证得.

2　主要结果

考虑线性切换系统:

$$\dot{x} = A_{i(x)}x + B_{i(x)}u \quad i \in \{1,2,\cdots,N\} \tag{5}$$

其中 $i(x): R^n \to I$, $I = \{1,2,\cdots,N\}$. 设只和状态变量有关的切换规则为 $i(x)$:当 $\sigma(x) = a_i$, $i=1,2,\cdots,m$, 子系统进行切换,其中 $\sigma(x)$ 是 x 的函数. 于是优化此切换规则问题就转化为优化状态空间的划分界限参数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$, 其中参数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 约束条件为:

$$\begin{cases} \alpha_1 < a_1 < \alpha_2 \\ \beta_1 < a_2 < \beta_2 \\ \cdots \\ \gamma_1 < a_m < \gamma_2 \end{cases}$$

设计反馈 $u = K_ix$, $i \in \{1,2,\cdots,N\}$ 满足以下线性矩阵不等式(LMI)

$$\begin{cases} (A_1+B_1K_1)^TP + P(A_1+B_1K_1) < 0 \\ (A_2+B_2K_2)^TP + P(A_2+B_2K_2) < 0 \\ \cdots \\ (A_N+B_NK_N)^TP + P(A_N+B_NK_N) < 0 \\ P > 0 \end{cases} \tag{6}$$

得到反馈阵 $K_1,K_2,\cdots,K_N$;然后根据需要给定一个性能指标函数 J,来求解下列优化问题:

$$\min \quad J$$

$$st. \begin{cases} \alpha_1 < a_1 < \alpha_2 \\ \beta_1 < a_2 < \beta_2 \\ \cdots \\ \gamma_1 < a_m < \gamma_2 \end{cases}$$

得到一组优化解 $a_1,a_2,\cdots,a_m$, 即为优化后的切换规则.

由于切换规则对系统性能影响非常复杂,因此可以考虑使用遗传算法来进行参数的优化. 遗传算法是 Holland 教授于 1975 年提出来的,是通过模拟生物进化的机制来构造人工系统的模型[11,12]. 参数的优化是遗传算法的经典应用领域,特别是对一些非线性、多模型、多目标的优化问题,用其他方法较难求解,遗传算法却可以方便地得到较好的结果. 遗传算法体现了"适者生存,优胜劣汰"的原则. 通过对随机产生的初始种群进行选择、交叉、变异的操作,通过反复的迭代进化,得到最优解.

根据推论 1 可知系统(5)在任意切换序列下均能保证稳定,因此可保证在运行遗传算法时,优化过程中出现的所有切换规则都能够镇定系统(5),优化后,从中得到最优解 $a_1,a_2,\cdots,a_m$. 至此,完成了反馈镇定控制器($K_1,K_2,\cdots,K_N$)的设计和切换规则($a_1,a_2,\cdots,a_m$)的优化.

3　仿真研究

倒立摆是一个多变量、非线性、强耦合系统,将这样一个系统作为被控对象,在控制过程中能有效地反映出控制中的许多关键问题,倒立摆的非线性数学模型[13]:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g\sin x_1 - amlx_2^2\sin(2x_1)/2 - au\cos x_1}{4l/3 - aml\cos^2 x_1} \tag{7}$$

式中:g—重力加速度,$g = 9.8\mathrm{m^2/s}$, $a = 1/(M+m)$;M—小车质量,$M = 1.32\mathrm{kg}$;m—摆杆质量,$m = 0.109\mathrm{kg}$;l—摆杆长度,$l = 0.5\mathrm{m}$;x_1—摆杆与垂直方向的夹角;x_2—摆杆的角速度;u—作用在小车上的力,单位为 N.

由于 0°线性程度好,而到 ±90°附近非线性程度严重,而且考虑到在 ±90°系统不可控,于是分别在 $x_1 = 0°, \pm45°, \pm65°, \pm85°$ 将系统(7)线性化,得到:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15.592 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.1134 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 13.6244 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7641 \end{bmatrix};$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 11.8649 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4482 \end{bmatrix};$$

$$A_4=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 9.8754 & 0\end{bmatrix},B_4=\begin{bmatrix}0\\ -0.0915\end{bmatrix}$$

由推论1,分别求取各个工作点线性化后的控制器如下:

$K_1=[28.0436 \quad 7.1676]$

$K_2=[35.6893 \quad 9.7168]$

$K_3=[52.9635 \quad 15.4058]$

$K_4=[215.8604 \quad 68.6969]$

切换规则选取为:$i(x)=\begin{cases}1 & x_1>a_1\\ 2 & a_1\le x_1<a_2\\ 3 & a_2\le x_1<a_3\\ 4 & x_1\ge a_3\end{cases}$;

其中约束条件为$\begin{cases}0<a_1<45^\circ\\ 45^\circ<a_2<65^\circ\\ 65^\circ<a_3<90^\circ\end{cases}$

选取摆杆的夹角随时间的积分为性能指标:$J=\int_0^\infty|x_1|\mathrm{d}t$;于是切换规则的优化问题如下:

$$\min J=\int_0^\infty|x_1|\mathrm{d}t$$

$$st.\quad\begin{cases}0<a_1<45^\circ\\ 45^\circ<a_2<65^\circ\\ 65^\circ<a_3<90^\circ\end{cases}$$

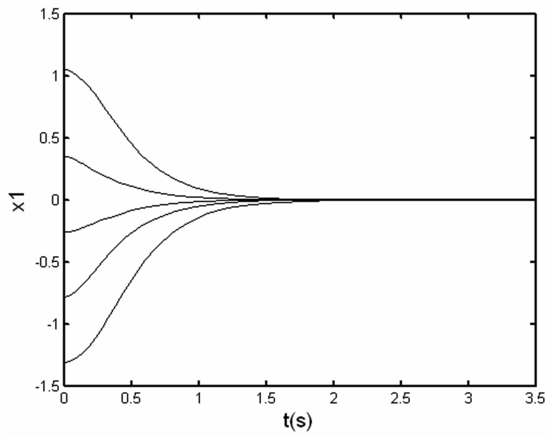

图1 摆杆与垂直方向的夹角曲线

Fig.1 Trajectory of the pendulum's vertical angle

使用遗传算法进行优化,为了不失一般性,保证 a_1,a_2,a_3 都能够优化到,选择初始值为$(\frac{75\pi}{180},0)$.进化代数为20,染色体长度为30;种群大小为20;交叉概率为0.8;变异概率为0.02.得到优化结果为:当 $a_1=0.2917,a_2=1.0683,a_3=1.5128$ 时,$min\ J=15.007$,最终的切换规则为:

$$i(x)=\begin{cases}1 & x_1>0.2917\\ 2 & 0.2917\le x_1<1.0683\\ 3 & 1.0683\le x_1<1.5128\\ 4 & x_1\ge 1.5128\end{cases}$$

选择初始值分别为$(-\frac{15\pi}{180},0)$;$(-\frac{45\pi}{180},0)$;$(-\frac{75\pi}{180},0)$;$(\frac{20\pi}{180},0)$;$(\frac{60\pi}{180},0)$.通过MATLAB仿真,得到仿真曲线如图1-2所示:

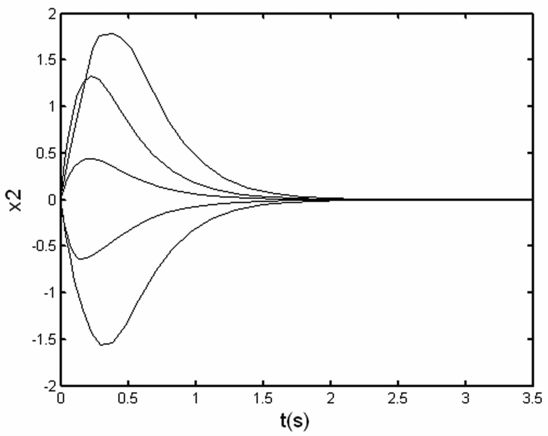

图2 摆杆的角速度曲线

Fig.2 Trajectory of the pendulum's angular velocity

仿真结果表明,设计的切换控制器能使摆杆迅速稳定到垂直方向,并且具有很好的动态性能.

4 结论

本文研究了以状态空间划分为切换规则的切换系统的控制器的设计与优化.通过线性矩阵不等式设计切换控制器并使用遗传算法对切换规则进行优化.最后运用在小车倒立摆系统的控制上.通过仿真研究表明由本文提出的方法设计的控制器能够保证系统很快稳定,具有很好的动态性能.

参考文献

1 Decarlo R, Branicky M S, Lennartson B. Perspective and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. Proceedings of IEEE, 2000:1069~1082

2 A. Balluchi et al. Mixed models of computation in the design of automation engine control. Proceedings of conference on Decision and Control, Orlando, Florida 2001:3108~3133

3 Liberzon D. Switching in Systmes and Control. Boston, MA:

Birkhuser,2003

4 R. W. Brockett. Hybrid models for motion control systems in Essays on Control:Perspectives in the Theory and its Applications. Boston,MA:Birkhauser,1993:29 ~ 53

5 Song Yang,Xiang Zhengrong,Chen Qingwei and Hu Weili. Analysis of sliding mode in planar switched systems. *Acta Automatica Sinca* ,2005,31(5):743 ~ 749

6 Michael S. Branicky. Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transaction on Automatic control*,1998,43(4):475 ~ 482

7 Liberzon D,Morse A S. Basic problem s in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999,19 (1):59 ~ 70

8 Jun Zhao and Georgi M. Dimirovski. Quadratic stability of a class of switched nonlinear systems. *IEEE Transaction on Automatic control*,2004,49(4):574 ~ 578.

9 Nael H. El-Farra, Prashant Mhaskar and Panagiotis D. Christofides. Output feedback control of switched nonlinear systems using multiple lyapunov functions. Proceedings of American Control Conference, 2005, Portland, USA: 3792 ~ 3799

10 赵胜芝,李建华,赵军. 单输入单输出切换系统的一致标准形及可镇定性. 控制与决策,2005,20(10):1161 ~ 1164(Zhao Shengzhi,Li Jianhua,Zhao Jun. Uniform normal form and stabilizability of single-input single-output switched systems. *Control and Decision*, 2005, 20 (10): 1161 ~ 1164(in Chinese))

11 Holland J H. Adaptation in natural and srtificial systems, MIT Press,1975

12 Michalewicz Z. Genetic algorithms + data structures = evolution programs. Springer - Verlag,1992

13 Cao S G, Rees N M, Feng G. Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control systems. *International Journal of Systems Science*, 1996, 27 (2): 193 ~ 203

DESIGN AND OPTIMIZATION OF GA - BASED SWITCHING CONTROLLER *

Xiang Weiming　Xiang Zhengrong　Chen Qingwei

(*School of Automation*, *Nanjing University of Science and Technology*, *Nanjing*　210094, *China*)

Abstract　This paper deals with the design and optimization of a kind of switching controller, whose switching law is determined by states. A switching controller was designed based on linear matrix inequalities (LMIs), and the switching law was optimized by genetic algorithm. The proposed controller not only can stabilize the closed - loop system, but also give a promising dynamical performance. The proposed approach was applied to control an inverted pendulum, and the simulation result showed its availability.

Key words　switched system,　genetic algorithm,　optimization,　dynamical performance,　inverted pendulum

Received 25 July 2006, revised 25 September 2006.

* The project supported by National Natural Science Foundation of China (60474034)