

采用渐近法研究负载钢丝绳的固有振动*

吴 晓 杨立军

(湖南文理学院土木建筑工程系, 常德 415000)

摘要 结合 Liouville - Green 变换, 改进了求解变系数二阶线性齐次方程的渐近法. 并采用改进后的渐近法研究了负载钢丝绳的固有振动问题, 推导出了其固有振动的近似频率特征方程. 实例计算表明, 改进后的渐近法不但比 Bessel 函数法计算简便, 而且计算精度也非常高.

关键词 渐近法, 负载, 频率

引言

对于矿山竖井提升系统, 由于其工作环境极为恶劣, 需要经常对负载钢丝绳进行安全检查以计算其强度和安全系数^[1-2]. 山东矿业学院机械系运输提升实验室研制了一种在线测力仪器或报警器, 通过在线测量负载钢丝绳的固有振动频率计算出吊重, 来判断和确定钢丝绳的安全程度. 因测量结果与实际相差较大, 未能投入使用, 根据矿山提升系统安全操作规程, 提升加速度一般控制在很小的范围内, 在正常运行条件下近似认为等速提升, 故提升载荷可按静止吊重处理. 由于负载钢丝绳的固有振动控制方程为变系数二阶线性齐次方程, 一般难以求得精确解析解. 若采用 Bessel 函数法研究负载钢丝绳的固有振动问题, 存在计算过程繁琐复杂的缺陷, 不便于工程设计人员掌握使用. 渐近法是解弱非线性振动的一种常用方法^[3-4]. 一般求解变系数二阶线性齐次方程, 多采用渐近法即用一个渐近展开式的前面少数几项表示, 且不多于两项, 而变系数二阶线性齐次方程在参数摄动的情况下, 通过 Liouville - Green 变换可得到的展开式除了某些所谓转点外处处有效. 因此本文对文献[1]的渐近法进行了推广和改进, 然后采用改进渐近法研究了负载钢丝绳的固有振动问题, 实例计算表明该方法不但计算简便而且计算精度高, 为钢丝绳拉力报警器提供了可靠的理论依据.

1 渐近法的计算理论

对于变系数二阶线性齐次方程, 一般可表示为如下形式

$$\frac{d^2w}{dx^2} + g(x)\frac{dw}{dx} + \lambda^2 f(x)w = 0 \quad (1)$$

式中, λ^2 为正的大参数, $g(x)$ 为连续函数, $f(x)$ 为正的二次连续可微函数.

令

$$z = \phi(x), u(x) = w(x)v(x)^{[5-6]} \quad (2)$$

对式(2)求一阶导数可得

$$\begin{cases} \frac{du}{dz} = (wv' + w'v)/\phi' \\ \frac{dw}{dx} = (\frac{\phi'}{V} \frac{du}{dz} - \frac{v'u}{v^2}) \end{cases} \quad (3)$$

式中, w', v', ϕ' 均为对 x 的一阶导数.

利用式(2)、式(3)可把式(1)化为如下形式

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{\phi'^2}(\phi'' - \frac{2\phi'v'}{v} + g\phi')\frac{du}{dz} + \frac{1}{\phi'^2}(\lambda^2 f - \frac{v''v - 2v'^2}{v^2} - \frac{gv'}{v})u = 0 \quad (4)$$

再令

$$\phi'' - \frac{2\phi'v'}{v} + g\phi' = 0, \phi'^2 = f \quad (5)$$

因此, 可把式(4)化为如下形式

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dz^2} + \lambda^2 u = \varepsilon(x)u \\ \varepsilon(x) = (\frac{v''v - 2v'^2}{v^2} + \frac{gv'}{v})/f \end{cases} \quad (6)$$

2006-09-03 收到第1稿, 2006-10-15 收到修改稿.

* 湖南"十一五"重点建设学科项目经费资助.

假设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均为含有小参数的连续函数,那么式(5)求得的 $v(x)$ 显然也是一个含有小参数的连续函数,所以 $\varepsilon(x)$ 是一个含有小参数一次方项和二次方项的函数,由于 λ^2 是正的大参数,因此有 $\lambda^2|\varepsilon(x)|$,所以在式(6)中完全可以忽略 $\varepsilon(x)$ 的影响,把式(6)化为

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \lambda^2u = 0 \quad (7)$$

由式(7)可以求得

$$u(z) = A\cos\lambda z + B\sin\lambda z \quad (8)$$

再由式(2)、式(8)可得

$$w(x) = [A\cos\lambda\phi(x) + B\sin\lambda\phi(x)]/v(x) \quad (9)$$

式中, A 、 B 为待定常量.

2 负载钢丝绳的固有振动

竖井钢丝绳提升重物的力学模型如图1所示,其中, l 为钢丝绳的长度, ρ 为钢丝绳的单位长质量, m 为吊重物体的质量,用 $s(x)$ 表示 x 处钢丝绳横断面上的张力,对于图1所示负载钢丝绳,由振动理论可推导出其沿 y 方向作微振时的振动控制方程为

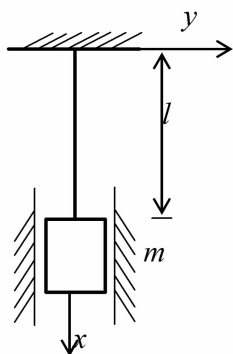


图1 负载钢丝绳模型

Fig.1 The model of cable bearing weight

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[s(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (10)$$

其中, y 为负载钢丝绳沿 y 方向的微振位移.

钢丝绳的张力表达式为

$$s(x) = mg + \rho g(l - x) \quad (11)$$

设钢丝绳的横振位移为

$$y(x, t) = w(x) \sin(\omega t + \theta_0) \quad (12)$$

式中, $w(x)$ 为微振振型函数.

把式(12)代入式(10)中得

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \varepsilon_0(M - \varepsilon_0x)^{-1} \frac{dw}{dx} + \lambda^2(M - \varepsilon_0x)^{-1}w = 0 \quad (13)$$

式中, $M = 1 + \frac{\rho l}{m}$, $\lambda^2 = \frac{\rho \omega^2}{mg}$, $\varepsilon_0 = \frac{\rho}{m}$.

在式(13)中,由于 ρ 为钢丝绳的单位长质量,当我们用单位长质量(即仅取质量量纲)比上吊重质量时,可以认为得到的结果是无量纲的,因此可把 $\varepsilon_0 < 1$ 作为小参数.

把式(13)与式(1)进行对比,可知在式(13)中, $-\varepsilon_0(M - \varepsilon_0x)^{-1}$ 相当于式(1)中的 $g(x)$, $\lambda^2(M - \varepsilon_0x)^{-1}$ 相当于式(1)中的 $f(x)$.因此可由式(2)、式(5)、式(9)、式(13)可以求得图1所示负载钢丝绳的振型的近似解为

$$w(x) = (M - \varepsilon_0x)^{\frac{1}{4}} \left[A \cos \frac{2\lambda}{\varepsilon_0} (M - \varepsilon_0x)^{\frac{1}{2}} - B \sin \frac{2\lambda}{\varepsilon_0} (M - \varepsilon_0x)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (14)$$

图1所示负载钢丝绳的边界条件为

$$\begin{cases} x=0, y(x, t) = 0 \\ x=l, m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -mg \frac{\partial y}{\partial x} \end{cases} \quad (15)$$

由式(12)、负载钢丝绳的振型近似解式(14)代入式(15)可以得到钢丝绳沿 y 方向作微振时的近似频率特征方程为

$$\operatorname{tg} \frac{2\lambda}{\varepsilon_0} (M^{\frac{1}{2}} - 1) = \frac{4\lambda\varepsilon_0}{4\lambda^2 - \varepsilon_0^2} \quad (16)$$

3 实例计算

下面用算例1验证本文改进渐近法的计算精度,用算例2说明本文方法的应用.

算例1 以文献[7]的算例为例,已知 $l = 1\text{m}$,当 $\frac{m}{\rho}$ 分别为1和10时,试计算悬挂重物的拉索横向微振的固有频率.

采用式(16)可以求出 $\frac{m}{\rho} = 1$ 时的一阶固有频率为 $\omega = 3.3262\text{rad/s}$,当 $\frac{m}{\rho} = 10$ 时的一阶固有频率为 $\omega = 3.1559\text{rad/s}$;文献[2]采用Bessel函数法求得 $\frac{m}{\rho} = 1$ 时的一阶固有频率为 $\omega = 3.311\text{rad/s}$, $\frac{m}{\rho} = 10$ 时的一阶固有频率为 $\omega = 3.137\text{rad/s}$.由以

上计算结果可知,改进渐近法的计算结果与文献[7]所用 Bessel 函数法的计算结果的误差分别为 0.4591%、0.6044%。这充分说明改进渐近法的计算精度很高,而且改进渐近法的计算过程明显要比 Bessel 函数法计算过程简便得多,为在线测量钢丝绳吊重问题提供了理论依据。

算例 2 以某竖井提升系统为例,所用钢丝绳为 $\Delta 6 \times 30$ 异型股钢丝绳,绳 $\phi 37\text{mm}$,外层丝径 $\phi 2.6\text{mm}$,内层丝径 $\phi 1.95\text{mm}$,绳的密度 $\rho = 5.215\text{kg/m}$,取吊重 $m = 5 \times 10^3\text{kg}$,分别取绳长 $l = 50\text{m}$ 、 $l = 100\text{m}$ 、 $l = 150\text{m}$ 、 $l = 200\text{m}$ 、 $l = 250\text{m}$ 、 $l = 300\text{m}$ 、 $l = 350\text{m}$ 、 $l = 400\text{m}$ 时由式(16)计算出负载钢丝绳沿 y 方向微振时前五阶固有频率,如表 1 所示;取绳长 $l = 350\text{m}$,分别取吊重 $m = 1 \times 10^3\text{kg}$ 、 $m = 2 \times 10^3\text{kg}$ 、 $m = 3 \times 10^3\text{kg}$ 、 $m = 4 \times 10^3\text{kg}$ 、 $m = 5 \times$

10^3kg 、 $m = 6 \times 10^3\text{kg}$ 、 $m = 7 \times 10^3\text{kg}$ 、 $m = 8 \times 10^3\text{kg}$ 时由式(16)计算出负载钢丝绳沿方向微振时前五阶固有频率,如图 2 所示。

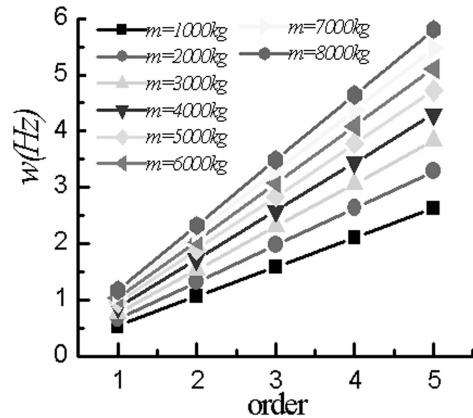


图 2 不同吊重时负载钢丝绳固有频率

Fig. 2 The natural frequency of cable bearing different weigh

表 1 不同长度时负载钢丝绳固有频率(单位:)

Table 1 The natural frequency of cable bearing weight with different length (Unit:)

l(m)	50	100	150	200	250	300	350	400
first frequency	6.1788	3.1289	2.1137	1.6047	1.3003	1.0964	0.9509	0.8413
second frequency	12.3476	6.2516	4.2204	3.2029	2.5932	2.8155	1.8942	1.6751
third frequency	18.5165	9.3743	6.3271	4.8012	3.8861	3.2746	2.8375	2.5089
fourth frequency	24.6854	12.4969	8.4338	6.3995	5.1791	4.3636	3.7808	3.3427
fifth frequency	30.8514	15.6196	10.5404	7.9977	6.4719	5.4527	4.7241	4.1765

从表 1 可以看出,当负载钢丝绳负载质量一定时,随负载钢丝绳长度增大,其固有频率越来越小;从图 2 可以看出,当负载钢丝绳长度一定时,随负载钢丝绳负载质量增大,其固有频率越来越大。负载钢丝绳固有频率随其负载质量、钢丝绳长度的变化规律,可供工程设计人员设计钢丝绳拉力报警器时参考。

参 考 文 献

- 1 严世榕. 竖井提升容器在提升过程中的动力学分析及计算机仿真. 矿山机械, 1998, 26(9): 38~40 (Yan Shi-rong. Dynamic analysis and computer simulation of winding vehicle in the course of winding up. *Mining & Processing Equipment*, 1998, 26(9): 38~40 (in Chinese))
- 2 朱真才,戴兴国,古德生. 缠绕式提升罐笼弹性承接冲击动力学. 中南工业大学学报, 2003, 34(1): 21~23 (ZHU Zhen-cai, DAI Xing-guo, GU De-sheng. Dynamic research on cage elastic supporting impact of a drum hoist. *Journal of Central South University of Technology*, 2003, 34(1): 21~23 (in Chinese))
- 3 彭献,陈自力. 一类强非线性系统共振周期解的渐近分析. 动力学与控制学报, 2004, 2(1): 46~50 (Peng Xian, Chen Zili. Asymptotic analysis for resonance cycle solution of a type of strongly nonlinear systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 46~50 (in Chinese))
- 4 蔡建平,陈树辉,李怡平. 矿井提升系统的强非线性振动. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 30~33 (Cai Jian-ping, Chen Shuhui, Li Yiping. Strongly nonlinear oscillations in mine hoist systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 30~33 (in Chinese))
- 5 吴晓. 楔形杆轴纵扭固有振动的摄动解. 机械科学与技术, 2001, 20(1): 31~32 (WU Xiao. The perturbation solution for natural longitudinal torsional vibration of wedge-

- shaped shaft. *Mechanical Science and Technogy*, 2001, 20 (1):31 ~ 32 (in Chinese))
- 6 吴晓. 变密度环形薄膜的轴对称振动修正摄动解. 振动与冲击, 2002, 21(4):59 ~ 60 (WU Xiao . Amended perturbation solution for axisymmetric vibrations of annular membranes with varying density. *Journal of Vibration and Shock*, 2002, 21(4):59 ~ 60 (in Chinese))
- 7 伊·萨博著, 雷有常等译校. 高等工程力学. 北京:海洋出版社, 1985: 257 ~ 263 (I. Szabó. Translated by Lei Youchang et al . Höhere technische mechanik . Beijing: Ocean Press ,1985:257 ~ 263 (in Chinese))

STUDY ON NATURAL VIBRATION OF CABLE BEARING WEIGHT WITH ASYMPTOTIC METHOD *

Wu Xiao Yang Lijung

(Dept. of Civil and Architectural Engineering, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

Abstract With Liouville – Green transform, the asymptotic method to solve second homogeneous linearity equation was improved. The improved asymptotic method was used to study the natural vibration of cable bearing weight, and the formula for its frequency was deduced. The example suggested that the improved asymptotic method was exact and simpler than Bessel method.

Key words asymptotic method, load, frequency