

斜拉桥中拉索对桥面动力特性的影响*

康厚军 赵跃宇 王连华

(湖南大学土木工程学院,长沙 410082)

摘要 将斜拉桥的拉索和桥面抽象为带弹性支承的压弯弹性梁模型,并根据轴向受力梁的弯曲振动方程和哈密尔顿原理,建立了考虑拉索索力影响的单梁多索索梁结构-梁的动力学控制方程,应用传递矩阵法进行求解,并编制了求解程序.通过算例对影响桥面动力学特性的索的刚度、张拉力和桥面裂纹等因素进行了数值分析.分析结果表明,在斜拉桥的施工阶段,随着梁的长度的改变,梁的刚度迅速下降,由于索对梁的支承作用使结构的刚度有一定的提高,而索的拉力对桥面作用的压力越来越大,轴向压力使结构的刚度降低越来越明显,另一方面轴向压力对桥面裂纹引起的刚度降低有一定的抑制作用.由此,在桥梁的建设中应重视索力对桥面动力特性的影响.

关键词 拉索,弹性支承,索梁,动力学建模理论,传递矩阵法,振动

引言

索梁结构是工程中普遍采用的一种结构,它的受力形式简单、材料力学性能得以充分利用.斜拉桥就是最常见一种形式,无论是施工过程中还是在成桥状态,斜拉桥都可以简化为一个索梁结构.

根据目前见到的文献,对这类结构进行动力学分析的基本方法是有限元法,国内外学者对此做了大量研究^[1-3].1997年,亢战、钟万勰^[4]提出了一个斜拉桥参数共振的模型,揭示了在斜拉桥中参数共振问题产生的背景. Caetano 等^[5]研究了索梁和索塔的相互作用对斜拉桥地震响应的影响.2001年,赵跃宇^[6-7]建立了一个斜拉桥单梁双索和单梁多索的非线性动力学模型,对索和桥面之间的耦合动力性质进行了描述. Gattulli 等^[8-9]建立了索梁结构的非线性动力学模型,对索与桥面的相互作用进行参数分析.2004年,吉伯海等^[10]将斜拉桥简化为弹簧支承连续梁二维力学模型,对斜拉桥的静力问题进行了求解.另外有许多学者对弹性支承下的多跨连续梁的动力学问题进行了研究,但大多是对弹性地基问题的研究,而同时考虑多跨弹性支承和轴力影响的连续梁的动力学问题还没有见到相关方面的文献.

本文在前人工作的基础上,建立了斜拉桥考虑

拉索索力影响的单梁多索索梁结构二维力学模型,利用哈密尔顿原理建立了单梁多索索梁结构-梁的控制方程,对影响桥面动力学特性的索的刚度、张拉力和桥面裂纹等因素进行了数值分析,得到了一些有意义的结论.

1 单梁多索索梁结构梁的运动方程

斜拉桥常被简化为单梁单索的索梁结构,文献调查表明,由于单梁多索的索梁结构的研究相当复杂,很少有学者进行这方面的研究.如图1a所示斜拉桥,由于斜拉桥中桥面的质量远大于索的质量,为进一步简化研究,忽略拉索振动对桥面梁振动的影响,将拉索对桥面的作用等效为梁加一个弹性支撑和一个轴向压力,这样斜拉桥就简化为如图1b所示的多弹性支承连续梁模型.

图中 $l_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 为索长, $P_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 为索的张拉力, $\theta_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 为索与铅垂方向的夹角, $x_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 为索作用于梁上的位置, $H_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 为 P_i 的水平分力, $H_i = P_i \sin \theta_i$, $K_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 为弹簧的刚度, $K_i = \bar{E}_i \bar{A}_i \cos^2 \theta_i / l_i$, $\bar{E}_i \bar{A}_i$ 为索的刚度, l 为梁的长度, o 为坐标原点.

压杆横向弯曲振动的运动方程为^[11]

$$m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] + N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = p(x, t) \quad (1)$$

2006-12-8 收到第1稿.

*国家自然科学基金资助项目(10502020)

式中 y 为梁随时间变化的挠度 $y(x, t)$, x 为梁的轴向坐标, EI 为弯曲刚度, N 为轴向压力, m 为单位长度梁的质量, p 为分布载荷. 对图 1b 所示带 n 个弹性支承 $K_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 及轴向压力 $H_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 的等截面均质梁, 根据哈密尔顿原理有弯曲自由振动的运动方程:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \left[N + \sum_{i=1}^n H_i \delta(x - x_i) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^n K_i y \delta(x - x_i) \quad (2)$$

$\delta(x - x_i)$ 为 delta 函数, 其定义为

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 1 & (x = x_i) \\ 0 & (x \neq x_i) \end{cases} \quad (3)$$

令 $y(x, t) = \varphi(x)q(t)$ 并代入式(2)有

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) &= 0 \quad (4) \\ \varphi^{(4)} + \frac{N}{EI} \varphi''(x) + \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n H_i \delta(x - x_i) \varphi''(x_i) \\ - \frac{1}{EI} \sum_{i=1}^n K_i \delta(x - x_i) \varphi(x_i) - \frac{m\omega^2}{EI} \varphi(x) &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

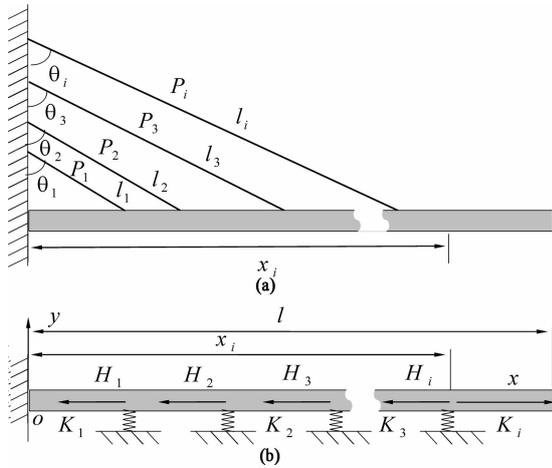


图 1 单梁多索的索梁模型

Fig. 1 Cable-beam model of multi-cables and one girder

2 传递矩阵

对式(5)直接求解相当困难, 下面用传递矩阵法进行求解. 考虑梁上 (x_{i-1}, x_i) 段, 在该段内受有常数轴向力作用. 由此, 将(5)式简化为受有常数轴向力作用梁的横向振动运动方程:

$$\varphi^{(4)} + \frac{N}{EI} \varphi''(x) - m\omega^2 \varphi(x) = 0 \quad (6)$$

令

$$\alpha^4 = \frac{\omega^2 m}{EI}, g^2 = \frac{N}{EI}, \varphi(x) = Be^{rx} \quad (7)$$

则式(6)可写为

$$r^4 + g^2 r^2 - \alpha^4 = 0 \quad (8)$$

上式的四个根为

$$r_{1,2} = \pm i\gamma, r_{3,4} = \pm \lambda$$

式中, γ 和 λ 分别为

$$\begin{cases} \gamma = \sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \frac{g^4}{4}} + \frac{g^2}{2}} \\ \lambda = \sqrt{\sqrt{\alpha^4 + \frac{g^4}{4}} - \frac{g^2}{2}} \end{cases} \quad (9)$$

将上面求得的四个根代入 $\varphi(x) = Be^{rx}$, 并将指数替换为三角函数和双曲函数, 最后可得

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= D_1 \sin\gamma x + D_2 \cos\gamma x + \\ &D_3 \sinh\lambda x + D_4 \cosh\lambda x \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $D_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为四个积分常数, 由边界条件确定. 根据挠度、转角、弯矩和剪力的关系

$$\frac{dy(x)}{dx} = \theta(x), \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}, \frac{d^3 y(x)}{dx^3} = \frac{1}{EI} Q(x)$$

对式(10)分别求一阶导数、二阶导数和三阶导数, 由此可得

$$\begin{aligned} \theta(x) &= D_1 \gamma \cos\gamma x - D_2 \gamma \sin\gamma x + \\ &D_3 \lambda \cosh\lambda x + D_4 \lambda \sinh\lambda x \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= -EI (D_1 \gamma^2 \sin\gamma x + D_2 \gamma^2 \cos\gamma x - \\ &D_3 \lambda^2 \sinh\lambda x - D_4 \lambda^2 \cosh\lambda x) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= -EI (D_1 \gamma^3 \cos\gamma x - D_2 \gamma^3 \sin\gamma x - \\ &D_3 \lambda^3 \cosh\lambda x - D_4 \lambda^3 \sinh\lambda x) \end{aligned} \quad (13)$$

将状态变量和四个积分常数 $D_i (i=1, 2, 3, 4)$ 写成向量形式, 则有

$$t = (\varphi(x) \theta(x) M(x) Q(x))^T, D = (D_1 D_2 D_3 D_4)^T$$

由此式(10)至式(13)可写为

$$t = TD \quad (14)$$

其中 T 为关于已知参数及频率 ω 的 4 阶矩阵

$$T = \begin{bmatrix} \sin\gamma x & \cos\gamma x & \sinh\lambda x & \cosh\lambda x \\ \gamma \cos\gamma x & -\gamma \sin\gamma x & \lambda \cosh\lambda x & \lambda \sinh\lambda x \\ -\gamma^2 EI \sin\gamma x & -\gamma^2 EI \cos\gamma x & \lambda^2 EI \sinh\lambda x & \lambda^2 EI \cosh\lambda x \\ -\gamma^3 EI \cos\gamma x & \gamma^3 EI \sin\gamma x & \lambda^3 EI \cosh\lambda x & \lambda^3 EI \sinh\lambda x \end{bmatrix}$$

梁第一段右端的状态变量可表示为

$$t_1 = T_1 T_0^{-1} t_0 = U_1 t_0 \quad (15)$$

3 点矩阵

在弹性支承 i 处, 如图 2 所示, 该处的变形发生突变. 为反映该处左右两侧突变的特点, 引入一

点矩阵,结点左右状态变量有如下关系

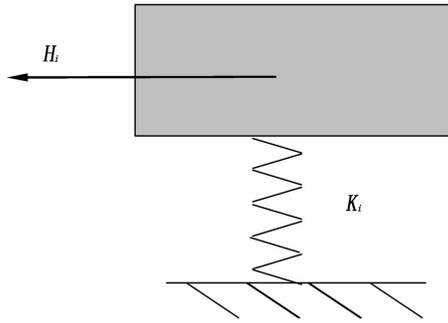


图2 梁结点图

Fig.2 Node of beam

$\varphi^L(x) = \varphi^R(x), \theta^L(x) = \theta^R(x), M^L(x) = M^R(x),$
 $Q^L(x) = Q^R(x) + K_i \varphi^R(x)$, 写成如下的矩阵形式

$$t_i^R = \bar{U}_i t_i^L \quad (16)$$

$$\bar{U}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -K_i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

另外,对于梁中轴力在结点的变化以及各段刚度的变化,可通过各单元给定不同轴力及抗弯刚度等参数进行模拟.

4 单梁多索梁结构梁的传递矩阵法

根据传递矩阵法的原理,梁上任意截面处的状态向量可由下式求出

$$t_i = \bar{U}_i U_i \cdots \bar{U}_k U_k \cdots \bar{U}_1 U_1 t_0$$

如果梁有 $n - 1$ 根索,则将梁分成 n 段,则有

$$t_n = \bar{U}_n U_n \cdots \bar{U}_k U_k \cdots \bar{U}_1 U_1 t_0 = U t_0 \quad (17)$$

其中 U 为总体传递矩阵. 由梁的边界条件,可求得单梁多索的索梁结构的频率值,根据式(17)可求得各阶振型. 梁的边界条件取以下三种:

一端固支一端悬臂:

$$y|_{x=0} = 0, \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=l} = \frac{M(x)}{EI}|_{x=l} = 0, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}|_{x=l} = \frac{Q(x)}{EI}|_{x=l} = 0$$

一端固支一端铰支:

$$y|_{x=0} = 0, \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0$$

$$y|_{x=l} = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=l} = \frac{M(x)}{EI}|_{x=l} = 0$$

两端铰支:

$$y|_{x=0} = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=0} = \frac{M(x)}{EI}|_{x=0} = 0$$

$$y|_{x=l} = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}|_{x=l} = \frac{M(x)}{EI}|_{x=l} = 0$$

注意到在梁两端的状态变量中,各端总有两个为零,设为向量 θ ;而另外两个为未知,设为向量和 S_0 和 S_n ,则由式(15)总可得到包含上面两个未知向量的矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & T_{12} \\ -I & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_n \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

式中, I 为 2 阶单位矩阵, T_{12} 与 T_{22} 均为 2 阶方阵. 令 T_{12} 的行列式为零即可得到考虑拉索力影响的单梁多索梁结构-梁弯曲自由振动的频率方程,用求根的方法可逐一求得各阶固有频率.

5 程序及算例

根据以上推导考虑拉索力影响的单梁多索梁结构梁的弯曲振动方程及传递矩阵法的原理,利用 MATLAB6.5 编制传递矩阵法求解程序. 其流程如图 3 所示.

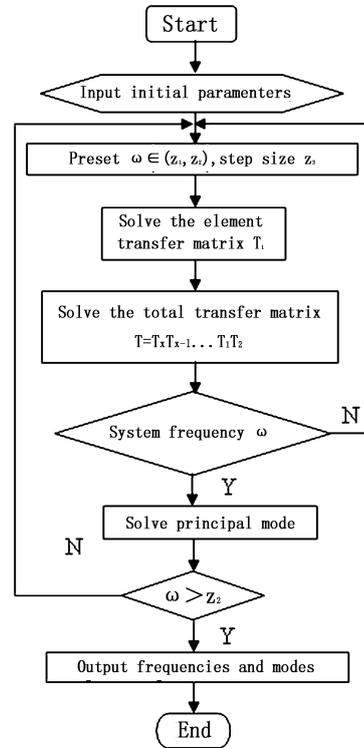


图3 传递矩阵法计算程序流程图

Fig.3 Program of MATLAB for transfer matrix method

算例 1: 如图 4 所示三索等截面梁的索梁结构. x_1, x_2, x_3 和分别为 8 m、16 m、24 m 和 28m, 梁

截面面积为 $A_1 = 8\text{m}^2$, 梁高为 $h = 2\text{m}$, 材料为钢筋混凝土, 弹性模型量取 $E_1 = 3.5 \times 10^{10}\text{ Pa}$, 密度取为 $\rho = 2600\text{ kg/m}^3$. 为简化计算, 索的面积均取为 $A_2 = 0.00465\text{m}^2$, 索的初始张拉力均为 $p = 3205\text{ kN}$, 弹性模量取为 $E_2 = 2.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$, 索的长度 $l_i (i = 1, 2, 3)$ 分别为 12.8 m 、 20 m 、 27.8 m , 与铅垂方向夹角 $\theta_i (i = 1, 2, 3)$ 分别为 51.34° 、 36.87° 、 30.26° .

表 1 中为三索索梁结构 - 梁的固有圆频率 ANSYS 结果与本文结果的对比. 从表中可以看出本文方法计算结果与大型通用有限元软件 ANSYS 所得结果基本一致. 计算分析了轴力作用对梁固有频率的影响, 分析表明, 轴向压力可使固有频率降低, 这与文献 [11] 对受有常数轴向压力作用梁的固有频率分析所得结果一致. 另外, 拉索对梁的支承作用效果非常明显, 有索作用时, 各阶频率都相对增大, 但基频影响最大, 高阶频率影响较小. 本算例仅计算了三索作用, 且梁与索较短, 对于大跨度斜拉桥而言, 索以及索力对梁轴向分力对梁固有频率的影响是相当大的.

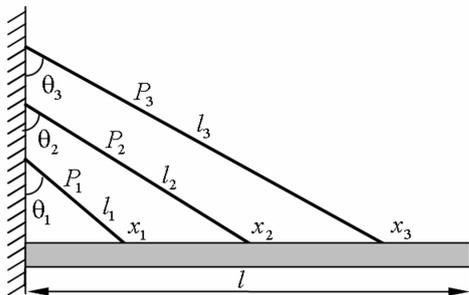


图 4 三索索梁结构

Fig. 4 Cable - beam structure of three cables

表 1 三索索梁结构 - 梁的固有频率 ($2\pi f$)

Table 1 Natural frequency of beam ($2\pi f$)

mode number	results of this study		results of FEM		
	noaxial force	axial force	no cable	no cable	cable
1	13.35	10.65	9.45	9.491	12.48
2	60.65	60.25	59.55	59.13	60.24
3	167.15	166.95	166.8	164.04	164.62

算例 2: 如图 1a 所示, 取 $n = 8$, 为 8 根索作用的索梁结构. 索的弹性模量取为 $E_1 = 2.1 \times 10^{11}\text{ Pa}$, 其它基本参数如表 2 所示, 梁的总长 $l = 72\text{m}$, $EI = 3.1542 \times 10^9\text{ kN}$, 面积 $A_1 = 7.5\text{m}^2$, 密度取 $\rho = 2000\text{ kg/m}^3$. 改变索的数量、面积、弹性模量及梁的截面

面积、高度、弹性模量等参数对梁的固有特性进行研究, 如图 4 到图 7 所示.

表 2 索梁结构 - 索的基本参数

Table 2 Basic parameters of cable - beam structure

NO.	$x_i (\text{m})$	$l_i (\text{m})$	$p_i (\text{kN})$	θ_i	$A_i (\text{m}^2)$
1	8	12.81	513.64	38.66°	0.00465
2	16	20.00	1195.2	53.13°	0.00465
3	24	27.78	1623.9	59.74°	0.00465
4	32	35.78	1907.8	63.43°	0.00465
5	40	43.86	2106.8	65.77°	0.00465
6	48	52.00	2249.4	67.38°	0.00465
7	56	60.17	2351.8	68.55°	0.00465
8	64	68.35	2425.1	69.44°	0.00465

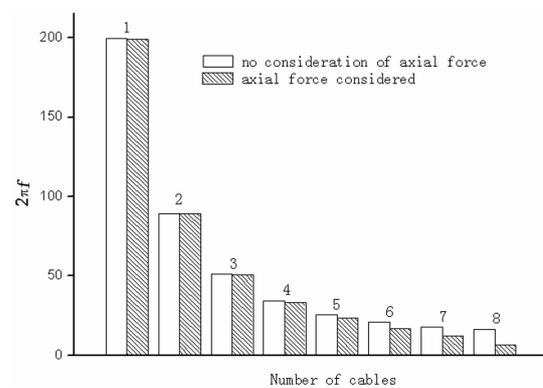


图 5 施工过程中结构的基频

Fig. 5 Natural frequency of structure during construction

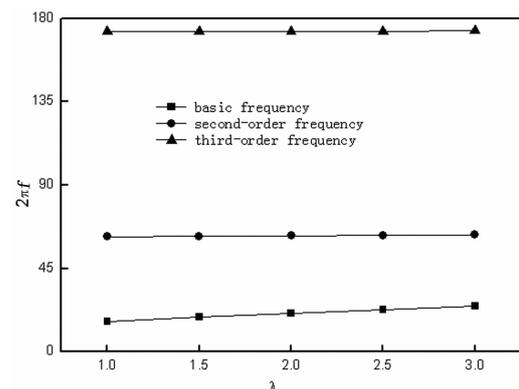


图 6 拉索面积对梁的前 3 阶频率的影响

Fig. 6 Relation between frequency and area of cable

图 5 为模拟斜拉桥施工过程中梁的基频变化图. 从中可以看出施工过程中, 随着梁的不断加长, 结构的刚度不断减小, 并且前期变化速率较大, 到后期变化较小. 轴力对梁的基频的影响与此相反, 后期索力越来越大, 轴力影响越来越明显, 梁的频率

进一步的降低.

图6为改变拉索的面积,而不改变其初始张力时,索对梁的前三阶固有频率的影响,横坐标为拉索面积的比例系数.图中一阶频率的斜率最大,而二阶与三阶频率几乎没有变化,说明随着面积的增加,索对梁的支承刚度加大,使梁的整体刚度增大,而索对高阶频率的影响较小.

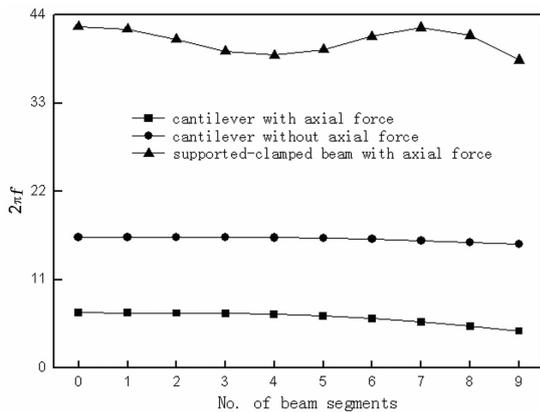


图7 梁截面裂纹对基频的影响

Fig. 7 Relation between frequency and damage of beam

图7表示用梁截面弹性模量减小50%来模拟梁出现裂纹损伤对梁整体刚度的影响图.从图中可以看出,对于一端铰支一端固支梁,在靠近铰支端的一段出现损伤,对梁结构整体刚度的影响最大.而一端固支一端自由的悬臂梁,不考虑轴力作用时,各段的损伤对梁的整体刚度的影响基本一致.当考虑轴力作用后,越靠近自由端的梁段的损伤对结构整体刚度的影响大.说明虽然轴力使梁的整体刚度降低,但对结构的损伤有抑制作用.

图8表示拉索对两种边界条件下梁的固有频率的影响.对于悬臂梁,拆掉靠近固支端的第一根拉索,梁的基频下降最大,其原因在于索对梁的横向支承刚度为 $K_i = \bar{E}_i \bar{A}_i \cos^2 \theta_i / l_i$,第一根索与铅垂方向的夹角最小,索的长度也最小,而截面特性一样,因此这根索对梁的整体刚度的贡献最大.一端固支一端铰支梁,由于铰支使梁的整体刚度增加很大,索对梁的支承作用减小,拆掉一根索对梁的整体刚度基本没有影响.

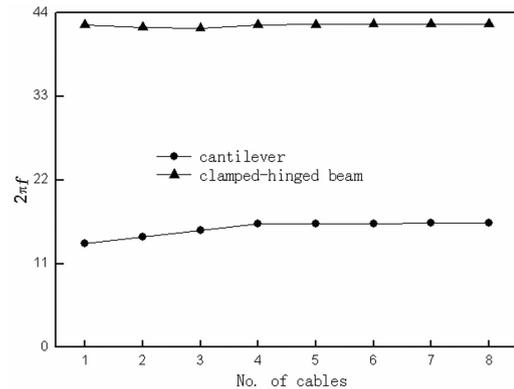


图8 拆索对梁基频的影响

Fig. 8 Relation between frequency and cable

6 结论

本文建立了单梁多索的索梁结构的力学模型和动力学运动方程,考虑了轴向压力对梁的固有频率的影响,并用传递矩阵法对运动方程进行了求解.算例表明,由索产生的轴力对梁的基频有较大的影响,轴力使梁的刚度减小,从而使其基频降低,但对混凝土梁的裂纹损伤有一定的抑制作用;索对梁起到了支承的作用,使梁的刚度增大,从而使梁的基频有较大提高.

本文建立的单梁多索结构-梁的自由振动方程,对研究大跨度斜拉桥索与索力对梁的固有特性的影响提供了有效的手段,具有较高的计算精度和重要的理论意义,可供工程设计计算应用参考.

参 考 文 献

- 1 Karoumi R. Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges. *Computers and structures*, 1999, 71: 397 ~ 412
- 2 Fung R F. Dynamic modeling and vibration analysis of a flexible cable-stayed beam structure. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 254(4): 717 ~ 726
- 3 Gattulli V, Lepidi M, et al. One-to-two global-local interaction in a cable-stayed beam observed through analytical, finite element and experimental models. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2005, 40: 571 ~ 588.

- 4 亢战,钟万勰. 斜拉桥参数共振问题的数值研究. 土木工程学报,1998,31(4):14~22 (Kang Zhan,Zhong Wan-xie. Numerical study on parametric resonance of cable in cable stayed bridge. *China Civil Engineering Journal*, 1998,31(4):14~22(in Chinese))
- 5 Caetano E,Cunha A,Taylor C A. Investigation of dynamic cable-deck interaction in a physical model of a cable-stayed bridge. Part II; seismic response. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*,2000,29(4):499~521
- 6 赵跃宇. 大跨径斜拉桥非线性动力学的模型与理论研究 [博士论文]. 长沙:湖南大学,2000 (Zhao Yueyu. The theoretical model of non-linear dynamic for long-span cable-stayed bridge[PhD Thesis]. Changsha: Hunan University, 2000(in Chinese))
- 7 赵跃宇,蒋丽忠. 索-梁组合结构的动力学建模理论及其内共振分析. 土木工程学报,2004,37(3):69~72 (Zhao Yueyu,Jiang Lizhong,et al. The dynamical modeling theory and internal resonance of cable-beam composite structure. *China Civil Engineering Journal*,2004,37(3):69~72 (in Chinese))
- 8 Gattulli V,Lepidi M. Nonlinear interazioni in the planar dynamics of cable-stayed beam. *International Journal of Solids and Structures*,,2003,40:4729~4748
- 9 Gattulli V,Morandini M,Paolone A. A parametric analytical model for non-linear dynamics in cable-stayed beam. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2002, 31 (6): 1281~1300
- 10 吉伯海,高建明,张杰. 传递矩阵法在钢斜拉桥结构计算中的应用. 东南大学学报(自然科学版),2004,34(6):838~841 (Ji Bohai,Gao Jianming, Zhang Jie. Structural calculation of steel cable-stayed bridges with transfer matrix method. *Journal of Southeast University(Natural Science Edition)*, 2004,34(6):838~841 (in Chinese))
- 11 宋一凡. 公路桥梁动力学. 北京:人民交通出版社,2000 (Song Yifan. Dynamics of Highway and Bridges. Beijing: People's Communication Press,2000(in Chinese))

THEORETICAL CONSIDERATIONS FOR EFFECTS OF CABLES ON DECK OF CABLE – STAYED BRIDGES *

Kang Houjun Zhao Yueyu Wang Lianhua

(Department of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract With the elastic bearing, the model of elastic bending beam was firstly used to simulate the cable and deck of cable – stayed bridge. The dynamic governing equations of beam of multi – cables and one girder composite structure were derived by Hamilton's principle and the free vibration equations of beam with consideration of axial force. In addition, the program for solving the dynamic governing equations was established by transfer matrix method, and the parameters including the number of cable, the axial force and damage of beam were considered in the theoretical investigation. The analysis results indicate that the stiffness of beam descends with the increasing of the length and the axial force of beam on the construction. On the contrary, the axial force is useful for rejecting stiffness decending due to the crack. Therefore, the effects of the force of cable on dynamic behaviors of the deck should be taken into account on the erection of bridge.

Key words cable, elastic bearing, cable – beam, dynamical modelling theory, transfer matrix method, vibration

Received 8 December 2006.

* The project supported by the National Science Foundation of China(10502020)