第 5 卷第 1 期 2007 年 3 月
1672-6553/2007/05(1)/030-4
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 5 No. 1
Mar. 2007

碰摩转子映射系统的非线性反馈混沌控制

梁海花[1] 郑伟峰[2]

(1. 广东海洋大学理学院数学系,湛江 524088)(2. 广东海洋大学工程学院机械系,湛江 524088)

摘要 采用不连续穿越映射技术,Jeffcott 碰摩转子系统的映射在擦边碰撞附近可以近似为在一个方向上有平方根伸缩的四维映射,本文对此映射的动力学行为进行了研究,而且发现了有大量的混沌现象存在. 采用非线性反馈混沌控制方法,通过选取合适的控制增益参数,可将碰摩转子映射系统的混沌运动控制到有规则的擦边周期 1 轨道和单点碰摩周期 2 轨道. 数值模拟证实了分析结果.

关键词 转子系统,碰摩,擦边,混沌控制,非线性反馈控制,单碰周期运动,数值模拟

引 言

自从 1990 年 OGY 混沌控制方法问世后,在很多领域都出现了混沌控制热,但对转子碰摩中的混沌进行控制的文章还比较鲜见. 张思进[1]等将转子的碰摩映射在擦边轨道附近进行局部化,通过实验数据拟合局部映射,采用变量延迟反馈控制法对该系统进行控制. 通过选取合适的控制增益,将转子的碰摩运动镇定到周期 1 擦边轨道上,实现了对混沌运动的控制. 由于碰摩转子系统是非光滑的,它在擦边轨道上无法按照通常方法作线性化,因而也就不能将 OGY 控制法直接应用到碰摩转子系统. 本文采用的非线性反馈控制与延时反馈控制相比较有以下优点:控制目标明确,解决了多重稳定解的问题,系统被镇定的轨道就是当前参数下的不稳定轨道;反馈增益容易确定,反馈增益的取值范围较大,实现了系统的大范围可控性;可在任意时刻给系统施加控制,系统从混沌状态到达稳定状态的速度很快.

1 碰摩转子映射系统的混沌运动

基于很强实际背景的 Jeffcott 转子模型在假定边界固定且完全坚硬的情形下,采用不连续穿越映射(discontinuity bypass mapping)技术,周期系统轨线的 poincare 映射在擦边(grazing)碰撞附近可以近似为在一个方向上有收缩的四维映射[3]:

$$P(z)=\begin{cases}\sqrt{-2A_g\eta z}L\xi+Lz,\eta z\le 0\\ Lz,\eta z>0\end{cases}\qquad(1)$$

$\eta z<0$ 的点集为碰撞区点集;$\eta z>0$ 的点集为非碰撞区点集;$\eta z=0$ 的点集为擦边点集. 假设映射存在稳定的碰撞周期解,为使映射的稳定周期解继续对应零点,映射可变换为:

$$P(z)=\begin{cases}\sqrt{-2A_g(d-\eta z)}L\xi+Lz,\eta z\le d\\ Lz,\eta z>d\end{cases}\qquad(2)$$

其中 d(擦边运动的转子到 Poincare 截面的最短距离),A_g(径向加速度)均为正实数,$\eta=(0,-2\delta,0,0)^T$(δ 为转子与定子的间隙),$z=(x,y,\dot{x},\dot{y})^T$($x,\dot{x}$ 为径向位移与速度,$y,\dot{y}$ 为法向位移与速度,$x^2+y^2\le\delta$),$\xi=(0,0,(1+\alpha)\mu,-(1+\alpha))^T$($\alpha,\mu$ 分别表示恢复系数和摩擦系数),矩阵 L 的形式为:

$$L=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2\\ \lambda_3 & 0 & \lambda_4 & 0\\ 0 & \lambda_3 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix},(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \text{ 为常数}).$$

$\eta z<d$ 的点集为碰撞区点集;$\eta z>d$ 的点集为非碰撞区点集;$\eta z=d$ 的点集为擦边点集.

式(2)的展开形式为:

$$\begin{cases}x_{n+1}=\lambda_2(1+\alpha)\mu\sqrt{2A_g(d+2\delta y_n)}+\lambda_1x_n+\lambda_2\dot{x}_n\\ y_{n+1}=-\lambda_2(1+\alpha)\sqrt{2A_g(d+2\delta y_n)}+\lambda_1y_n+\lambda_2\dot{y}_n\\ \dot{x}_{n+1}=\lambda_4(1+\alpha)\mu\sqrt{2A_g(d+2\delta y_n)}+\lambda_3x_n+\lambda_4\dot{x}_n\\ \dot{y}_{n+1}=-\lambda_4(1+\alpha)\sqrt{2A_g(d+2\delta y_n)}+\lambda_3y_n+\lambda_4\dot{y}_n\end{cases}$$

$$(-2\delta y_n\le d)\qquad(3)$$

和

2006-09-04 收到第 1 稿,2006-10-06 收到修改稿.

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda_1 x_n + \lambda_2 \dot{x}_n \\ y_{n+1} = \lambda_1 y_n + \lambda_2 \dot{y}_n \\ \dot{x}_{n+1} = \lambda_3 x_n + \lambda_4 \dot{x}_n \\ \dot{y}_{n+1} = \lambda_3 y_n + \lambda_4 \dot{y}_n \end{cases} \quad (-2\delta y_n > d) \qquad (4)$$

假如矩阵 L 的特征值均位于单位圆内,那么从非碰摩区出发的点将向 $z=0$ 靠近,也即经过系统(4)的有限次迭代(包括 0 次)后必将回到碰摩区.因此只要矩阵 L 的特征值均位于单位圆内,那么从 z 平面出发的任意点经映射系统(3)、(4)迭代后……必将回到碰摩区,由以上分析可得:

定理　设映射系统(3)、(4)的参数($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$)满足$(\lambda_1-1)^2(\lambda_4-1)^2 \neq \lambda_2^2\lambda_3^2$,映射系统(3)在 z^* 处的 Jacobi 矩阵的特征值均小于 1(其中 z^* 是映射系统(3)的唯一不动点),且 L 的特征值均位于单位圆内,则映射系统(3)、(4)将稳定到碰撞周期 1 轨道,也即不动点 z^* 是稳定的,并且不动点 z^* 的吸引域为整个 z 平面.

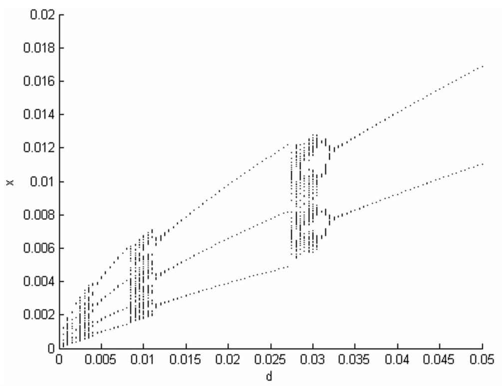

图 1　随参数变化的分岔图

Fig. 1　Bifurcation diagram of as the parameter varies

对此定理进行分析:参数($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$)满足$(\lambda_1-1)^2(\lambda_4-1)^2 \neq \lambda_2^2\lambda_3^2$ 代表 $z=0$ 是映射系统(4)的唯一不动点(不考虑($-2\delta y_n > d$)这个条件时),又有的 L 特征值均位于单位圆内这个条件,所以从非碰摩出发的点必将向 $z=0$ 这一点靠近,也即从非碰摩区出发的点经过有限次迭代后必回到碰摩区;而在碰摩区内有稳定的唯一不动点 z^*,因此系统将逐渐靠近不动点 z^*,即使它进入了非碰摩区,但经过有限次迭代后还是要回到碰摩区的;所以映射系统(3)、(4)最后必将稳定到碰撞周期 1 轨道.

随着参数 d 的变化,映射系统(3)、(4)将发生擦边分岔现象,不妨令

($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$) = (0.2, 0.1, 0.3, 0.5), $\delta=1$, $\alpha=0.5$, $\mu=0.6$, $A_g=1/2$,当分岔参数 d 从 0 增到 0.05 时,映射系统将会出现混沌现象(见图 1).

从分岔图可看出,映射存在着逆无限周期递增这种典型的擦边分岔现象,中间夹有宽度不等的混沌带.由于转子系统中混沌现象的破坏性,因此有必要研究此映射系统的混沌控制问题.

2　擦边周期 1 轨道的镇定

在擦边轨道附近,系统可以简化为映射(1).要实现擦边周期 1 轨道的镇定,可采用非线性反馈控制器:$u=(k_1x_n, k_2y_n, k_3\dot{x}_n, k_4\dot{y}_n)^T$.显然,$z=0$ 仍为受控系统的不动点,但映射(5)在 $z=0$ 处的 Jacobi 矩阵不存在,要使系统的擦边周期 1 轨道稳定,序列(x_n, y_n, $\dot{x}_n$, $\dot{y}_n$)必须收敛于(0,0,0,0)点.由序列的收敛的比值判别法可知系统必须满足:$|x_{n+1}/x_n|<1$, $|y_{n+1}/y_n|<1$, $|\dot{x}_{n+1}/\dot{x}_n|<1$, $|\dot{y}_{n+1}/\dot{y}_n|<1$,假设转子在碰摩区内运动,下面确定控制增益参数.

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda_2(1+\alpha)\mu\sqrt{4A_g\delta y_n} + \lambda_1 x_n + \lambda_2\dot{x}_n + k_1x_n \\ y_{n+1} = -\lambda_2(1+\alpha)\sqrt{4A_g\delta y_n} + \lambda_1 y_n + \lambda_2\dot{y}_n + k_2y_n \\ \dot{x}_{n+1} = \lambda_4(1+\alpha)\mu\sqrt{4A_g\delta y_n} + \lambda_3 x_n + \lambda_4\dot{x}_n + k_3\dot{x}_n \\ \dot{y}_{n+1} = -\lambda_4(1+\alpha)\sqrt{4A_g\delta y_n} + \lambda_3 y_n + \lambda_4\dot{y}_n + k_4\dot{y}_n \end{cases}$$
$$(y_n \geq 0) \qquad (5)$$

系统(5)的收敛条件可以变形为:

$$\begin{cases} |\lambda_2(1+\alpha)\mu\sqrt{4A_g\delta}\sqrt{y_n}/x_n + \lambda_1 + k_1 + \lambda_2\dot{x}_n/x_n| < 1 \\ |-\lambda_2(1+\alpha)\sqrt{4A_g\delta}\sqrt{y_n}/y_n + \lambda_1 + k_2 + \lambda_2\dot{y}_n/y_n| < 1 \\ |\lambda_4(1+\alpha)\mu\sqrt{4A_g\delta}\sqrt{y_n}/\dot{x}_n + \lambda_3 x_n/\dot{x}_n + \lambda_4 + k_3| < 1 \\ |-\lambda_4(1+\alpha)\sqrt{4A_g\delta}\sqrt{y_n}/\dot{y}_n + \lambda_3 y_n/\dot{y}_n + \lambda_4 + k_4| < 1 \end{cases}$$
$$(y_n \geq 0) \qquad (6)$$

将不等式组(6)的第三式两边同乘以$|\dot{x}_n/x_n|$,第四式的两边同时乘以$|\dot{y}_n/y_n|$,则不等式组可以变形为:

$$\begin{cases} |\lambda_2(1+\alpha)\mu\sqrt{4A_g\delta}\sqrt{y_n}/x_n + \lambda_1 + k_1 + \lambda_2\dot{x}_n/x_n| < 1 \\ |-\lambda_2(1+\alpha)\sqrt{4A_g\delta}\sqrt{y_n}/y_n + \lambda_1 + k_2 + \lambda_2\dot{y}_n/y_n| < 1 \\ |\lambda_4(1+\alpha)\mu\sqrt{4A_g\delta}\sqrt{y_n}/x_n + \lambda_3 + (\lambda_4+k_3)\dot{x}_n/x_n| < |\dot{x}_n/x_n| \\ |-\lambda_4(1+\alpha)\sqrt{4A_g\delta}\sqrt{y_n}/y_n + \lambda_3 + (\lambda_4+k_4)\dot{y}_n/y_n| < |\dot{y}_n/y_n| \end{cases}$$
$$(y_n \geq 0) \qquad (7)$$

下面分两步求满足条件的 k_1, k_2, k_3, k_4:

第一步:先考虑式(7)的第二式与第四式.在这里假设 $\lambda_2>0$,此时式(7)的第二式可变形为:

$$\begin{cases} (\lambda_1+k_2-1)y_n - \lambda_2(1+\alpha)\sqrt{4A_g\delta}\sqrt{y_n} + \lambda_2\dot{y}_n < 0 \\ (\lambda_1+k_2+1)y_n - \lambda_2(1+\alpha)\sqrt{4A_g\delta}\sqrt{y_n} + \lambda_2\dot{y}_n > 0 \end{cases} \qquad (8)$$

对于任意的 $\dot{y}_n$，当$\begin{cases}\lambda_1+k_2-1\le 0\\ \lambda_1+k_2+1\ge 0\end{cases}$成立时，式(8)对于 y_n 恒有公共解，此时 k_2 的取值范围为：$-1-\lambda_1\le k_2\le 1-\lambda_1$. 在假设 $\lambda_3<0,\lambda_4>0$ 的前提下根据式(7)的第四式同样可确定 k_4 的取值范围为 $-1-\lambda_4\le k_4\le 1-\lambda_4$.

第二步：当 k_2,k_4 满足上述条件时，考虑在擦边轨道附近 $(y_n,\dot{y}_n)\approx(0,0)$，受控系统(5)可近似为：$\begin{cases}x_{n+1}=\lambda_1x_n+\lambda_2\dot{x}_n+k_1x_n\\ \dot{x}_{n+1}=\lambda_3x_n+\lambda_4\dot{x}_n+k_3\dot{x}_n\end{cases}$，$k_1,k_3$ 的取值使此式在(0,0)处的 Jacobi 矩阵的特征值小于 1.

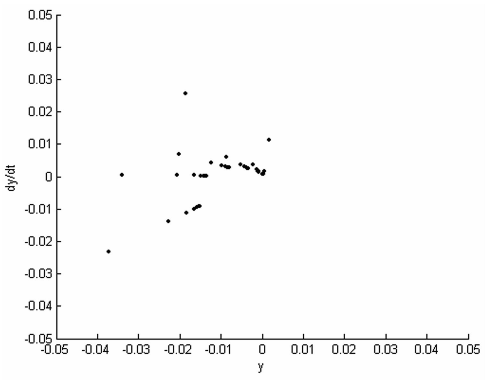

图 2　未受控系统混沌运动的数值模拟结果

Fig. 2　The numerical simulation of non-control systems

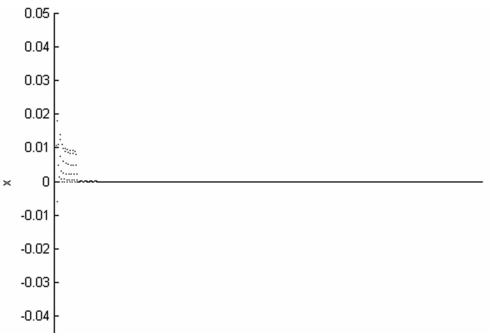

图 3　受控系统的稳定到擦边周期 1 轨道的数值模拟结果

Fig. 3　x_n of control systems is stabilized into the grazing period-1 orbit

作为例子，取参数 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0.6,0.5,-0.2,0.3)$，$\delta=1,\alpha=0.5,\mu=0.6,A_g=1/2$ 为例，图 2 是未受控系统的相图 $(y_n,\dot{y}_n)$. 当取控制增益参数 $k_1=k_3=k_4=0,k_2=0.5$，系统很容易被控制到了擦边周期 1 轨道.（见图 3）

3　单碰周期 2 轨道的镇定

以 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(0.2,0.1,0.3,0.5)$，$\delta=1,\alpha=0.5,\mu=0.6,A_g=1/2$ 为例来进行单点碰摩周期 2 轨道的镇定. 当 $d=0.03$，初值为 $z_0=(0.1,0.1,0.1,0.1)^T$ 时，对该映射系统进行 5000 次迭代后，从相图 $(y_n,\dot{y}_n)$ 可看出映射系统(3)、(4)处于混沌运动状态（见图 4）.

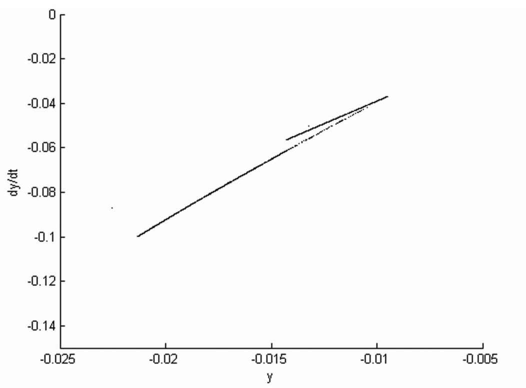

图 4　未受控映射系统混沌运动的数值模拟结果

Fig. 4　The numerical simulation of chaotic motions of non-control systems

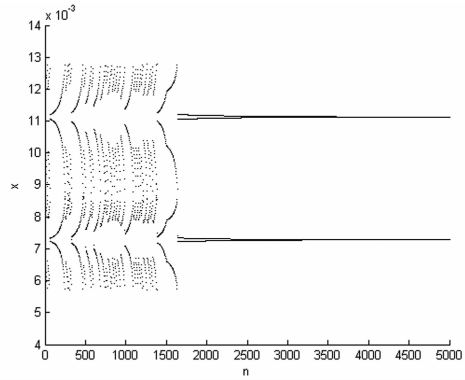

图 5　受控系统的稳定到单点碰摩周期 2 轨道的数值模拟结果

Fig. 5　x_n of control systems is stabilized into the single impact period-2 orbit

为使系统的单碰周期 2 轨道

$$\begin{cases}z_1^*=(0.00728182,-0.0121355,0.0286154,-0.0476924)^T\\ z_2^*=(0.01113,-0.0185499,0.0505529,-0.0842548)^T\end{cases}$$

得到镇定，采用以下的延时反馈控制器：$u=(k(x_n-0.00728182)(x_n-0.01113),k(y_n+0.0121355)(y_n+0.0185499),0,0)^T$，此控制器不会改变原系统的周期 2 轨道. 此时受控系统为：

$$\begin{cases}x_{n+1}=0.09\sqrt{0.03+2y_n}+0.2x_n+0.1\dot{x}_n+\\ \qquad k(x_n-0.00728182)(x_n-0.01113)\\ y_{n+1}=-0.15\sqrt{0.03+2y_n}+0.2y_n+0.1\dot{y}_n+\\ \qquad k(y_n+0.0121355)(y_n+0.0185499)\\ \dot{x}_{n+1}=0.45\sqrt{0.03+2y_n}+0.3x_n+0.5\dot{x}_n\\ \dot{y}_{n+1}=-0.75\sqrt{0.03+2y_n}+0.3y_n+0.5\dot{y}_n\end{cases}$$

$$(-2y_n\le 0.03)\tag{9}$$

和

$$\begin{cases} x_{n+1}=0.2x_n+0.1\dot{x}_n+k(x_n-0.00728182)(x_n-0.01113) \\ y_{n+1}=0.2y_n+0.1\dot{y}_n+k(y_n+0.0121355)(y_n+0.0185499) \\ \dot{x}_{n+1}=0.3x_n+0.5\dot{x}_n \\ \dot{y}_{n+1}=0.3y_n+0.5\dot{y}_n \end{cases}$$
$$(-2y_n>0.03) \tag{10}$$

下面确定控制增益参数的取值，k 的取值要满足使 z_1^*(z_2^*)成为映射($x_n, y_n, \dot{x}_n, \dot{y}_n$)→($x_{n+2}, y_{n+2}, \dot{x}_{n+2}, \dot{y}_{n+2}$)的稳定不动点,即在 z_1^*(z_2^*)处的 Jacobi 矩阵的特征值均小于 1. 由此可得 k 的有效取值范围为[2.570, +∞). 当 $k=2.8$,初值为 $z_0=(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)^T$,对未受控系统进行 4000 次迭代后加入控制器,系统很快就被控制到单碰周期 2 轨道(见图 5).

4　结论

本文采用非线性反馈混沌控制方法,通过选取合适的控制增益参数,可将碰摩转子映射系统的混沌运动控制到有规则的擦边周期 1 轨道和单点碰摩周期 2 轨道,同时用数值模拟证实了分析结果. 这样就避免了碰摩转子映射系统无规则的碰摩运动,提高了碰摩转子系统的使用寿命,因此这是一种有效的碰摩控制途径.

参　考　文　献

1　张思进,陆启韶,王士敏. 碰摩转子映射系统的延迟反馈混沌控制. 固体力学学报,2001,22(1):89～94(Zhang Sijin, Lu Qishao. Delayed feedback control of chaos in rubimpact rotor mapping systems. *Acta Solide Mech Sinica*, 2001, 22(1):89～94 (in Chinese))

2　乐源,谢建华,丁旺才. 一类两自由度碰撞振动系统的 Hopf 分岔和混沌. 动力学与控制学报,2004,2(3):36～41(Le yuan, Xie Jianhua, Ding Wangcai. Hopf bifurcation and chaos of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3):36～41(in Chinese))

3　吴宪芳,唐云,诸福磊. 转子系统碰擦分岔的复杂性. 清华大学学报(自然科学学报),1999,39(10):112～115(Wu Xianfang, Tang Yun, Chu Fulei. Complexity of grazing bifurcations in rotor systems. *Journal of Tsinghua University(Science and Technology)*, 1999, 39(10):112～115 (in Chinese))

4　林梅,丁旺才,武俊虎. 两点碰撞振动系统的周期运动与分叉. 动力学与控制学报,2006,4(1):16～21 (Lin Mei, Ding Wangcai, Wu Junhu. Periodic motion and bifurcation of a vibro-impact system with two motion limiting constraints. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1):16～21 (in Chinese))

5　韩维,胡海岩,金栋平,侯志强. 双摆与单侧刚性约束面之间的斜碰撞振动. 动力学与控制学报,2004,2(3): 24～30(Han Wei, Hu Haiyan, Jin Dongping, Hou Zhiqiang. the Oblique-impact Vibration of a Double Compound Pendulum with the End Displacement Limit. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3):24～30 (in Chinese))

NONLINEAR FEEDBACK CONTROL OF CHAOS IN RUB－IMPACT ROTOR MAPPING SYSTEMS

Liang Haihua　Zheng Weifeng

(*Guangdong ocean university, Zhanjiang*　524088, *China*)

Abstract　Adopting the method of discontinuity bypass mapping, the Poincare mapping of Jeffcott model near a grazing orbit was estimated as a four-dimensional mapping with square-root compressing or stretching at one direction, from which many chaos motions were found by researching the mapping. The nonlinear feedback chaos control method was adopted for the four-dimensional piecewise-smooth rub-impact rotor mapping systems. The rub-impact motions were stabilized into the grazing period-1 motion or single rub-impact period-2 motion by choosing the gain of control properly. The numerical simulation verified the analysis.

Key words　rotor system,　rub-impact,　grazing,　control of chaos,　nonlinear feedback control,　single impact periodic motion,　numerical simulation

Received 4 September2006, revised 6 October 2006.