第 5 卷第 1 期 2007 年 3 月
1672-6553/2007/05(1)/027-3
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 5 No. 1
Mar. 2007

混合 Cable－Mass 动力系统的一致稳定性*

呼青英　张宏伟

（河南工业大学理学院，郑州　450052）

摘要　讨论了混合 Cable－Mass 动力系统的一致稳定性. 该混合非线性分布参数系统描述一端固定，另一端粘附有质量块的振动电缆系统，该质量块由一弹簧悬挂着，且受外力扰动. 在非线性耗散边界函数为多项式的假设下，利用 Nakao 不等式得到了该反馈系统的能量衰减率.

关键词　混合 Cable－Mass 动力系统，一致稳定性，Nakao 不等式

引 言

本文讨论如下自由端粘附有质量块的混合 Cable－Mass 动力系统

$$u_{tt}=u_{xx}+u_{xxt},0<x<1,t>0 \tag{1}$$

$$u(0,t)=0,t>0 \tag{2}$$

$$u_x(1,t)+u_{xt}(1,t)+u_{tt}(1,t)=au_t(1,t)+b|u_t(1,t)|^p u_t(1,t),t>0 \tag{3}$$

$$u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),0<x<1 \tag{4}$$

的一致稳定性，其中 $u(x,t)$ 表示电缆在位置 x 和时刻 t 时，$0\le t\le T$ 时的位移，$u_0(x)$ 和 $u_1(x)$ 表示初始状态. 为了简单起见，这里波速和电缆长度都取为 1，下标的字母表示对该变量偏导数，$a,b,p\ge 0$ 是常数.

系统(1)－(4)是由 Nayfeh 等首先在[1]中作为非线性分布参数系统的一个简单例子提出的，它描述的是一端固定，而另一端粘附有质量块的振动电缆系统，该质量块由一弹簧悬挂着，且受外力扰动. 该系统具有许多集中参数系统不具备的性质，而具有偏微分方程所控制的动力系统的非线性性质. Burns 和 King[2] 给出了如(1)－(4)的具体动力系统形式，得到了该系统反馈算子的积分表示. 文献[3,4]用不同的方法给出了该系统解的存在唯一性，Morgul[5] 和 Lee 等[6] 在 $b=0$ 和缺少项 u_{xxt} 时指出该系统强稳定但不一致稳定.

本文利用 Nakao 不等式[7]得到了该反馈系统的一致稳定性. 该方法不同于文献[5]和[8]中的方法. 本文第一部分给出一些基本概念和符号，第二部分给出主要结果和证明.

1　预备知识

本文始终记

$$(u,v)(t)=\int_0^1 u(x,t)v(x,t)\mathrm{d}x,\ \|u(t)\|^2=(u,u)(t)$$

用 $H^m(0,1)$ 记通常的 Sobolev 空间，$V=\{u\in H^1(0,1):u(0)=0\}$，$\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(0,1)$ 空间的范数（详细见[8]），记 $\|\cdot\|_2=\|\cdot\|$.

引理 2.1[7] 设 $\phi:R^+\to R$ 是非负有界函数，且存在正常数 $k>0$ 使得

$$\sup_{t\le r\le t+1}\phi(t)\le k(\phi(t)-\phi(t+1))$$

则存在正常数 C 和 θ 使得

$$\phi(t)\le C\exp(-\theta t),t\ge 0$$

假设 $u_0,u_1\in V$. 问题(1)－(4)的弱解 u 是指 $u,u_t\in V$，且对任意 $v\in V$.

$$(u_{tt},v)+(u_x,v_x)+(u_{xt},v_x)+u_{tt}(1,t)v(1)+au_t(1,t)v(1)+b|u_t(1,t)|^p u_t(1,t)v(1)=0 \tag{5}$$

系统(1)－(4)的能量定义为

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|u_x\|^2+\frac{1}{2}u_t^2(1,t)$$

且

$$E'(t)+\|u_{xt}\|^2+au_t^2(1,t)+b|u_t(1,t)|^{p+2}=0 \tag{6}$$

即

$$E(t)-E(0)+\int_0^t[\|u_{xs}(s)\|^2+au_s^2(1,s)+b|u_s(1,s)|^{p+2}]\mathrm{d}s=0 \tag{7}$$

2006-05-22 收到第 1 稿，2006-09-22 收到修改稿.

* 国家自然科学基金(10371111)，河南省自然科学基金(0611053300)和教育厅(200510463024)及河南省高校青年骨干教师基金资助

其中

$$E(0)=\frac{1}{2}\|u_1\|^2+\frac{1}{2}\|u_{0x}\|^2+\frac{1}{2}u_1^2(1)$$

从而得 $E(t)>0$ 且 $E(t)$ 非增.

2 一致稳定性

定理 3.1 设 $u(x,t)$ 是系统(1)－(4)的解. 则存在正常数 λ,K 使得

$$E(t)\le K\exp(-\lambda t),t\ge 0$$

证明 (6)式两边从 t 到 $t+1$ 积分，得

$$\int_0^{t+1}[\|u_{xs}(s)\|^2+au_s^2(1,s)+b|u_s(1,s)|^{p+2}]\mathrm{d}s=E(t)-E(t+1)=D^2(t) \quad (8)$$

对(8)式左边运用中值定理，则存在两点 $t_1\in[t,t+\frac{1}{4}]$ 和 $t_2\in[t+\frac{3}{4},t+1]$ 使得

$$\|u_{xt}(t_i)\|^2\le CD^2(t),i=1,2 \quad (9)$$

这里和以后 C 表示正常数. 方程 (1) 两边同乘 $u(x,t)$ 并在 $[t_1,t_2]\times[0,1]$ 上积分有

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u_x\|^2\mathrm{d}s=-\int_{t_1}^{t_2}\{(u_{ss},u)(s)+(u_{xs},u_x)(s)+u_{ss}(1,s)u(1,s)+au_s(1,s)u(1,s)+b|u_s(1,s)|^p\times u_s(1,s)u(1,s)\}\mathrm{d}s=-(u_t,u)(s)|_{s=t_i}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\|u_s(s)\|^2\mathrm{d}s-\int_{t_1}^{t_2}(u_{xs},u_x)(s)\mathrm{d}s-\int_{t_1}^{t_2}[u_{ss}(1,s)u(1,s)+au_s(1,s)u(1,s)+b|u_s(1,s)|^pu_s(1,s)u(1,s)]\mathrm{d}s\le\sum_{i=1}^{2}\|u_t(t_i)\|\|u(t_i)\|+\int_{t_1}^{t_2}\|u_s(s)\|^2\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}\|u_x(s)\|\|u_{xs}(s)\|\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{2}|u_t(1,t_i)||u(1,t_i)|+\int_{t_1}^{t_2}u_s^2(1,s)\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}[au_s(1,s)+b|u_s(1,s)|^{p+1}]|u(1,s)|\mathrm{d}s \quad (10)$$

下面,我们估计(10)的右边项. 因为 $u(0,t)=0$,则

$$\|u(t)\|\le C\|u_x(t)\|,\|u_t(t)\|\le C\|u_{xt}(t)\| \quad (11)$$

利用(9)，(11) 和 Young 不等式得

$$I_1=\sum_{i=1}^{2}\|u_t(t_i)\|\|u(t_i)\|\le CD(t)\sum_{i=1}^{2}\|u_x(t_i)\|\le\varepsilon E(t)+C(\varepsilon)D^2(t) \quad (12)$$

根据(8)和(11)得

$$I_2=\int_{t_1}^{t_2}\|u_s(s)\|^2\mathrm{d}s\le C\int_{t_1}^{t_2}\|u_{xs}(s)\|^2\mathrm{d}s\le CD^2(t) \quad (13)$$

注意到由(11)

$$|u(1,t_i)|^2\le\|u_x(t_i)\|^2\le CE(t) \quad (14)$$

$$|u_t(1,t_i)|^2\le\|u_{xt}(t_i)\|^2\le CD^2(t) \quad (15)$$

根据(8)，(11)和 Young 不等式得

$$I_3=\sum_{i=1}^{2}|u_t(1,t_i)||u(1,t_i)|+\int_{t_1}^{t_2}u_s^2(1,s)\mathrm{d}s\le E^{1/2}(t)D(t)+C\int_{t_1}^{t_2}\|u_{xs}(s)\|^2\mathrm{d}s\le\varepsilon E(t)+C(\varepsilon)D^2(t) \quad (16)$$

再用 *Young* 不等式得

$$I_4=\int_{t_1}^{t_2}\|u_x(s)\|\|u_{xs}(s)\|\mathrm{d}s\le\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\|u_x(s)\|^2\mathrm{d}s+C(\varepsilon)\int_{t_1}^{t_2}\|u_{xs}(s)\|^2\mathrm{d}s\le\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\|u_x(s)\|^2\mathrm{d}s+C(\varepsilon)D^2(t) \quad (17)$$

再次根据(8)，(11)和 Young 不等式得，对充分小的 $\varepsilon_2>0$

$$I_5=\int_{t_1}^{t_2}[a|u_s(1,s)u(1,s)|+b|u_s(1,s)|^{p+1}u(1,s)]\mathrm{d}s\le\int_{t_1}^{t_2}[C(\varepsilon)|u_s(1,s)|^2+\varepsilon|u(1,s)|^2+C(\varepsilon)|u_s(1,s)|^{p+2}+\varepsilon|u(1,s)|^{p+2}]\mathrm{d}s\le C(\varepsilon)D^2(t)+\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}[|u^2(1,s)|+|u(1,s)|^{p+2}]\mathrm{d}s\le C(\varepsilon)D^2(t)+\varepsilon\int_{t_1}^{t_2}[\|u_x(s)\|^2+\|u_x(s)\|^{p+2}]\mathrm{d}s\le C(\varepsilon)D^2(t)+\varepsilon(1+E^{p/2}(0))\int_{t_1}^{t_2}\|u_x\|^2\mathrm{d}s \quad (18)$$

把(12),(13),(16)－(18)代入到(10) 并选取 $\varepsilon>0$ 充分小得

$$\int_{t_1}^{t_2}\|u_x\|^2\mathrm{d}s\le\varepsilon E(t)+C(\varepsilon)D^2(t) \quad (19)$$

从而(19)结合(13)和(16)有

$$\int_{t_1}^{t_2}E(s)\mathrm{d}s\le\varepsilon E(t)+C(\varepsilon)D^2(t) \quad (20)$$

由中值定理,选取 $t_3\in[t_1,t_2]$ 使得

$$E(t_3)\le C\int_{t_1}^{t_2}E(s)\mathrm{d}s$$

对(6)式从 t 到 t_3 积分得

$$E(t)=E(t_3)+\int_{t_1}^{t_3}[\|u_{xs}(s)\|^2+au_s^2(1,s)+b|u_s(1,s)|^{p+2}]\mathrm{d}s\le C\int_{t_1}^{t_2}E(s)\mathrm{d}s+CD^2(t)\le\varepsilon E(t)+C(\varepsilon)D^2(t) \quad (21)$$

这里 ε 是任意正数. 因为 $E(t)$ 非增,可得 $E(t)=\sup_{t\le r\le t+1}E(s)$. 则对充分小的 ε 有

$$\sup_{t\le r\le t+1}E(s)\le C(E(t)-E(t+1)) \quad (22)$$

然后,应用引理 2.1, 由(22)得能量衰减

$$E(t) \le K\exp(-\lambda t), t \ge 0.$$ 证毕.

3　结论

定理 3.1 表明对 Cable - Mass 系统只要适当选取反馈控制律可以保证一致稳定.

参　考　文　献

1 Nayfeh HA, Nayfeh JF, Mook DT. On Methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, 1992, 3(1): 145 ~ 162

2 Burns JA, King BB. Optimal sensor location for robust Control of distributes parameter systems. Proceeding of the 33rd IEEE Control and Decision Conference, Florida, 1994: 3967 ~ 3972

3 Ackleh AS, Banks HT, Pinter GA. Well-posedness for models of Elastomers. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, 268(2): 440 ~ 456

4 Andrews KT, Kuttler KL, Shillor M. Second order evolution equations with dynamic boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, 197(4): 781 ~ 795

5 Morgul O, Rao BP, Conrad F. On the stabilization of a cable with a tip mass. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(10): 2140 ~ 2145

6 Lee EB, You YC. Stabilization of a hybrid (string/point mass) system. Proceding Fifth International Conference System Engering, Dayton, Ohio, 1987: 221 ~ 228

7 Nakao M. Energy decay for the quasilinear wave equation with viscosity. *Mathematische Zeitschrift*, 1995, 219: 289 ~ 299

8 Lions JL. Optimal Control of Systems Gonvered by Partial Differential Equations. Berlin, Heidelberg: Springer-Verleg, 1971

ON THE UNIFORM STABILITY OF A HYBRID CABLE - MASS SYSTEM *

Hu Qingying　Zhang Hongwei

(*College of Science*, *Henan University of Technology*, *Zhengzhou*　450052, *China*)

Abstract　This paper studied the uniform stability of a cable - mass system. The hybrid nonlinear distributed parameter system described a cable with one end fixed and with a mass attached at the other end. The mass was suspended by a spring, which had nonlinear stiffening terms and was forced by a disturbance. Under the polynomial growth assumptions on the nonlinear dissipative boundary functions, the rate of the energy decay of the system was obtained by Nakao's inequality.

Key words　hybrid cable - mass system,　uniform stabilization,　Nakao's inequality

Received 22 May 2006, revised 22 September 2006.

* Supported by National Nature Science Foundation(10371111) and Nature Science Foundation of Henan Providence and Henan Education Committee (0611053300, 200510463024)