

# 极限环高阶分岔控制\*

吴志强<sup>1</sup> 张建伟<sup>1</sup> 王喆<sup>2</sup>

(1. 天津大学力学系, 天津 300072) (2. 天津理工大学理学院, 天津 300191)

**摘要** 分岔控制是非线性动力学研究的重要问题之一. Hopf 分岔的控制与反控制已经得到较多的研究, 但其二次分岔, 特别是由一系列高阶分岔形成的分岔序列的控制, 已有的工作还极少. 对某存在极限环复杂分岔序列的二自由度非线性自治系统, 通过与受共振激励的单自由度非线性系统耦合, 成功抑制了系统中极限环高次分岔. 为分岔序列的非线性控制提供了一个简单的例子.

**关键词** 极限环, 分岔序列, 分岔控制

## 引言

分岔控制, 主要包括对分岔点的控制、对分岔产生的解的控制. 前者是指使参数变化时分岔提前或延迟发生乃至改变分岔点的类型; 后者指对分岔解的稳定性控制或解的幅值的控制. 相关的研究已取得显著的进展<sup>[1]</sup>.

极限环运动几乎在所有物理系统中都可能产生, 而 Hopf 分岔是其最主要的产生机制, 因而 Hopf 分岔的控制一直得到人们的关注与重视. 比如, 为解决多参数控制器设计中的困难问题, 文<sup>[2]</sup>引入约束分岔的奇异性方法来确定参数空间中平衡点的稳定域, 成功用于 Rossler 系统双平衡点的稳定性控制, 实现了 Hopf 分岔边界和静态分岔边界的控制及失稳类型的转换.

非线性系统因 Hopf 分岔产生的极限环后还可能产生二次分岔. 文<sup>[3]</sup>通过摄动分析和 Pade 逼近方法求出了平方非线性 Mathieu 方程二次分岔转迁曲线. 文<sup>[4]</sup>利用高阶谐波平衡方法分析了二元机翼系统的二次分岔, 讨论了高次谐波的影响. 文<sup>[5]</sup>讨论准三角机翼系统响应时也指出: 在一定情况下高次谐波的影响必须考虑. 事实上, 此类系统极限环运动还可能发生三次、乃至更高次的分岔, 形成分岔序列. 对分岔序列的研究目前还未见报道.

文<sup>[6]</sup>提出的附加受共振激励的非线性子系统来抑制自激振动的方法, 下面用数值方法讨论该法控制分岔序列方面的可能性. 作为分岔序列控制的

初步, 暂不考虑具体应用时的实现问题.

## 1 自治系统极限环分岔序列

对 2 自由度自治非线性系统

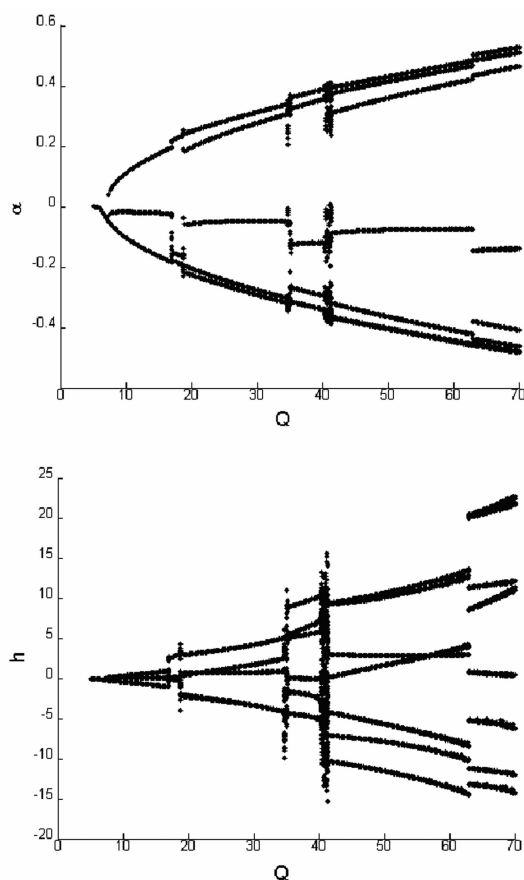


图 1 参数  $Q$  变化导致的分岔序列

Fig. 1 Bifurcation sequence caused by the variation of  $Q$

2006-09-30 收到第 1 稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10472078), 高等学校博士学科点专项科研基金(20050056024)和教育部新世纪优秀人才基金资助项目

$$\begin{cases} \ddot{h} + 0.25\ddot{\alpha} + 0.2h = -0.1Q\alpha - 0.1\dot{h} \\ 0.25\dot{h} + 0.25\dot{\alpha} + (0.5 + 20\alpha^2)\alpha = 0.04Q\alpha - 0.1\dot{\alpha} \end{cases} \quad (1)$$

研究表明:  $Q$  变化时, 由 Hopf 分岔引起的极限环运动, 会经历一系列超谐波分岔、反超谐波分岔及概周期解分岔. 若以  $\ddot{\alpha}$  正向通过为零时的点作为轨线与广义 Poincare 截面的交点, 选初值为  $\alpha = 0.1, \dot{\alpha} = 0.1, h = 0.1, \dot{h} = 0.1$ , 则可得到的图 1 所示分岔图. 从图中可以看出, 参数  $Q$  从 5 到 70 变化时周期振动行为存在多次分岔. 首先从平衡态经 Hopf 分岔变为周期解, 然后周期解轨线特征又发生一系列变化, 在  $Q = 40$  附近, 周期解变为概周期解, 随后在变成周期解, 周期解再一次变化产生分岔, 形成分岔序列. 文<sup>[4]</sup>在类似的系统中得到了 Hopf 分岔及二次分岔图, 与本文结果定性相同, 但没有高次分岔的结果. 高次分岔导致状态变量的振动波形、轨线形状、频率成分复杂化 (见图 3、图 4 之 (a), (b), (c) 图), 因此有必要对此进行控制.

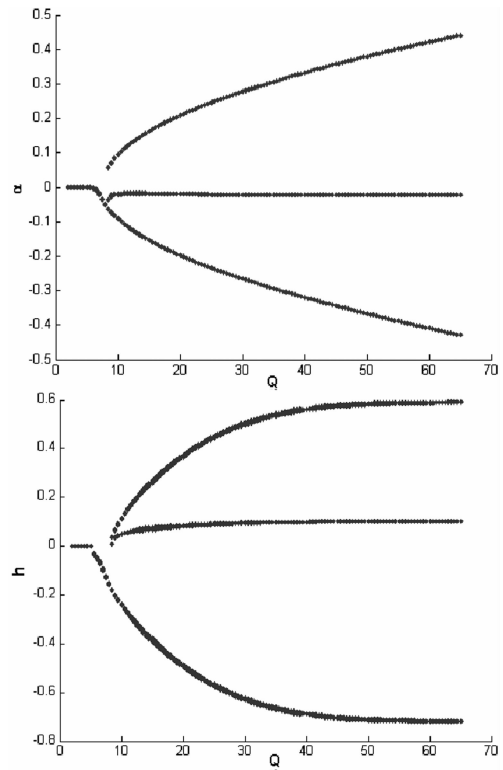


图2 耦合后主系统分岔

Fig.2 Bifurcation of the primary subsystem in couple case

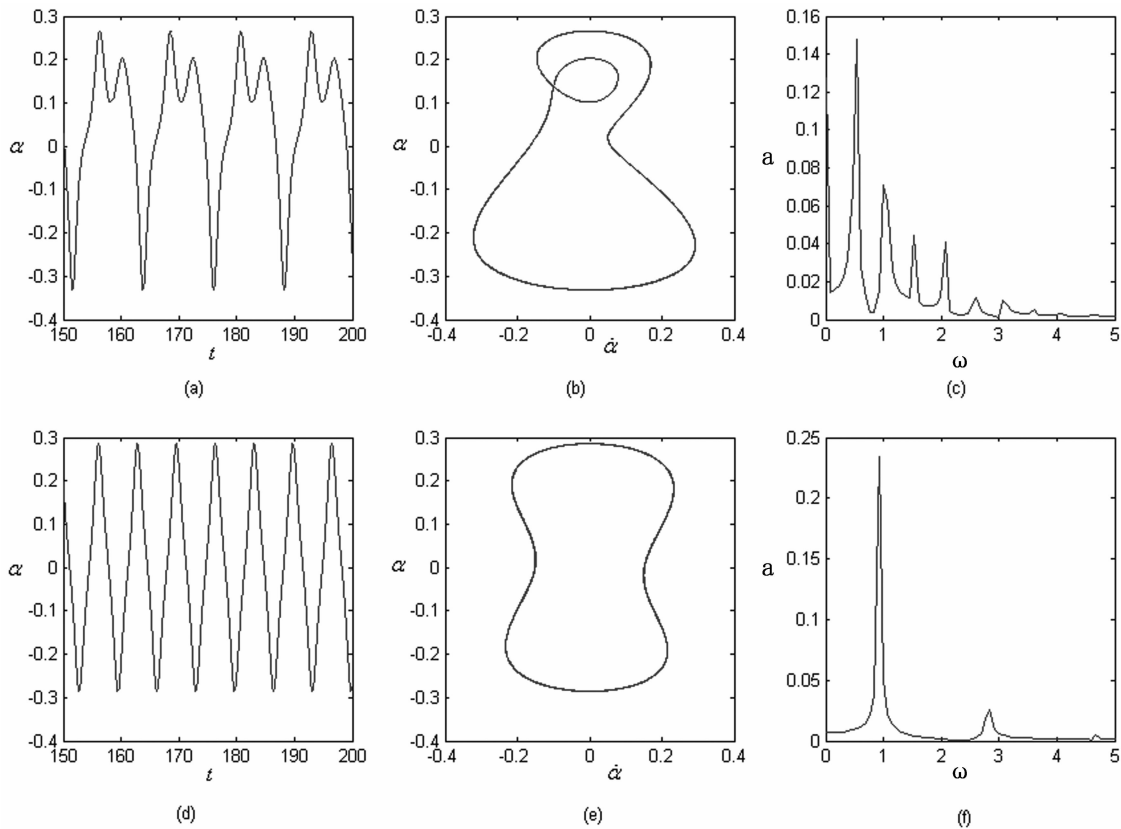


图3  $Q = 18$  时  $\alpha$  时间历程、相图、幅值谱比较: 耦合前 (a-c), 耦合后 (d-f)

Fig.3 Trajectories, phase portraits and frequency spectra of the oscillator  $\alpha$  for  $Q = 18$ : (a-c) uncoupled, (d-f) coupled

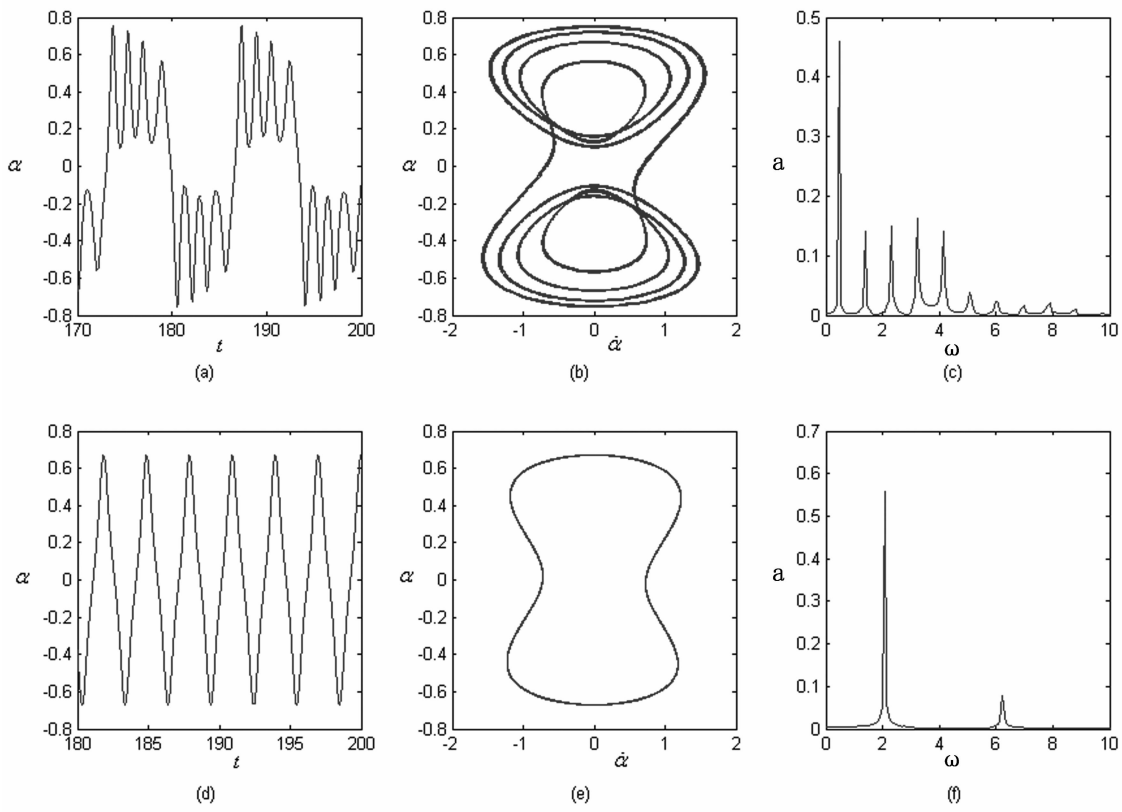


图 4  $Q = 68$  时  $\alpha$  时间历程、相图、幅值谱比较:耦合前(a-b),耦合后(d-f)

Fig. 4 Trajectories, phase portraits and frequency spectra of the oscillator  $\alpha$  for  $Q = 68$ : (a - c) uncoupled, (d - f) coupled

## 2 极限环分岔序列控制

文<sup>[6]</sup>表明:通过与受强迫共振激励的 Duffing 系统耦合, van der Pol 系统的自激振动可以完全的抑制. 现在讨论这种方法抑制分岔序列的可能性, 为此考虑如下 3dof 系统:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{h} + 0.25\ddot{\alpha} + 0.2h &= -0.1Q\alpha - 0.1\dot{h} - \\ & a_1(\dot{h} + 0.01\dot{\alpha} - \dot{h}_a) - a_2(\dot{h} + 0.01\dot{\alpha} - \dot{h}_a)^3 \\ 0.25\dot{h} + 0.25\ddot{\alpha} + (0.5 + 20\alpha^2)\alpha &= 0.04Q\alpha - \\ & 0.1\dot{\alpha} - 0.01a_1(\dot{h} + 0.01\dot{\alpha} - \dot{h}_a) - \\ & 0.01a_2(\dot{h} + 0.01\dot{\alpha} - \dot{h}_a)^3 \\ 0.01\ddot{h}_a + (2 + 0.01h_a)h_a &= 0.01\cos\omega t - \\ & 0.01h_a + a_1(\dot{h} + 0.01\dot{\alpha} - \dot{h}_a) + \\ & a_2(\dot{h} + 0.01\dot{\alpha} - \dot{h}_a)^3 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

它由主系统(1)通过非线性阻尼耦合 ( $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ ) 与 Duffing 子系统耦合而成. 取  $a_1 = 0.1, a_2 = 0.1$ , 按与上节相同的 Poincare 截面定义计算耦合系统随参数  $Q$  的分岔, 所得结果见图 2.  $Q$  同耦合前

比, 主系统只会发生一次 Hopf 分岔, 并且所产生周期解的谱特征、波形特征都不参数进一步变化而变化. 即通过与 Duffing 子系统耦合, 使主系统中存在的分岔序列得到了抑制, 其行为也得到了很好的改善.

为详细说明这种变化, 选典型  $Q$  值进行耦合前后的比较. 受篇幅限制, 这里只给出两种情况下的结果, 状态  $\alpha$  的变化与状态  $h$  的变化定性相同. 图 3 给出  $Q = 18$  时结果. 耦合前响应中存在较多的频率成分, 轨线形状也较复杂; 耦合后, 主要的频率成分只剩 2 个, 周期减半, 轨线形状只有一个环, 也变得简单. 图 4 给出  $Q = 68$  时结果. 耦合前, 波形较复杂, 响应中存在较多的频率成分, 轨线形状更复杂; 耦合后, 主要的频率成分只剩 2 个, 周期减小, 轨线形状只有一个环, 也变得简单.

## 3 小结

自激振动系统因 Hopf 分岔产生周期运动, 当系统参数发生变化时, 该周期运动可能发生二次、三次、乃至高次分岔, 形成分岔序列. 通过与受强迫

共振的 Duffing 系统耦合,原自激振动系统中存在的分岔序列,能够得到抑制,消除二次以上的分岔. 这为其它非线性系统分岔序列的控制提供了一种可能的方法.

### 参 考 文 献

- 1 Chen G, Moilola J L, Wang H O. Bifurcation control: theories, methods, and applications. *International Journal of Bifurcation & chaos*, 2000, 10(3):515 ~ 548
- 2 Z Q Wu, P Yu. Bifurcation control of Rollser system. 2003 ASME International. Mechanical Engineering Congress & Exposition. Washington, November 15 ~ 21, 2003
- 3 Deepak V. Ramani, William L. Keith, Richard H Rand. Perturbation solution for secondary bifurcation in the quadratically-damped Mathieu equation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, 39: 491 ~ 502
- 4 Liping Liu, Earl H. Dowell. The secondary bifurcation of an aeroelastic airfoil motion; Effect of high harmonics. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 37: 31 - 49
- 5 杨翊仁,倪樵. 结构非线性颤振分析的 KBM 法及实验对比. 振动工程学报, 1995, 8(4): 351 ~ 355 (Yang Yiren, Ni qiao. KBM Method of Flutter Analysis with Structural Nonlinearity and the Comparison with Wind Tunnel Test. *Journal of vibration engineering*, 1995, 8(4): 351 ~ 355 (in Chinese))
- 6 张建伟,吴志强. 非线性自激振动系统的模态相互作用. 中国科技论文在线, 2005, 3 (Zhang Jianwei, Wu zhiqiang. Mode interactins in nonlinear self-exited vibration systems, Science paper Online, 2005, 3 (in Chinese))

## HIGHER ORDER LIMIT – CYCLE BIFURCATION CONTROL \*

Wu Zhiqiang<sup>1</sup> Zhang Jianwei<sup>1</sup> Wang Zhe<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

(2. College of Science, Tianjin University of Technology, Tianjin 300191, China)

**Abstract** Bifurcation control is one of the important problems in nonlinear dynamics research. Though the control and anti – control for Hopf bifurcation have been investigated in a lot of studies, the control on its second bifurcation, especially on the bifurcation sequence formed by further bifurcate, has been seldom analyzed. For a 2 dof nonlinear autonomous system, the complicated bifurcation sequence of its limit cycles is suppressed by coupling it with a resonantly excited Duffing system. The work gives a simple example for the future study on the bifurcation sequence control.

**Key words** limit Cycle, bifurcation sequence, bifurcation control