

Qi 四维系统的暂态混沌现象

王琳 倪樵 黄玉盈

(华中科技大学力学系, 武汉 430074)

摘要 最近, Qi 等人给出了一种四维动力系统, 该系统的每一个方程都含有因变量交叉乘积而引起的非线性项。在系统的诸多参数区域内, Qi 四维系统可出现复杂的分岔路径; 在某些参数范围内, 该系统还会出现混沌现象。本文进一步考查了 Qi 四维系统, 借助于相图和时间历程曲线图等手段, 发现该系统还可能发生暂态混沌现象, 初始条件的微小改变可使系统的最终稳态由一种改变为另一种。

关键词 Qi 四维系统, 暂态混沌, 初始条件

引言

1963 年, 当 Lorenz 在一个非常简单的三维动力系统中发现混沌现象时, 国内外诸多学者都惊奇不已。此后的几十年里, 混沌理论在科学、数学和工程学等领域得到广泛而深入的研究。正如 Lü 和 Chen^[1] 所指出的, 多种混沌发生器的理论设计与电路实现已倍受关注。值得指出的是, 基于二次自治系统的构造形式, 学术界在三维系统中发现了很多混沌流形^[2-8]。因此, 在混沌动力学及其相关的混沌控制与同步问题中, 这些三维动力系统无疑给学术界提供了一些新的理论和研究方法。最近, Qi 等人^[9,10] 构建了一种新的自治混沌系统。这一新的动力系统是四维的, 也即有四个方程, 这一点与已有的诸多三维系统有本质的不同。而且, Qi 四维系统的每一个方程都含有立方乘积的非线性项。Qi 等人^[9,10] 的研究表明, 在系统的几种参数区域内, 这一四维系统可出现复杂的动力学现象, 如不动点、周期解、混沌、倍周期分岔和 Hopf 分岔等。

本文根据文献[9,10]的理论基础, 进一步考查了 Qi 四维系统的动力学响应。数值计算表明, 这一四维系统在某些参数范围内还可发生暂态混沌现象。

1 Qi 四维混沌系统

Qi 四维混沌系统的方程具有如下的形式^[9,10]

$$\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2 x_3 x_4$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= b(x_1 + x_2) - x_1 x_3 x_4 \\ \dot{x}_3 &= -cx_3 + x_1 x_2 x_4 \\ \dot{x}_4 &= -dx_4 + x_1 x_2 x_3\end{aligned}\quad (1)$$

其中 $x_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为系统的状态变量, a, b, c 和 d 为正的实常参数。

根据文献[9], 方程(1)给出的四维系统含有 9 个关于原点和坐标平面对称的实平衡点。为便于分析, 文献[9]按照一定的规则将这 9 个平衡点分为三类。第一类非零平衡点包括

$$\begin{aligned}S_1 &= [x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1], \quad S_2 = [-x_1^1, -x_2^1, x_3^1, x_4^1] \\ S_3 &= [x_1^1, x_2^1, -x_3^1, -x_4^1], \quad S_4 = [-x_1^1, -x_2^1, -x_3^1, -x_4^1]\end{aligned}\quad (2)$$

第二类非零平衡点包括

$$\begin{aligned}S_5 &= [x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2], \quad S_6 = [-x_1^2, -x_2^2, x_3^2, x_4^2] \\ S_7 &= [x_1^2, x_2^2, -x_3^2, -x_4^2], \quad S_8 = [-x_1^2, -x_2^2, -x_3^2, -x_4^2]\end{aligned}\quad (3)$$

第三类平衡点为零平衡点

$$S_0 = [0, 0, 0, 0]\quad (4)$$

第一类非零平衡点和第二类非零平衡点的区别在文献[9]中已给出, 本文不再讨论。此外, 在式(2) – (4) 中, 其参数定义如下

$$\begin{aligned}q &= \sqrt{cd}, p = \sqrt{a^2 + 6ab + b^2}, g = p + a + b, \\ h &= p - a + b, m = p - a - b, n = p + a - b\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}x_1^1 &= \sqrt{gq/(2a)}, \quad x_2^1 = \sqrt{2aq/g}, \\ x_3^1 &= \sqrt{hd/(2q)}, \quad x_4^1 = \sqrt{hq/(2d)}\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}x_1^2 &= \sqrt{mq/(2a)}, \quad x_2^2 = \sqrt{2aq/m}, \\ x_3^2 &= \sqrt{nd/(2q)}, \quad x_4^2 = \sqrt{nq/(2d)}\end{aligned}\quad (7)$$

2 系统的混沌和暂态混沌现象

系统(1)含有四个系统参数,即 a, b, c 和 d . Qi 等人^[9,10]的研究已显示,随着这四个参数取值的逐渐改变,系统的动力学内容极其丰富,甚至还包含混沌现象.例如,固定 $b = 10, c = 1, d = 10$,仅改变 a 的取值大小.文献[10]的研究表明,当 $0 < a < 15$ 时,方程(1)的解趋于无穷大;当 $17 \leq a < 23.98$ 时,系统将历经几种典型的周期状态;随着 a 的进一步增大,系统将以倍周期分岔进入混沌体制(见图1);若继续增大 a 的取值,其混沌参数区域内还可能出现周期解的窗口,如图2所示.文献[10]的研究还发现,当 $a > 80.7$ 时,方程(1)的解将收敛到

一个不动点.

下面将着重分析 Qi 四维系统能否出现暂态混沌现象.与前文一致,固定 $b = 10, c = 1, d = 10$,仅改变 a 的取值大小,然后分析系统的动力学响应.本文的进一步研究却发现,在 $a = 80.65$ 附近,方程(1)所描述的四维系统还可能出现新的动力学现象.初始计算条件的微小改变可导致系统出现不同的最终稳态形式;在达到稳态之前,系统的响应轨迹非常紊乱且貌似混沌.不仅如此,这种初期瞬态响应所历经的时间长短也与初始条件相关.为详细地研究这一现象,对方程(1)采用四阶 Runge - Kutta 法作数值迭代计算,并以下面的两种情形作分析讨论.

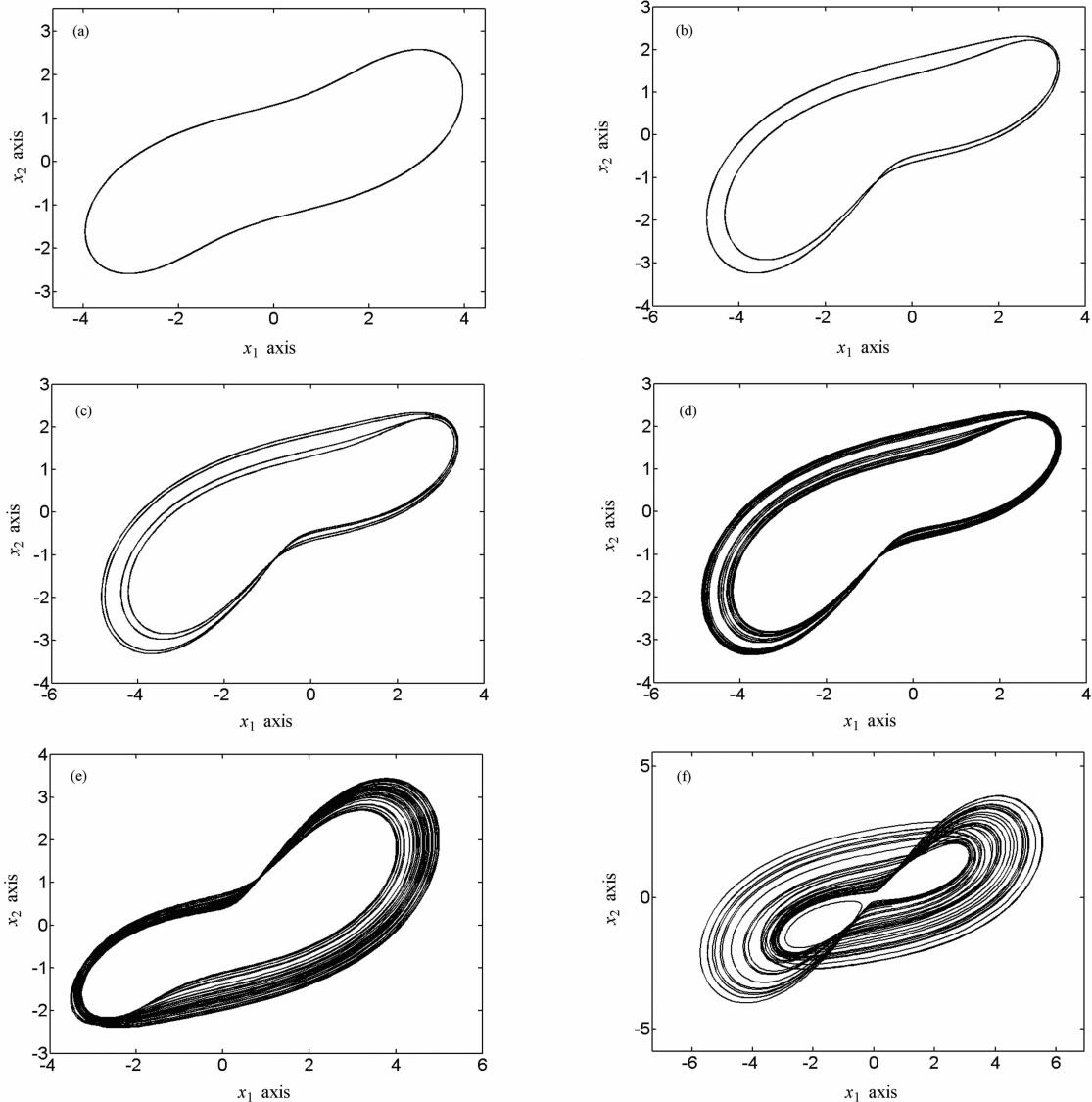
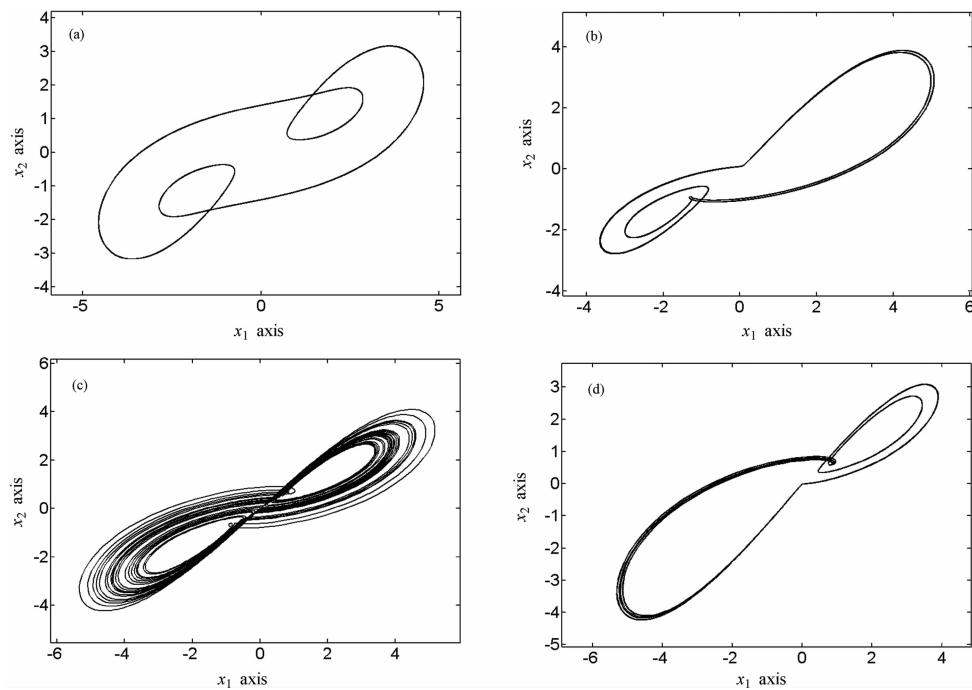


图1 发生倍周期分岔时典型的相平面图 (a) $a=20$; (b) $a=23.7$; (c) $a=23.9$; (d) $a=23.99$; (e) $a=24.2$; (f) $a=25$

Fig. 1 Typical phase-plane portraits for period-doubling bifurcations (a) $a=20$; (b) $a=23.7$; (c) $a=23.9$; (d) $a=23.99$; (e) $a=24.2$; (f) $a=25$

图2 混沌参数区域内的周期解和混沌解 (a) $a=27.5$; (b) $a=48.1$; (c) $a=60$; (d) $a=62$ Fig. 2 Periodic and chaotic solutions in chaotic parameter regions (a) $a=27.5$; (b) $a=48.1$; (c) $a=60$; (d) $a=62$

2.1 固定 $a=80.5 < 80.65$, 改变初始条件

图3(a)给出的是 x_1 的时间响应曲线, 初始条件为 $x_0 = [1.2, 2.80, 3, 2]$. 此时, 初期瞬态响应的时间很短, x_1 很快收敛到一个具有正值的不动点, 这一不动点对应于平衡点 S_1 . x_2, x_3 和 x_4 也将收敛到各自的固定值. 图3(b)和(c)分别给出了其相应的相平面图和相空间图.

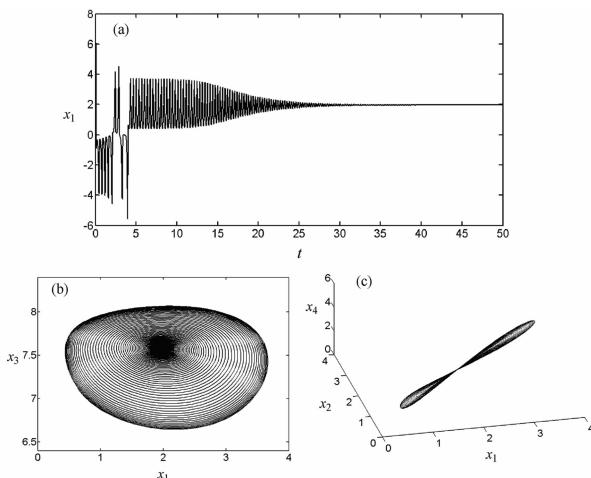
图3 $x_0 = [1.2, 2.80, 3, 2]$ 且 $a=80.5$ 时系统(1)的动力行为
(a) x_1 的时间响应曲线;(b) x_1-x_3 平面相图;(c) $x_1-x_2-x_4$ 三维相空间图

Fig. 3 Behaviors observed from system (1) with initial values

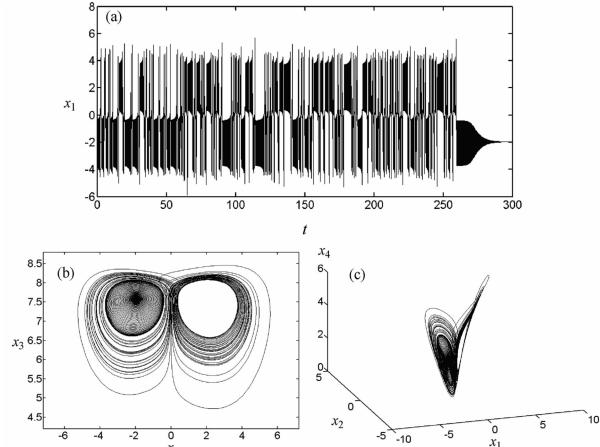
 $x_0 = [1.2, 2.80, 3, 2]$, and $a=80.5$ (a) time response of x_1 ;(b) projection on the x_1-x_3 plane; (c) 3D view on $x_1-x_2-x_4$ space图4 $x_0 = [1.2, 2.78, 3, 2]$ 且 $a=80.5$ 时系统(1)的动力行为
(a) x_1 的时间响应曲线;(b) x_1-x_3 平面相图;(c) $x_1-x_2-x_4$ 三维相空间图

Fig. 4 Behaviors observed from system (1) with initial values

 $x_0 = [1.2, 2.78, 3, 2]$, and $a=80.5$ (a) time response of x_1 ;(b) projection on the x_1-x_3 plane; (c) 3D view on $x_1-x_2-x_4$ space

然而, 当初始条件取为 $x_0 = [1.2, 2.78, 3, 2]$ 时, 时间响应曲线却发生了很大的改变, 这可以从图4(a)中看到. 与图3(a)相比, 其初期瞬态响应的时间变得更长. 不仅如此, 在这一初始条件下, 初期瞬态响应的曲线极不规则, 貌似混沌. 值得注意的是, 系统的最终稳态却变为一个 x_1 具有负值的不动点, 这一不动点对应于平衡点 S_2 . 显然, 图3和图4给出的是两种不同的最终状态. 由此可见, 虽

然这两图的系统参数是相同的,但初始条件的微小改变却导致出现了不同的最终稳态形式.类似地,针对系统(1)还可以采用其它的初始条件作数值计算.图5和图6给出了另外两种不同的初始条件.

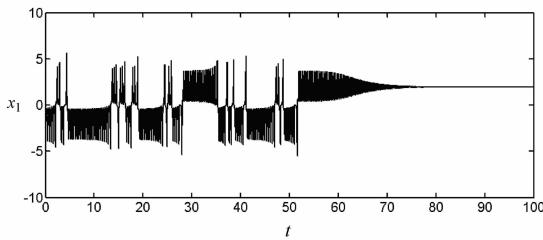


图5 $x_0 = [1.2, 2.79, 3, 2]$ 且 $a = 80.5$ 时 x_1 的时间响应曲线

Fig. 5 Time response of x_1 with initial values

$$x_0 = [1.2, 2.79, 3, 2], \text{ and } a = 80.5$$

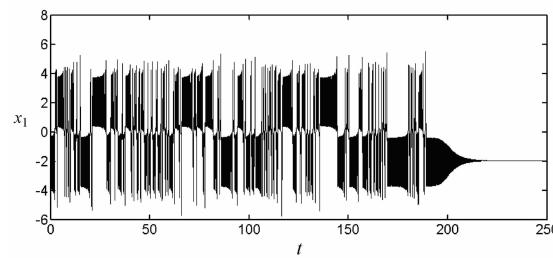


图6 $x_0 = [1.2, 2.82, 3, 2]$ 且 $a = 80.5$ 时 x_1 的时间响应曲线

Fig. 6 Time response of x_1 with initial values

$$x_0 = [1.2, 2.82, 3, 2], \text{ and } a = 80.5$$

基于以上分析可知,当 $a = 80.5$ 时,数值计算至少可检测到两种最终的稳态形式.初始条件的微小改变可引起系统出现不同的最终态,其初期瞬态响应的时间长短也有很大的差异.

2.2 固定 $a = 80.8 > 80.7$, 改变初始条件

当 $a = 80.8 > 80.7$ 时,文献^[10]指出 x_1 将最终收敛到一个具有负值的不动点.然而,本文的进一步数值计算显示,在某些初始条件下, x_1 也可能收敛到一个具有正值的不动点.而且,初始条件不同,初期瞬态响应时间的长短也不同.事实上,当 $b = 10$, $c = 1$, $d = 10$ 且 $a = 80.8$ 时,数值计算可检测到两种(至少两种)不同的最终稳态形式.图7和8表明,当系统收敛到某一稳态之前, x_1 可出现貌似混沌的初期瞬态响应.此外,在某些初始条件下, x_1 初期瞬态响应的时间也可能很短,如图9和10所示.由此可见,当 $a = 80.8$ 时,极易简单地认为系统将最终收敛到某一不动点.而事实并非如此,系统此时可出现暂态混沌现象.

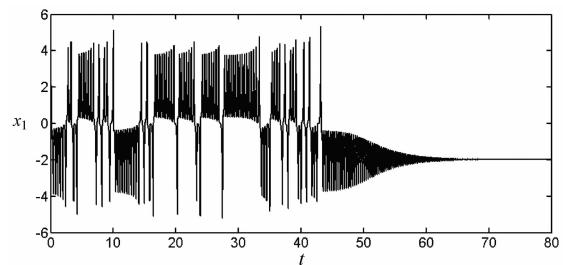


图7 $x_0 = [1.2, 2.65, 3, 2]$ 且 $a = 80.8$ 时 x_1 的时间响应曲

Fig. 7 Time response of x_1 with initial values

$$x_0 = [1.2, 2.65, 3, 2], \text{ and } a = 80.8$$

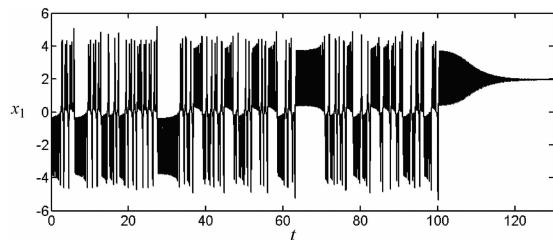


图8 $x_0 = [1.2, 2.60, 3, 2]$ 且 $a = 80.8$ 时 x_1 的时间响应曲

Fig. 8 Time response of x_1 with initial values

$$x_0 = [1.2, 2.60, 3, 2], \text{ and } a = 80.8$$

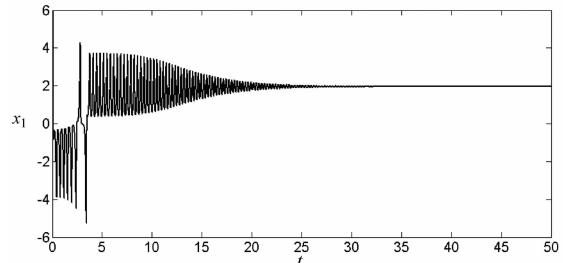


图9 $x_0 = [1.2, 2.62, 3, 2]$ 且 $a = 80.8$ 时 x_1 的时间响应曲

Fig. 9 Time response of x_1 with initial values

$$x_0 = [1.2, 2.62, 3, 2], \text{ and } a = 80.8$$

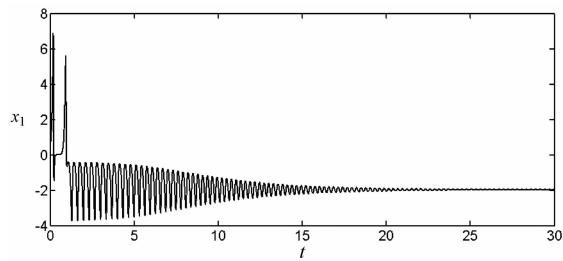


图10 $x_0 = [1.2, 0.44, 3, 2]$ 且 $a = 80.8$ 时 x_1 的时间响应曲

Fig. 10 Time response of x_1 with initial values

$$x_0 = [1.2, 0.44, 3, 2], \text{ and } a = 80.8$$

3 结论

本文进一步考查了 Qi 四维混沌系统的动力学

机理. 对于参数取值为 $b = 10, c = 1$ 和 $d = 10$ 的情形, 数值迭代计算可检测到该系统的暂态混沌现象. 同时, 在 $a = 80.65$ 的相邻取值范围, 系统存有两种(至少两种)最终的稳态形式. 因此, 初始条件的微小扰动可引起初期瞬态响应细节发生很大的改变, 其最终的稳态也可能由一种形式变为另一种.

对于实际的动力学系统, 由于很难精确地给出其初始扰动的大小, 这使得预测该系统的最终稳态形式变得比较困难. 不仅如此, 初期瞬态响应的时间长短也难以准确地预知.

本文的研究也表明, 目前还需寻求有效的理论、方法和数学工具来研究这一四维动力系统的暂态混沌现象和形成机制.

参 考 文 献

- 1 Lü JH, Chen GR. Multi - scroll chaos generation: Theories, methods and applications. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2006, 16(4) : 775 ~ 858
- 2 Lü JH, Chen GR, Cheng DZ. A new chaotic system and beyond: the general Lorenz-like system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004, 14(3) : 1507 ~ 1537
- 3 王琳, 倪樵, 刘攀, 黄玉盈. 一种新的类 Lorenz 系统的混

- 沌行为与形成机制. *动力学与控制学报*, 2005, 3(4) : 1 ~ 7 (Wang Lin, Ni Qiao, Liu Pan, Huang Yuying. Chaos and its forming mechanism of a new Lorenz-Like system. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4) : 1 ~ 7 (in Chinese))
- 4 Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9 : 1465 ~ 1466
- 5 Ueta T, Chen G. Bifurcation analysis of Chen's equation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10 : 1917 ~ 1931
- 6 Liu WB, Chen G. A new chaotic system and its generation. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, 13 : 261 ~ 267
- 7 Lü JH, Chen G. A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12 : 659 ~ 561
- 8 Lü JH, Chen G, Čelikovsky S. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12 : 2917 ~ 2926
- 9 Qi GY, Chen GR. Analysis and circuit implementation of a new 4D chaotic system. *Physics Letters A*, 2006, 352 : 386 ~ 397
- 10 Qi GY, Du SZ, Chen GR, Chen ZQ, Yuan ZZ. On a four-dimensional chaotic system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23 : 1671 ~ 1682

CHAOTIC TRANSIENTS IN QI'S 4D SYSTEM

Wang Lin Ni Qiao Huang Yuying

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract Recently, Qi et al. have developed a 4D dynamical system, in which each equation contains a 3-term cross product. And it has been shown that complex bifurcations can occur and chaos may be examined in several parameter regions of this system. This paper further investigated Qi's 4D system. By use of phase portraits and time response curves, the dynamical behaviors were identified based on numerical solutions of the equations for the system. It was shown that chaotic transients occurred in the system with two sets of parameter values, and small changes of initial values may lead the system to different final steady states.

Key words Qi's four - dimensional dynamical system, chaotic transient, initial value