

基于主动控制的三维自治混沌系统的异结构反同步*

王兴元 王勇

(大连理工大学电子与信息工程学院,大连 116024)

摘要 分析了三维自治混沌系统之间的异结构反同步问题,并采用主动控制方法实现了一类三维自治混沌系统,如 Lorenz 系统,Chen 系统和 Lü 系统之间的两两反同步.数值仿真试验验证了该控制方案的有效性.

关键词 三维自治系统,异结构,反混沌同步,主动控制

引言

1990年,Pecora和Corroll首次提出了“混沌同步”的概念^[1],并在实验室用电路实现了同一信号驱动下两个相同的耦合混沌系统的同步^[2].如今,人们对混沌同步已做了深入的研究^[3-7];并在不同的混沌系统中实现了不同类型的混沌同步,如:完全同步,广义同步,相同步,延迟同步,射影同步等^[8-14].完全同步是指从不同初始点出发的两个混沌系统,随时间的推移其轨道趋于一致;目前已经在耦合,无方向耦合或含噪声的混沌系统中观测到^[8,10].相同步是指两个混沌系统轨道的相位差锁定在以内,而它们的振幅仍然保持混沌状态且互不相关^[9,12].广义同步是指在主从混沌系统的轨道之间建立一个函数关系^[11].延迟同步是指具有固定时间延迟的两个混沌系统轨道是一致的^[13].射影同步是指主从混沌系统的轨道的振幅成正比,且相位相同^[14].在周期混沌系统中,反同步是一个值得关注的现象^[15,16].最近,Kim^[17]和Hu^[18]等分别在耦合和无方向耦合的两个相同的混沌系统中实现了反同步.从实际应用的角度来看,异结构反同步比同结构反同步应具有更大的应用潜力和发展前景.为此,本文提出了基于主动控制的异结构反混沌同步方法,并实现了一类不确定三维自治系统,如 Lorenz 系统,Chen 系统和 Lü 系统,之间的两两反同步.

1 系统描述

Lorenz 方程

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

是1963年数学家Lorenz^[19]在《大气科学杂志》上所提出的.当参数 $a = 10, b = 8/3, c = 28$ 时,Lorenz系统(1)给出奇怪吸引子(如图1(a)).1999年,Chen等发现 $\alpha = 35, \beta = 3, \gamma = 28$ 时,三维自治方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (\gamma - \alpha)x - xz + \gamma y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (2)$$

可给出比Lorenz吸引子的结构更为复杂的另一奇怪吸引子^[20](如图1(b)).2002年,Lü等发现了介于Lorenz系统和Chen系统之间的一个新系统,即Lü系统^[21],它由如下的三维自治方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho(y - x) \\ \dot{y} = -xz + \nu y \\ \dot{z} = xy - \mu z \end{cases} \quad (3)$$

来描述.当 $\rho = 36, \mu = 3, \nu = 20$ 时,系统(3)进入混沌状态^[21],图1(c)为相应的Lü吸引子.

1996年,Vanecek和Celikovsky^[22]发现三维自治方程组的动力学行为是由其线形部分 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ 来决定的:当 $a_{12}a_{21} > 0$ 时,其动力学行为类似于Lorenz系统(称广义Lorenz系统族);当 $a_{12}a_{21} < 0$ 时,其动力学行为类似于Chen系统;当 $a_{12}a_{21} = 0$ 时,其动力学行为介于Lorenz系统和Chen系统之间,由Lü系统来描述.Lorenz系统,Chen系统和Lü系统是拓扑不等价的.

2006-07-24 收到第1稿,2006-10-12 收到修改稿.

*国家自然科学基金(60573172),辽宁省教育厅高等学校科学技术研究项目(20040081)资助

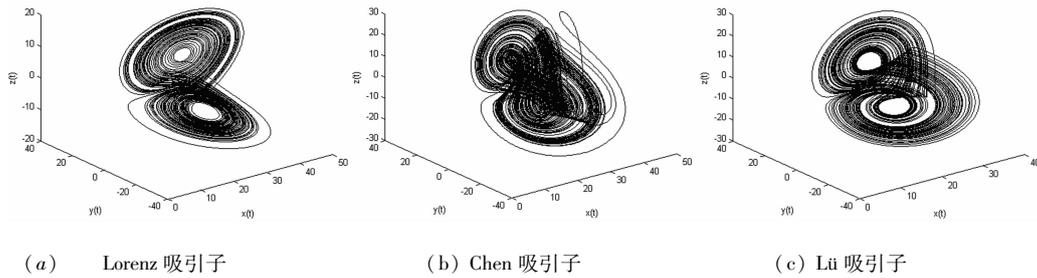


图1 三维自治系统的奇怪吸引子

Fig. 1 Attractors of three-dimensional autonomous systems

2 Lorenz 系统与 Chen 系统之间的反同步

选取 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = cx_1 - x_1z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - bz_1 \end{cases} \quad (4)$$

为主系统, Chen 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + u_1 \\ \dot{y}_2 = (\gamma - \alpha)x_2 - x_2z_2 + \gamma y_2 + u_2 \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - \beta z_2 + u_3 \end{cases} \quad (5)$$

为受控的从系统. 这里 a, b, c, α, β 和 γ 为未知的正常数; u_1, u_2 和 u_3 为控制输入. 从系统(5)通过主动控制器 U 的作用可反同步追踪主系统(4).

定义 Lorenz 系统(4)与受控 Chen 系统(5)的反同步状态误差为

$$\begin{cases} e_1 = x_1 + x_2 \\ e_2 = y_1 + y_2 \\ e_3 = z_1 + z_3 \end{cases} \quad (6)$$

将式(4)和式(5)代入式(6), 整理后可得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + (a - \alpha)(x_2 - y_2) + u_1 \\ \dot{e}_2 = \alpha e_1 - e_2 + (\gamma - \alpha - c)x_2 + (\gamma + 1)y_2 - x_1z_1 - x_2z_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -be_3 + (b - \beta)z_2 + x_1y_1 + x_2y_2 + u_3 \end{cases} \quad (7)$$

定义主动控制器 U 为

$$\begin{cases} u_1 = -(a - \alpha)(x_2 - y_2) + (a - k_1)e_1 - ae_2 \\ u_2 = -(\gamma - \alpha - c)x_2 - (\gamma + 1)y_2 + x_1z_1 + x_2z_2 - \alpha e_1 + (1 - k_2)e_2 \\ u_3 = -(b - \beta)z_2 - x_1y_1 - x_2y_2 + (b - k_3)e_3 \end{cases} \quad (8)$$

这里 k_1, k_2 和 k_3 为正实数.

定理 1 若选取受控从系统(5)的控制器 U 为式(8), 则从系统(5)可与主系统(4)实现反同步.

证明: 设 Lyapunov 函数为

$$V = (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)/2 \quad (9)$$

则由式(7)可得

$$\dot{V} = \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \dot{e}_3 e_3 = e_1 [a(e_2 - e_1) + (a + \alpha)(x_2 - y_2) + u_1] + e_2 [ce_1 - e_2 + (\gamma - \alpha - c)x_2 + (\gamma + 1)y_2 - x_1z_1 - x_2z_2 + u_2] + e_3 [-be_3 + (b - \beta)z_2 + x_1y_1 + x_2y_2 + u_3] \quad (10)$$

将式(8)代入式(10), 化简后可得

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 = -e^T P e \quad (11)$$

这里 $P = \text{diag}\{k_1, k_2, k_3\}$.

由于 \dot{V} 是负定的, 故

$$\dot{V} = -e^T P e \leq -\lambda_{\min}(P) \|e\|^2 < 0 \quad (12)$$

这里 $\lambda_{\min}(P)$ 是矩阵 P 的最小特征值. 因为

$$V = \frac{1}{2} \|e\|^2 \quad (13)$$

故有

$$\dot{V} \leq -2\lambda_{\min}(P)V \quad (14)$$

所以可推得

$$V(t) \leq V(0) \exp^{-2\lambda_{\min}(P)t} \quad (15)$$

这里 $V(0)$ 是 Lyapunov 函数的初始值. 因为 $V(0)$ 是有界的, 所以误差系统(6)是渐进稳定, 即受控从系统(5)通过主动控制器 U 可以达到与主系统(4)的反同步.

3 Chen 系统与 Lü 系统之间的反同步

选取 Chen 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = (\gamma - \alpha)x_1 - x_1z_1 + \gamma y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - \beta z_1 \end{cases} \quad (16)$$

为主系统, Lü 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \rho(y_2 - x_2) + u_1 \\ \dot{y}_2 = -x_2z_2 + \nu y_2 + u_2 \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - \mu z_2 + u_3 \end{cases} \quad (17)$$

为受控的从系统. 这里 $\alpha, \beta, \gamma, \rho, \mu$ 和 v 为未知的正常数; u_1, u_2 和 u_3 为控制输入. 从系统(17)通过主动控制器 U 的作用可反同步追踪主系统(16).

定义 Chen 系统(16)与受控 Lü 系统(17)的反同步状态误差为式(6), 将式(16)和式(17)代入式(6), 整理后可得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \alpha(e_2 - e_1) + (\alpha - \rho)(x_2 - y_2) + u_1 \\ \dot{e}_2 = (\gamma - \alpha)e_1 + \gamma e_2 - (\gamma - \alpha)x_2 - (\gamma - v)y_2 - x_1 z_1 - x_2 z_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -\beta e_3 + (\beta - \mu)z_2 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + u_3 \end{cases} \quad (18)$$

定义主动控制器 U 为

$$\begin{cases} u_1 = -(\alpha - \beta)(x_2 - y_2) + (\alpha - k_1)e_1 - \alpha e_2 \\ u_2 = (\gamma - \alpha)x_2 + (\gamma - v)y_2 + x_1 z_1 + x_2 z_2 - (\gamma - \alpha)e_1 - (\gamma + k_2)e_2 \\ u_3 = -(\beta - \mu)z_2 - x_1 y_1 - x_2 y_2 + (\beta - k_3)e_3 \end{cases} \quad (19)$$

这里 k_1, k_2 和 k_3 为正实数.

定理2 若选取受控从系统(17)的控制器 U 为式(19), 则从系统(17)可与主系统(16)实现反同步.

证明: 设 Lyapunov 函数为式(9), 则由式(18)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \dot{e}_3 e_3 = e_1 [\alpha(e_2 - e_1) + (\alpha - \rho)(x_2 - y_2) + u_1] + e_2 [(\gamma - \alpha)e_1 + \gamma e_2 - (\gamma - \alpha)x_2 - (\gamma - v)y_2 - x_1 z_1 - x_2 z_2 + u_2] + e_3 [-\beta e_3 + (\beta - \mu)z_2 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + u_3] \end{aligned} \quad (20)$$

将式(19)代入式(20), 化简后可得

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 = -e^T p e \quad (21)$$

这里 $P = \text{diag}\{k_1, k_2, k_3\}$. 模仿定理1的证明过程, 可知此时误差系统渐进稳定, 即受控从系统(17)通过主动控制器可以达到与主系统(16)的反同步.

4 Lü 系统与 Lorenz 系统之间的反同步

选取 Lü 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \rho(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 + v y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \mu z_1 \end{cases} \quad (22)$$

为主系统, Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + u_1 \\ \dot{y}_2 = c x_2 - x_2 z_2 - y_2 + u_2 \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - b z_2 + u_3 \end{cases} \quad (23)$$

为受控的从系统. 这里 ρ, μ, v, a, b 和 c 为未知的正常数; u_1, u_2 和 u_3 为控制输入. 从系统(23)通过主

动控制器 U 的作用可反同步追踪主系统(22).

定义 Lü 系统(22)与受控 Lorenz 系统(23)的反同步状态误差为式(6), 将式(23)和式(24)代入式(6), 整理后可得

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \rho(e_2 - e_1) + (\rho - \alpha)(x_2 - y_2) + u_1 \\ \dot{e}_2 = c e_1 + v e_2 - c x_1 - (v + 1)y_2 - x_1 z_1 - x_2 z_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -\mu e_3 + (\mu - b)z_2 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + u_3 \end{cases} \quad (24)$$

定义主动控制器 U 为

$$\begin{cases} u_1 = -(\rho - \alpha)(x_2 - y_2) + (\rho - k_1)e_1 - \rho e_2 \\ u_2 = c x_1 + (v + 1)y_2 + x_1 z_1 + x_2 z_2 - c e_1 - (v + k_2)e_2 \\ u_3 = -(\mu - b)z_2 - x_1 y_1 - x_2 y_2 + (\mu - k_3)e_3 \end{cases} \quad (25)$$

这里 k_1, k_2 和 k_3 为正实数.

定理3 若选取受控从系统(23)的控制器为式(25), 则从系统(23)可与主系统(22)实现反同步.

证明: 设 Lyapunov 函数为式(9), 则由式(24)可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \dot{e}_3 e_3 = e_1 [\rho(e_2 - e_1) + (\rho - \alpha)(x_2 - y_2) + u_1] + e_2 [c e_1 + v e_2 - c x_1 - (v + 1)y_2 - x_1 z_1 - x_2 z_2 + u_2] + e_3 [-\mu e_3 + (\mu - b)z_2 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + u_3] \end{aligned} \quad (26)$$

将式(25)代入式(26), 化简后可得

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 = -e^T p e \quad (27)$$

这里 $P = \text{diag}\{k_1, k_2, k_3\}$. 模仿定理1的证明过程, 可知此时误差系统渐进稳定, 即受控从系统(23)通过主动控制器可以达到与主系统(22)的反同步.

5 仿真实验结果

为了验证上述控制器的有效性, 作者举了三个数值仿真的例子. 在例子中, 选取时间步长为 $\tau = 0.001s$, 采用四阶 Runge - Kutta 法去求解三维自治方程组.

例1 选取 Lorenz 系统(4)的参数为 $a = 10, b = 8/3, c = 28$, 初始点为 $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0, 0, 5)$; Chen 系统(5)的参数为 $\alpha = 35, \beta = 3, \gamma = 28$, 初始点为 $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (10, 10, 10)$; $(k_1, k_2, k_3) = (5, 5, 5)$; 作者研究了 Lorenz 系统(4)和 Chen 系统(5)的异结构反同步. 图2为数值仿真结果. 由图2(a)~2(c)可见, 当 t 接近 $17s, 16s$ 和 $7s$ 时, 系统误差 $e_1(t), e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 已分别精确地稳定在零点, 即 Lorenz 系统(4)和 Chen 系统(5)达到了准确地反同步.

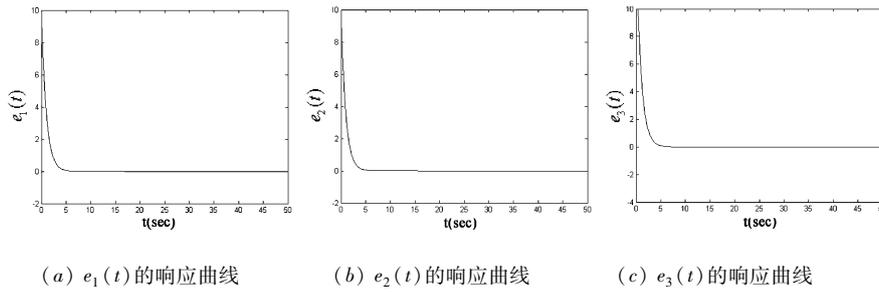


图2 Lorenz系统和Chen系统的反同步的仿真结果

Fig. 2 Simulation results of anti-synchronization between Lorenz system and Chen system

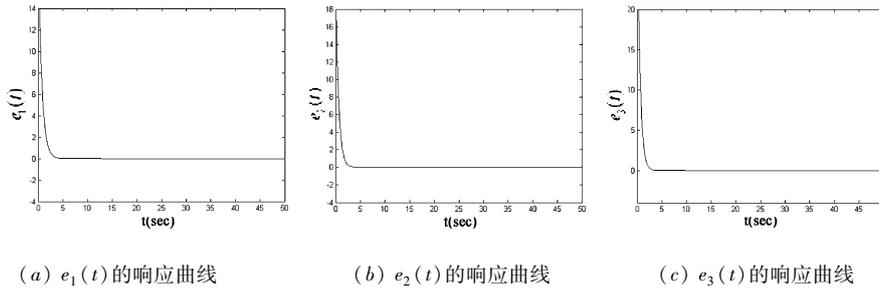


图3 Chen系统和Lü系统的反同步的仿真结果

Fig. 3 Simulation results of anti-synchronization between Chen system and Lü system

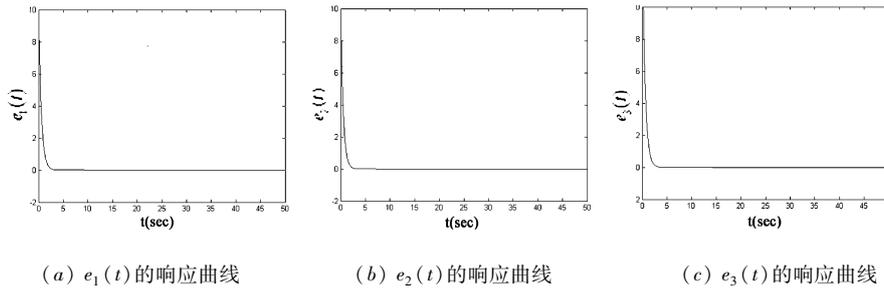


图4 Lü系统和Lorenz系统的反同步的仿真结果

Fig. 4 Simulation results of anti-synchronization between Lü system and Lorenz system

例2 选取Chen系统(16)的参数为 $\alpha = 35, \beta = 3, \gamma = 28$, 初始点为 $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0, 0, 15)$; 选取Lü系统(17)的参数为 $\rho = 36, \mu = 3, v = 20$, 初始点为 $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (20, 20, 20)$; $(k_1, k_2, k_3) = (7, 8, 9)$; 作者研究了Chen系统(16)和Lü系统(17)的异结构反同步. 图3为数值仿真结果. 由图3(a)~3(c)可见, 当接近13s, 4s和10s时, 系统误差 $e_1(t)$, $e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 已分别精确地稳定在零点, 即Chen系统(16)和Lü系统(17)达到了准确地反同步.

例3 选取Lü系统(22)的参数为 $\rho = 36, \mu = 3, v = 20$, 初始点为 $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0, 0, 5)$; 选取Lorenz系统(23)的参数为 $a = 10, b = 8/3, c = 28$, 初始点为 $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (10, 10, 10)$; $(k_1, k_2, k_3) = (9, 9, 9)$; 作者研究了Lü系统(22)和Lorenz系统(23)的异结构反同步.

图4为数值仿真结果. 由图4(a)-4(c)可见, 当接近9.5s, 7.5s和14s时, 系统误差 $e_1(t)$, $e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 已分别精确地稳定在零点, 即Lü系统(22)和Lorenz系统(23)达到了准确地反同步.

6 结论

本文针对两个异构的三维自治系统的反同步问题, 设计了一类主动控制器, 并从理论上证明了该控制方案可使异构的主从混沌系统的反同步状态误差按指数收敛. 该控制器形式简单, 易于实现, 且收敛速度快, 控制范围宽. 此方法可以适用于其它混沌系统, 且可以进一步推广到含更多个状态变量的系统之间的反同步问题. 通过对Lorenz系统, Chen系统和Lü系统相互之间的两两异结构反同步的仿真实验, 验证了该控制器的有效性.

参 考 文 献

- 1 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization of chaotic systems. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821 ~ 830
- 2 Carroll T L, Pecora L M. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1991, 38(4): 453 ~ 456
- 3 Chen G, Dong X. On feedback control of chaotic continuous-time systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1993, 40(9): 591 ~ 601
- 4 Fuh CC, Tung PC. Controlling chaos using differential geometric method. *Physical Review Letters*, 1995, 75(16): 2952 ~ 2955
- 5 Chen G, Dong X. From chaos to order: methodologies, perspectives and applications. Singapore: World Scientific, 1998, 12 ~ 27
- 6 王光瑞, 于熙龄, 陈式刚. 混沌的控制、同步与利用. 北京: 国防工业出版社, 2001, 281 ~ 455 (Wang G R, Yu X L, Chen S G. Chaotic Control, Synchronization and Utilizing. Beijing: National Defence Industry Press, 2001, 281 ~ 455 (in Chinese))
- 7 王兴元. 复杂非线性系统中的混沌. 北京: 电子工业出版社, 2003, 91 ~ 113 (Wang X Y. Chaos in the Complex Non-linearity System. Beijing: Electronics Industry Press, 2003, 91 ~ 113 (in Chinese))
- 8 Shinbrot T, Grebogi C, Ott E, et al. Using small perturbations to control chaos. *Nature*, 1993, 363(6): 411 ~ 417
- 9 Michael G R, Arkady S P, Jurgen K. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 1997, 78(22): 4193 ~ 4196
- 10 Yu X, Song Y. Chaos synchronization via controlling partial state of chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2001, 11(6): 1737 ~ 1741
- 11 Yang X S. On the existence of generalized synchronizer in unidirectionally coupled systems. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, 122(1): 71 ~ 79
- 12 Ho M C, Hung Y C, Chou C H. Phase and anti-phase synchronization of two chaotic systems by using active control. *Phys. Lett. A*, 2002, 296(1): 43 ~ 48
- 13 Shahverdiev E M, Sivaprakasam S, Shore K A. Lag synchronization in time-delayed systems. *Phys. Lett. A*, 2002, 292(6): 320 ~ 324
- 14 Xu D L, Li Z. Controlled projective synchronization in non-partially-linear chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(6): 1395 ~ 1402
- 15 Chen S, Wang F, Wang C P. Synchronizing strict-feedback and general strict-feedback chaotic systems via a single controller. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 20(2): 235 ~ 243
- 16 Belykh V N, Chua L O. New type of strange attractor from a geometric model of chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1992, 2(3): 697 ~ 704
- 17 Kim C M, Rim S H, Key W. Anti-synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Lett. A*, 2003, 320(1): 39 ~ 46
- 18 Hu J, Chen S H, Chen L. Adaptive control for anti-synchronization of Chua's chaotic system. *Phys. Lett. A*, 2005, 339(4): 455 ~ 460
- 19 Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *J Atmos Sci*, 1963, 20: 130 ~ 141
- 20 Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1465 ~ 1466
- 21 Lü J, Chen G. A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(3): 659 ~ 661
- 22 Vanecek A, Celikovsk? S. Control systems: From linear analysis to synthesis of chaos. London: Prentice-Hall, 1996, 116 ~ 167

ANTI-SYNCHRONIZATION OF THREE-DIMENSIONAL AUTONOMOUS DIFFERENT-STRUCTURAL CHAOTIC SYSTEMS VIA ACTIVE CONTROL *

Wang Xingyuan Wang Yong

(School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract This paper analyzed the anti-synchronization of the three-dimensional autonomous different-structural chaotic systems, and achieved the anti-synchronization of Lorenz system, Chen system and Lü system with each other via active control. Numerical simulations were provided for illustration and verification of the proposed method.

Key words three-dimensional autonomous system, different-structural, anti-synchronization, active control

Received 24 July 2006, revised 12 October 2006.

* The project supported by the National Science Foundation of China(60573172) and Superior University Science Technology Research Project of Liaoning province(20040081)