

时间 - 空间混和有限元*

钟万勰 高强

(大连理工大学工业装备结构分析重点实验室, 大连 116023)

摘要 分析动力学与分析结构力学在数学理论上是一致的. 振动与结构力学问题, 其实只是一个符号之差. 分析力学方法对两方面可通用. 双曲型偏微分方程与椭圆型偏微分方程也是差一个符号. 虽然性质不同, 但分析上有共同之处. 本文提出在有限元分析方面, 不用对时间、空间分别离散而是组成混和的时空混和有限元网格. 数值结果表明, 时空混和有限元是有前途的.

关键词 分析结构力学, 时空混和元, 双曲型偏微分方程, 多尺度

引言

分析结构力学的提出^[1], 表明结构力学也有分析力学的整套理论. 文献[2]指出, 分析动力学与分析结构力学在数学理论上是一致的, 并且传统经典分析力学有局限性:

- * 它奠基于连续时间的系统, 但应用力学有限元、控制与信号处理等需要离散系统;
- * 动力学总是考虑同一个时间的位移向量, 但应用力学有限元需要考虑不同时间的位移向量;
- * 动力学要求体系的维数自始至终不变, 但应用力学有限元需要变动的维数;
- * 它认为物性是即时响应的, 但时间滞后是常见的物性, 例如粘弹性、控制理论等.

这些局限性表明传统分析力学还需要大力发展. 文献[3, 4]指出, 对时间坐标运用有限元法也取得了好的数值效果. 然而分别对空间坐标与时间坐标离散而生成时间 - 空间坐标, 是规则的网格. 将两种坐标混和在一起的有限元离散, 尚需探讨.

振动与结构力学问题, 其实只是一个符号之差^[2]. 分析力学方法对两方面可通用. 其实双曲型偏微分方程与椭圆型偏微分方程也是差一个符号. 它们性质不同, 但分析上有共同之处. 空间坐标的有限元离散已经广泛使用, 但时间 - 空间混和的有限元离散在实践与理论方面有许多问题. 本文要予以初步的数值与理论探讨, 其目的是指出方向, 有

待能人发挥.

1 时空混和元

根据分析结构力学, 对时间坐标的离散也可运用有限元法^[1-4]. 但仍是时间与空间分别离散, 空间网格节点只能取相同时间坐标值而离散. 鉴于不同空间坐标的网格密度, 应采用不同的时间离散, 从而难于遵从相同时间的离散. 结构力学有限元的网格划分离散, 本不必考虑相同坐标值的, 因此可灵活地网格离散. 故应考虑综合的时间 - 空间坐标的离散. 因为是时间 - 空间混和在一起的有限元离散, 时 - 空混和, 不妨称之为时空混和 (Harmony) 有限元, 故可称时空混和元, 更简单些混和元.

时间有限元^[3, 4]的效果已经表明其适用性. 根据上文的分析, 应考虑对时间 - 空间综合空间运用有限元离散. 时空混和元涵盖了时间域与空间域. 有限元的优点是有变分原理支持, 时空混和元的变分原理其实就是动力学的变分原理.

本文考虑如下形式的双曲型波动方程

$$\partial^2 w / \partial t^2 - c(x)^2 \partial^2 w / \partial x^2 + k(x) \cdot w = 0 \quad (0 < x < L, 0 < t) \quad (1)$$

并具有适当的边界条件和初始条件. 波动方程相应的 Lagrange 函数仍是动能减势能, 它们分别为

$$P_E = \int_0^L [(c(x) \partial w / \partial x)^2 + k(x) w^2] dx / 2, \\ T_E = \int_0^L i w dx / 2, L(w, \dot{w}) = T_E - P_E \quad (2)$$

其中上面一点表示对时间偏导数. 变分原理要求作

2006-12-11 收到第1稿.

* 国家重点基础研究专项经费资助项目(2005CB321704), 国家重点自然科学基金资助项目(10632030)

用量取极值,即

$$A = \int_0^L L(w, \dot{w}) dt = 0, \quad \delta A = 0 \quad (3)$$

有限元离散可运用于该变分原理. 区别在于, 静力学有限元运用最小总势能原理, 取最小在数学方面容易理解. 而 Hamilton 变分原理则本来也只是要求一次变分为零, 故用有限元法并无不妥.

最简单当然仍是规则网格. 空间离散后, 势能 P_E 是正定的. 它对作用量的贡献还要积分后取负号, 故积分后时空混和元势能产生的作用量部分一定是负的. 动能 T_E 的有限元插值积分后仍为正定, 其对作用量的积分仍为正定. 作用量 A 是不正定的. 这是因为时间两端皆用位移作为未知数. 如果对时间大的一端(称步进端)的位移与作用量 A 运用 Legendre 变换, 则给出的时间区段混和作用量(混合能)的 2 次型便成为正定. 这是分析力学的常规.

离散的常规是互相无关地分别对时间与空间离散. 在混和的时间 t -空间 x 中观察, 给出的是规则网格, 或规则的时空混和元. 所谓规则, 即其单元的边或者是同时间的, 或者是同空间坐标的. 即一维空间坐标是长方形单元, 多维空间坐标则为柱型.

例如对空间坐标用有限元插值, 其变形势能用有限元计算, 并生成振动方程求解. 这是对时间坐标运用了半解析法. 然后, 对时间坐标的积分则有本征向量展开(线性振动)或逐步积分. 逐步积分常规做法是用差分法, 故不是有限元. 分析结构力学表明, 可对时间坐标用有限元法插值, 成为时间有限元. 它相当于对规则的时空混和元采用双线性插值. 当时间步长非常小时, 其结果相当于半解析法. 动力学常常采用集中质量法或协调质量法考虑节点处的质量, 两类方法给出的数值结果皆可接受. 线性插值元给出的是协调质量法.

2 双曲型偏微分方程的特征线理论概要

时空混和元应遵循分析理论, 在文献[5]中有深入讲述. 双曲型偏微分方程理论的主要特点是其特征线, 其中心线称为蒙日轴(Monge axis, pencil). 在空间多维时是其蒙日锥(Monge cone), 蒙日轴. 一般情况是 4 维(空间 3 维+时间 1 维), 比较复杂. 简单些, 如文献[5]在二维的条件下讨论, 已

可抓住主要特点了. 有限元网格在节点 P 有边, 其方向可区分为在蒙日锥内或蒙日锥外.

蒙日锥对方程(1)就是两条特征线, $\Delta x - \Delta t = 0$ 与 $\Delta x + \Delta t = 0$, 而蒙日轴就是 $\Delta x = 0$ 的 t 轴. 在 t 轴附近的蒙日锥内的边是时间类的边; 而在蒙日锥外的边是空间类边. 时间类的边一定指向时间增加方向, 而空间类边则不强调方向.

方程的积分虽然不强调同时推进, 但逐步积分的时间层次仍是必要的, 这与通常的椭圆型方程积分完全不同, 是双曲型方程的本性. 初值问题积分, 边界条件的提法也不同. 单元网格划分, 应注意时间是逐步积分的, 分层次的初值问题. 初值应是给出状态向量(离散后). 从分析结构力学的角度看, 每层次的积分是状态向量的变换. 层次步进的作用量(相当于结构力学的变形能), 其两端状态向量的变换应给出辛变换矩阵. 应注意, 辛矩阵要求层次位移向量的维数不变.

离散后, 步进积分的层次位移向量维数不变是一种限制, 但并非意味着全部层次皆为同一维数. 该问题可延后讨论. 现在应讨论时间-空间混和离散时, 边界条件的分类.

边界条件是给定于混和有限元网格边上的条件, 是边就应按特征线划分时间类边界与空间类边界. 不同边界应有不同的边界条件提法. 边界应是单元网格的边, 空间类边界是初值条件, 给定状态向量; 而时间类边界则是两端边界条件. 空间类边界对应于空间类边, 而时间类边界应是时间类边. 请参照著作[5]对双曲型偏微分方程的理论, 对线性方程的唯一性定理等. 也请对照下节例题中的边界条件提法.

初始条件并非一定要给出在同一时间, 而可在初始的全部时间类边界上给出. 两端边界条件也并非一定要在不动的确定点上给出, 例如变动边界问题, 在移动边界给定位移, 也可以.

3 双曲型偏微分方程例题

时空混和元就是有限元, 其效果应当用例题的数值结果来展示.

3.1 波动方程

设有下面的波动偏微分方程

$$\begin{aligned} \partial^2 w / \partial t^2 - \partial^2 w / \partial x^2 &= 0 \quad (0 < x < 1, 0 < t) \\ w(0, t) = 0, w(1, t) &= 0, w(x, 0) = 0, \dot{w}(x, 0) = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

为探讨起见,要比较时空混和元的某些常见划分情况. 此时连续本征解为 $\psi_i(x) = \sin(ix\pi/L)$. 泛函的 Lagrange 函数与变分原理为

$$L(w, \dot{w}) = \int_0^L [\dot{w}^2/2 - w^2] dx = T - U,$$

$$\delta \int L(w, \dot{w}) dt = 0 \quad (5)$$

其中一点和一撇分别表示对时间和空间的偏导数. 微分方程(4)是最典型的问题,有分析解,见图 1. 然而,若边界随时间而变化,则就无法分析求解了,下面会探讨. 首先认为是固定边界,用混和有限元求解,以便与分析解比较.

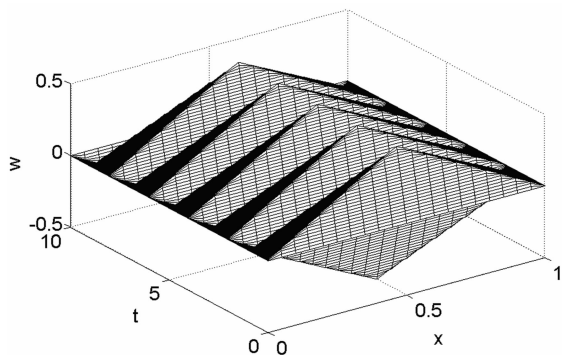


图 1 解析解的图形

Fig. 1 The profile of the analytical solution

最常见的是 n 等分的半解析离散,节点划分在 $x=0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, (n-1)\Delta x, n\Delta x$ 处的等长网格,线性插值离散. $(i-1, i)$ 的单元动能和单元变形能分别为

$$(\dot{w}_{i-1}^2 + \dot{w}_i^2 + \dot{w}_i \dot{w}_{i-1}) \cdot \Delta x / 6,$$

$$(w_{i-1}^2 + w_i^2 - 2w_i w_{i-1}) / 2\Delta x \quad (6)$$

导出微分方程后,可用精细积分法求解,近似计算结果是满意的,图形略.

对半解析法用时间有限元,取时间步长 Δt ,其 $(k, k+1)$ 的作用量为 $A_k = T_k - U_k$,其中动能和势能分别为

$$T_k = [(w_{k+1,i} - w_{k,i})^2 + (w_{k+1,i-1} - w_{k,i-1})^2 + (w_{k+1,i} - w_{k,i})(w_{k+1,i-1} - w_{k,i-1})] \cdot \Delta x / 6\Delta t$$

$$U_k = [(w_{k+1,i} - w_{k+1,i-1})^2 + (w_{k,i} - w_{k,i-1})^2 + (w_{k+1,i} - w_{k+1,i-1})(w_{k,i} - w_{k,i-1})] \cdot \Delta t / 6\Delta x \quad (7)$$

其结果也很好,并保辛. 矩形时空混和元的动能 T_k 与势能 U_k ,与半解析的时间有限元同. 故也给出很好的数值结果.

如果时-空混和元不用矩形单元,而用图 2 所示的三角形单元,则两个三角形单元的动能之和为

$$T'_k = [(w_{k+1,i} - w_{k,i})^2 + (w_{k+1,i-1} - w_{k,i-1})^2] \Delta x / 4\Delta t \quad (8)$$

而两个三角形单元的势能之和为

$$U'_k = [(w_{k+1,i} - w_{k+1,i-1})^2 + (w_{k,i} - w_{k,i-1})^2] \Delta t / 4\Delta x \quad (9)$$

虽然与矩形混和元不同,但相差不多,结果见图 3.

以上是对时间和空间坐标皆划分均匀网格. 如果将时间变动的三角形网格划分如图 4 所示,则积分给出的结果如图 5,也是满意的. 图 6 所示的网格由三角形和四边形两种单元组成,并且中间一层多两个节点,积分结果如图 7,结果同样是满意的. 图 4 和图 6 的网格划分体现了时空混和元的灵活性. 经验证,对于图 2 和图 4 给出的混合元网格, $t=0$ 和 $t=0.02$ 时刻的状态向量之间的传递矩阵是辛矩阵. 而图 6 的混合元网格,将 $t=0.025$ 一层的节点凝聚掉后, $t=0$ 和 $t=0.05$ 时刻的状态向量之间的传递矩阵也是辛矩阵. 混合元的保辛性质可以保证系统的总能量不会无限增加和减少,避免了人工阻尼的影响. 既然用有限元离散,不可能将全部细节都照顾到,故不能达到图 1 解析解出现的尖角.

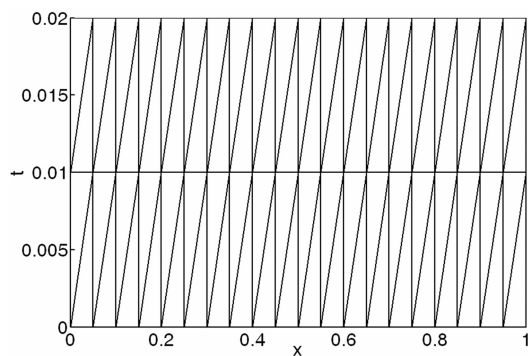


图 2 三角形网格

Fig. 2 Triangular mesh

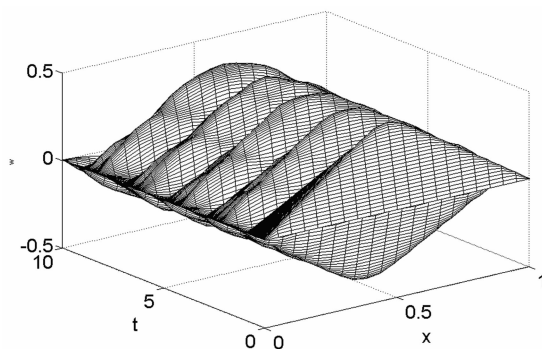


图 3 三角形混和元积分图

Fig. 3 The integral profile for harmony triangular mesh

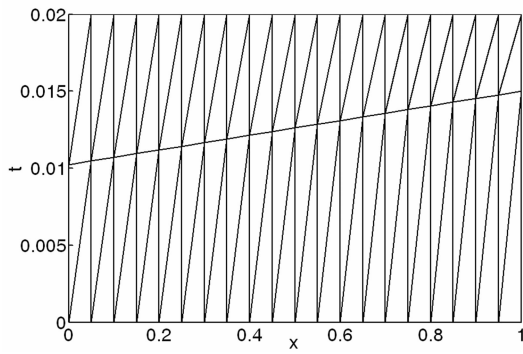


图4 非同时混和元网格

Fig. 4 Harmony mesh with different time

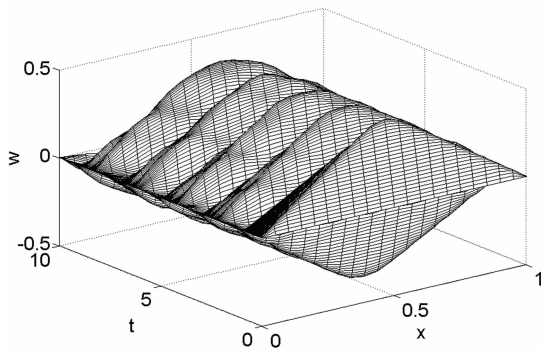


图5 非同时混和元网格的积分结果图

Fig. 5 The result for harmony mesh with different time

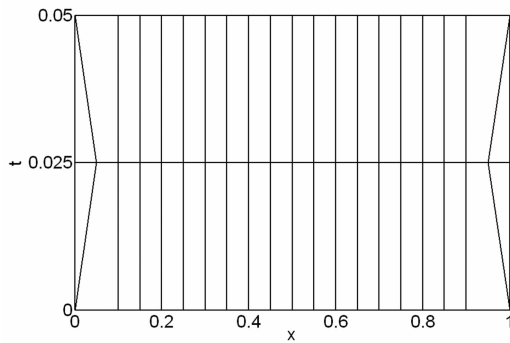


图6 不同自由度网格

Fig. 6 Harmony mesh with different degrees of freedom

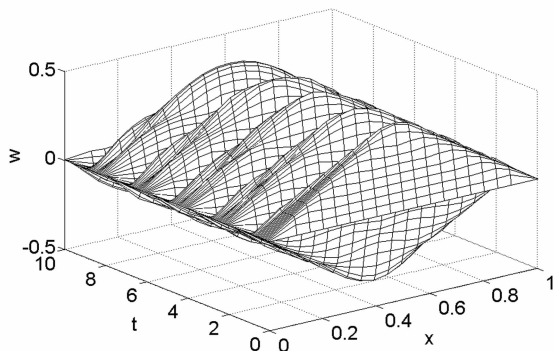


图7 不同自由度网格积分结果

Fig. 7 The integral result for harmony mesh with different degrees of freedom

3.2 变动边界问题与混和元

考虑如下变动边界问题. Timmy 拉小提琴, 滑音, 即移动压弦线的手指而产生. 方程为

$$\partial^2 w / \partial t^2 - c_0^2 \cdot \partial^2 w / \partial x^2 = 0 \quad (10)$$

时变的区域边界条件为 $w(0, t) = 0, w(x, t) = 0, x_r = 1 + v \sin(\omega_0 t)$, 初始条件为 $w(x, 0) = \sin(x\pi/L)$.

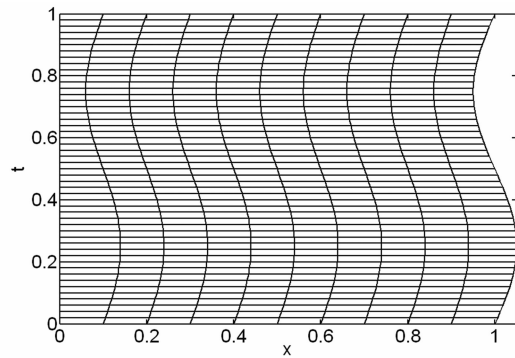


图8 $\omega_0 = 2\pi$ 时变边界不规则四边形网格

Fig. 8 Quadrangular mesh for time - dependent boundary with $\omega_0 = 2\pi$

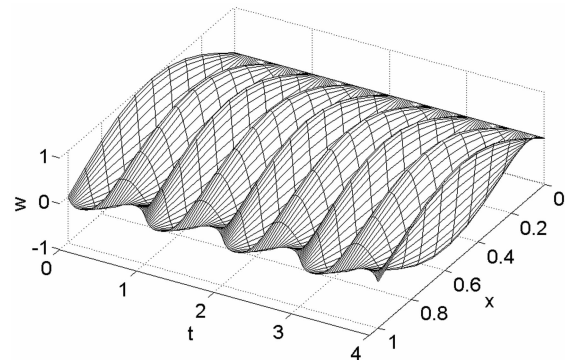


图9 变边界问题的波动响应

Fig. 9 The response of the time - dependent boundary problem

取各个参数为 $c_0^2 = 16, v = 0.05, \omega_0 = 2\pi$. 时变边界周期变化, 周期为 1, 故只需在一个周期内划分网格, 以后周期重复第一个周期的网格. 采用图 8 所示的网格, 其积分步长是 0.02, 计算结果如图 9. 当 $\omega_0 = 4\pi$ 时, 时变边界周期为 0.5, 采用的混合元网格如图 10, 积分结果如图 11. 这类似于发生了参数共振, 就是类似于共振的情况, 时间长了会发散. 这是由于当波形向上时压弦点向内, 表明对弦做了功; 而波形向下时压弦点向外, 并不做功. 因此总体说, 压弦点对系统做了功, 这在图形上已呈现.

变动边界问题解析求解很困难. 采用半解析方法, 先对空间离散然后再积分动力方程的方法也很难适应变动边界问题. 本文采用的时空混合元方法, 对于这类变动边界问题的处理是很方便和灵活的.

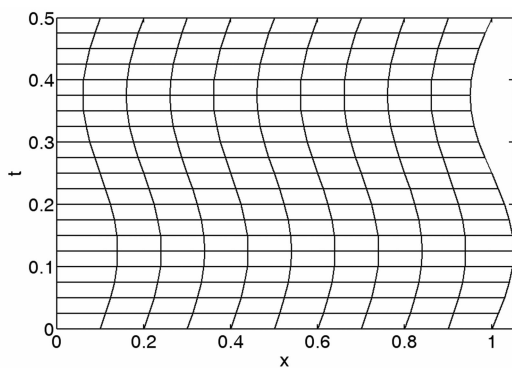


图 10 $\omega_0 = 4\pi$ 时变边界不规则四边形网格

Fig. 10 Quadrangular mesh for time - dependent boundary with $\omega_0 = 4\pi$

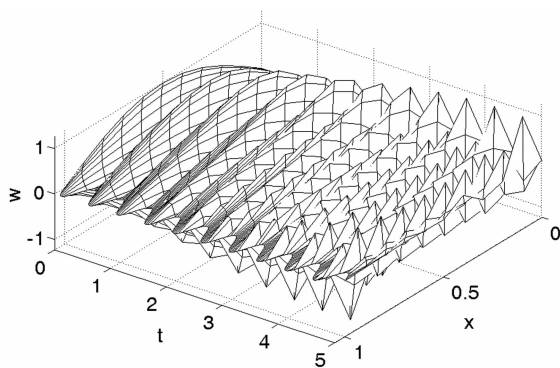


图 11 变边界问题的参数共振响应

Fig. 11 The resonance response of the time - dependent boundary problem

4 刚性双曲型偏微分方程例题

设在区域 $0 < x < 1, 0 < t$ 的偏微分方程

$$\begin{aligned} \partial^2 w / \partial t^2 - c(x)^2 \partial^2 w / \partial x^2 &= 0, \\ c^2(x) &= \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 400 & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

其中波速是变化的, $w(x, t)$ 是待求位移函数. 边界条件和初始条件为

$$\begin{aligned} w(0, t) &= 0, w(1, t) = 0, w(x, 0) = 0 \\ w(x, 0) &= \begin{cases} \sin(2\pi x) & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0.2 \sin(2\pi x) & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

从振动理论看, $x < 0.5$ 的半边与 $x > 0.5$ 是不同尺度的问题. 当然时间有限元的网格密度也应相差几倍. 在 $x = 0.5$ 附近应当有网格的过渡区. 这种课题, 在例如 FPU 问题^[2]中出现. 凡刚度或波速相差大时, 不同尺度的问题便会出现. 多尺度问题的求解是大家关心的课题. 如用有限元法求解. 传统方法是半解析的, 对时间坐标保持为连续, 而先对空间坐标有限元离散. 显然, $x > 0.5$ 部分波速大, 时间网格应加密. 然而半解析离散后, 通常对时间

积分运用差分. 时间积分规则的差分法, 例如 Crank - Nicolson、隐式差分、显式差分、多步差分法等. 最近的时间积分进展可见文献[5], 无非就是在此架构下的发展.

高刚度或高波速区的网格, 时间积分的时间步长要小, 而低刚度区域, 时间积分的步长相应地可以大些. 这样就出现不同的时间步长. 时间差分法求解只能用统一的步长, 但统一只能统一到高密度空间网格的时间步长. 这表明分别处理空间与时间的离散, 不够灵活. 以下采用混和元给出积分结果.

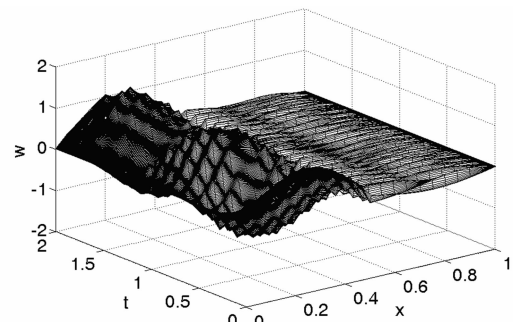


图 12 等步长混和元计算结果, 时间步长 0.001

Fig. 12 The result for harmony element with same time step 0.001

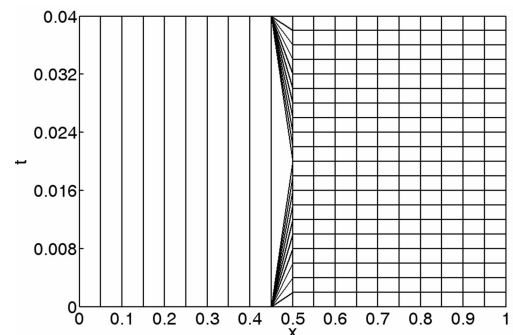


图 13 混和元网格

Fig. 13 The harmony element mesh

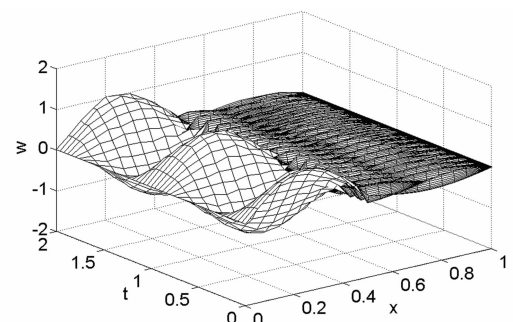


图 14 快慢区域不等步长混和元计算结果

Fig. 14 The result for harmony element with different time step

空间划分 20 个单元时, 两个区域用同步长混和元, 时间步长不能超过 0.0025, 这是由空间网格

宽度和 $c^2 = 400$ 决定的. 采用同步长混和元, 时间步长 0.001, 计算结果如图 12. 采用如图 13 所示的混和元网格, 两个区域的时间步长不同, 慢变区域的时间步长为 0.04, 而快变区域的时间步长为 0.002, 计算结果如图 14. 时间步长要满足 $\Delta t \leq \Delta x/c$, 本算例中快变区域 $c = 20$, 若用相同步长, 则最大步长为 0.0025. 而采用类似于图 13 的网格, 慢变区域可采用的最大步长为 0.05, 快变区域则可将 0.05 分 20 份. 慢变区域的步长提高 20 倍.

图 12 给出的是用小步长积分结果, $x < 0.5$ 的区域和 $x > 0.5$ 的区域时间尺度不同, 并且两个区域存在能量的交换. $x < 0.5$ 区域主要是慢变过程, 但也包含 $x > 0.5$ 区域传递的快变分量, $x < 0.5$ 区域响应的毛刺就是这些快变分量的体现. 而图 14 给出的结果, 在快变和慢变区域采用了不同步长混和元, 这相当于在慢变区域进行了平均, 故将毛刺平均掉.

设在区域 $0 < x < 1, 0 < t$ 的偏微分方程

$$\begin{aligned} \partial^2 w / \partial t^2 - \partial^2 w / \partial x^2 + k(x)w &= 0, \\ k &= \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 9999\pi^2 & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

其中刚度是变化的, $w(x, t)$ 是待求位移函数. 边界条件和初始条件仍然为方程(12).

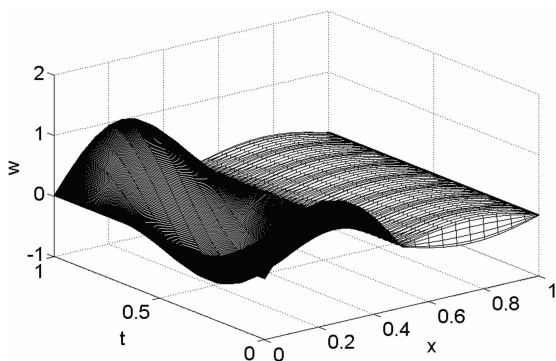


图 15 等步长混和元结果

Fig. 15 The result with same time step

空间划分 20 个单元, 采用同步长混和元, 时间步长为 0.002 的结果如图 15. 当时间步长为 0.011, 采用同步长混和元, 结果发散. 采用如图 13 所示的混和元网格, 计算结果如图 16. 如果是均匀介质, 也就是两个区间上 k 都是 0, 那么最大步长是 0.05. 现在刚性区域的 $k = 9999\pi^2$, 采用同步长 0.011 结果会发散. 而采用图 13 所示的混和元网格, 刚柔区间采用不同步长, 步长提高到 0.04.

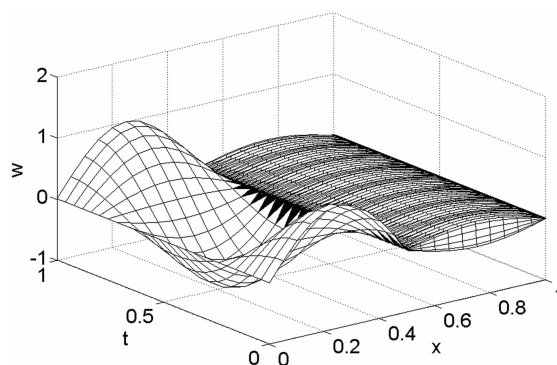


图 16 不等步长混和元结果

Fig. 16 The result with different time step

5 结论

本文提出在有限元分析方面, 不用对时间、空间分别离散, 而可组成混和的时空混和有限元网格. 静力学有限元运用最小总势能原理. 而混和元在时间和空间组成的综合空间中生成有限元网格, 然后利用 Hamilton 变分原理, 取一次变分为零, 导出混合元列式. 混合元列式矩阵的对称性, 保证了混合元保辛的性质. 在理论上具有双曲型偏微分方程特征线理论的基础; 而在数值例题表明, 时空混和有限元能灵活地处理变动边界问题和多尺度刚性问题.

参 考 文 献

- 1 钟万勰. 分析结构力学与有限元. 动力学与控制学报, 2004, 2(3): 1~8 (Zhong Wanxie. Analytical structural mechanics and finite element. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3): 1~8 (in Chinese))
- 2 钟万勰. 应用力学的辛数学方法. 北京: 高等教育出版社, 2006 (Zhong Wanxie. Symplectic solution methodology in applied mechanics. Beijing: higher education press, 2006 (in Chinese))
- 3 钟万勰, 姚征. 时间有限元与保辛. 机械强度, 2005, 27(2): 178~183 (Zhong Wanxie, Yao Zheng. Time domain FEM and symplectic conservation. *Journal of Mechanical Strength*, 2005, 27(2): 178~183 (in Chinese))
- 4 钟万勰, 高强. 约束动力系统的分析结构力学积分. 动力学与控制学报, 2006, 4(3): 193~200 (Zhong Wanxie, Gao Qiang. Integration of constrained dynamical system via analytical structural mechanics. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(3): 193~200 (in Chinese))
- 5 R. Courant. *Methods of mathematical physics-II*. New

York; Interscience publishers, 1962

6 E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner. Geometric numeri-

cal integration-structure preserving algorithms for ordinary

differential equations-2nd Ed. Berlin; Springer, 2006

HARMONY ELEMENT METHOD FOR TIME AND SPACE DOMAIN *

Zhong Wanxie Gao Qiang

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract The mathematical theory is the same for analytical dynamic mechanics and analytical structural mechanics. In fact, the difference is just a symbol for vibration and structural mechanics. Therefore, the method of analytical mechanics can be applied to both sides. The difference for hyperbolic and elliptic partial differential equations is also a sign. Although they are different in nature, there are common theories to analyze them. This paper presents that it is not necessary to discrete time and space domain separately for the finite element analysis and that the time and space domain can be discrete mixed to form harmony finite element mesh. The numerical results show that the harmony finite element method is a promising method.

Key words analytical structural mechanics, time - space harmony element, hyperbolic partial differential equation, multiscale