

# 不确定参数下的四维超混沌吕系统的最优同步\*

高洁<sup>1,2</sup> 陆君安<sup>1</sup>

(1. 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072) (2. 西南石油大学理学院, 南充 643000)

**摘要** 研究了最新提出的超混沌吕系统的最佳同步问题. 利用哈密顿-雅可比-贝尔曼方程, 对具有不确定参数的超混沌吕系统设计了最优同步的方案, 分别得到了无限时间区间和有限时间区间上的最优控制器和参数控制律. 数值仿真验证了理论分析的正确性.

**关键词** 超混沌吕系统, 哈密顿-雅可比-贝尔曼方程, Riccati 方程, 最优控制

## 引言

自从1990年 Grebogi 等人提出了 OGY 方法<sup>[1]</sup> 以及 Pecora 和 Carroll 提出了关于混沌系统同步的开创性工作<sup>[2]</sup> 以来, 混沌控制与同步的理论研究和应用达到飞速发展, 各种控制和同步方法相继问世. 有代表性的包括反馈控制法、微分几何方法、最优控制法、脉冲控制法、自适应控制、滑模控制法和模糊控制法等<sup>[3-10]</sup>, 混沌控制与同步已成为非线性动力学的一个十分活跃的领域.

由于超混沌系统具有高性能、高安全性以及高效率, 它在非线性电路、保密通讯、激光、神经网络以及生物系统等领域中具有广阔的应用前景, 引起了广泛的注意. 典型的例子有四维的超 Rossler 系统<sup>[11]</sup>, 四维的超 Lorenz-Haken 系统<sup>[12]</sup>, 四维超电路<sup>[13]</sup>, 以及四维的超 Chen 系统<sup>[14]</sup>. 最近, 陈爱敏等人提出了超吕混沌系统<sup>[15]</sup>.

本文利用哈密顿-雅可比-贝尔曼方程, 对最新提出的超混沌吕系统设计最优同步方案, 数值仿真验证了理论分析的正确性.

## 1 超混沌吕系统

所谓超混沌系统必须满足下面两个条件:

- (1) 状态方程的维数至少是4维;
- (2) 系统至少有两个正的 Lyapunov 指数并且所有 Lyapunov 指数之和小于零.

最近文献<sup>[15]</sup>提出的超混沌吕系统为:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x - y) + \mu \\ \dot{y} = -xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \\ \dot{u} = xz + du \end{cases} \quad (1)$$

这个系统是在 Lü 系统<sup>[16]</sup>的基础上, 在第一个方程加上一个控制器  $u$ , 第二、三个方程中不含控制器, 再增加第四个方程中含有控制器  $u$ . 其中参数  $a, b, c$  取为 Lü 系统的参数, 参数  $d$  是待定的控制增益参数. 通过对该系统的动力学分析, 包括分岔图, 李雅普诺夫指数谱, 庞加莱映射, 以及电路模拟实验证实这个系统具有超混沌特性. 设系统的 Lyapunov 指数为  $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$ , 并且满足  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ . 当  $a=36, b=3, c=20, -0.35 < d \leq 1.30$  时,  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 < 0$  并且  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 < 0$ . 因此我们可称系统(1)为超混沌 Lü 系统.

## 2 超 Lü 混沌系统的最佳同步

### 2.1 在无限时间区间上的最佳同步

下面我们利用最优反馈控制方法, 求出使两个超混沌吕系统在参数不确定的情况下达到最优同步. 设  $x_1, y_1, z_1, \mu_1$  是驱动系统的状态变量,  $a_i (i=1, 2, 3, 4)$  是其中的参数; 设  $x_2, y_2, z_2, \mu_2$  是响应系统的状态变量,  $\hat{a}_i (i=1, 2, 3, 4)$  是响应系统中的未知参数, 两个系统如下:

$$\text{驱动系统} \begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_1 = -x_1 y_1 + a_3 y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - a_2 z_1 \\ \dot{u}_1 = x_1 z_1 + a_4 u_1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{响应系统} \begin{cases} \dot{x}_2 = \hat{a}_1(x_2 - y_2) + u_2 + v_1 \\ \dot{y}_2 = -x_2 z_2 + \hat{a}_3 y_2 + v_2 \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \hat{a}_2 z_2 + v_3 \\ \dot{u}_2 = x_2 z_2 + \hat{a}_4 u_2 + v_4 \end{cases} \quad (3)$$

其中  $v_i (i=1, 2, 3, 4)$  是使系统 (2) 和系统 (3) 在要求的时间区间上达到最优同步所需要的控制输入.

设误差状态变量  $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1, e_4 = u_2 - u_1$ , 由系统 (2) 和系统 (3) 我们得到误差系统如下:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (\hat{a}_1 - a_1)(y_1 - x_1) + \hat{a}_1(e_2 - e_1) + e_4 + v_1 \\ \dot{e}_2 = (\hat{a}_3 - a_3)y_1 - e_1 e_3 - e_3 x_1 + \hat{a}_3 e_2 - e_1 z_1 + v_2 \\ \dot{e}_3 = e_1 e_2 + x_1 e_2 - (\hat{a}_2 - a_2)x_1 + y_1 e_1 - \hat{a}_2 e_3 + v_3 \\ \dot{e}_4 = (\hat{a}_4 - a_4)u_1 + e_1 e_3 + x_1 e_3 + z_1 e_1 + \hat{a}_4 e_4 + v_4 \end{cases} \quad (4)$$

设

$$\begin{cases} V_1 = \hat{a}_1(e_2 - e_1) + e_4 + v_1 \\ V_2 = \hat{a}_3 e_2 - e_1 z_1 + v_2 \\ V_3 = y_1 e_1 - \hat{a}_2 e_3 + v_3 \\ V_4 = e_1 e_3 + x_1 e_3 + z_1 e_1 + \hat{a}_4 e_4 + v_4 \end{cases} \quad (5)$$

于是, 误差系统就简化成下面形式:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (\hat{a}_1 - a_1)(y_1 - x_1) + V_1 \\ \dot{e}_2 = (\hat{a}_3 - a_3)y_1 - e_1 e_3 - e_3 x_1 + V_2 \\ \dot{e}_3 = e_1 e_2 + x_1 e_2 - (\hat{a}_2 - a_2)x_1 + V_3 \\ \dot{e}_4 = (\hat{a}_4 - a_4)u_1 + V_4 \end{cases} \quad (6)$$

选择下式作为我们的性能指标函数:

$$I = \int_{t_0}^{+\infty} \sum_{i=1}^4 [c_i e_i^2 + k_i (\hat{a}_i - a_i)^2 + n_i V_i^2] dt \quad (7)$$

其中  $n_i, c_i, k_i (i=1, 2, 3, 4)$  是正实数.

下面我们的目的就是寻求适当的控制输入使这个性能指标达到极小. 设  $E(\vec{\hat{a}}; t_0)$  使上式达到极小时的函数, 即

$$E(\vec{\hat{a}}; t_0) = \min_V \int_{t_0}^{+\infty} \sum_{i=1}^4 [c_i e_i^2 + k_i (\hat{a}_i - a_i)^2 + n_i V_i^2] dt \quad (8)$$

其中  $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ . 实际上, 我们可以把  $E(\vec{\hat{a}}; t_0)$  看成初始时刻为  $t_0$ , 初始状态为  $(\vec{e}(t_0), \vec{\hat{a}}(t_0))$  时性能指标函数达到极小值时的函数, 所以可以把  $E(\vec{\hat{a}})$  作为误差系统的李雅谱诺夫函数, 利用李雅谱诺夫贝尔曼技巧<sup>[17]</sup>, 我们得到

$$\min_V \left\{ \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial E}{\partial t} e_i + \frac{\partial E}{\partial \hat{a}_i} \hat{a}_i \right) + \sum_{i=1}^4 [c_i e_i^2 + k_i (\hat{a}_i - a_i)^2 + n_i V_i^2] \right\} = 0 \quad (9)$$

设  $V_i^* (i=1, 2, 3, 4)$  为所需的最优控制器, 所以

$$\left. \frac{\partial}{\partial V_i} \right|_{V_i=V_i^*} \left\{ \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial E}{\partial t} e_i + \frac{\partial E}{\partial \hat{a}_i} \hat{a}_i \right) + \sum_{i=1}^4 [c_i e_i^2 + k_i (\hat{a}_i - a_i)^2 + n_i V_i^2] \right\} = 0 \quad (10)$$

由 (10) 式我们可以得到

$$V_i^* = -\frac{1}{2n_i} \frac{\partial E}{\partial e_i} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (11)$$

我们发现下面这个方程可以作为系统的 Lyapunov 方程

$$E(\vec{\hat{a}}) = \sum_{i=1}^4 [\alpha_i e_i^2 + \beta_i (\hat{a}_i - a_i)^2] \quad (12)$$

其中  $\alpha_i, \beta_i (i=1, 2, 3, 4)$  是正实数.

这样当  $\hat{a}_i (i=1, 2, 3, 4)$  是时变的并且满足下面的方程时:

$$\begin{cases} \beta_1 \dot{\hat{a}}_1 = -\frac{1}{2} k_1 (\hat{a}_1 - a_1) - \alpha_1 e_1 (y_1 - x_1) \\ \beta_2 \dot{\hat{a}}_2 = -\frac{1}{2} k_2 (\hat{a}_2 - a_2) + \alpha_3 e_3 z_1 \\ \beta_3 \dot{\hat{a}}_3 = -\frac{1}{2} k_3 (\hat{a}_3 - a_3) - \alpha_2 e_2 y_1 \\ \beta_4 \dot{\hat{a}}_4 = -\frac{1}{2} k_4 (\hat{a}_4 - a_4) - \alpha_4 e_4 u_1 \end{cases} \quad (13)$$

系统 (4) 和系统 (13) 由一个特解:

$$\begin{aligned} e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0, \quad \hat{a}_1 = a_1, \\ \hat{a}_2 = a_2, \quad \hat{a}_3 = a_3, \quad \hat{a}_4 = a_4 \end{aligned} \quad (14)$$

把式 (12) 代入 (10), 再由式 (4) 和式 (13), 我们得到最优的控制满足下面的等式:

$$\begin{cases} n_1 v_1^* = -n_1 \hat{a}_1 (e_2 - e_1) - n_1 e_4 - \alpha_1 e_1 \\ n_2 v_2^* = -n_2 \hat{a}_3 e_2 + n_2 e_1 z_1 - \alpha_2 e_2 \\ n_3 v_3^* = -n_3 y_1 e_1 + n_3 \hat{a}_2 e_3 - \alpha_3 e_3 \\ n_4 v_4^* = -n_4 e_1 e_3 - n_4 x_1 e_3 - n_4 z_1 e_1 - n_4 \hat{a}_4 e_4 - \alpha_4 e_4 \end{cases} \quad (15)$$

其中  $\alpha_i, n_i, c_i (i=1, 2, 3, 4)$  满足下面的条件:  $\alpha_1 = \alpha_2, \alpha_i = \sqrt{n_i c_i} (i=1, 2, 3, 4)$ .

在非线性控制器 (15) 的作用下, 性能指标  $I$  达到极小值. 下面我们来证控制器 (15) 使系统 (4) 和系统 (13) 在平衡状态 (14) 下是渐近稳定的. 因为

$$\dot{E} = -\sum_{i=1}^4 [2c_i e_i^2 + k_i (\hat{a}_i - a_i)^2] \leq 0 \quad (16)$$

并且当且仅当在状态(14)下是等于零的. 因此, 由 LaSalle 不变原理<sup>[18]</sup>, 可以判定在控制器(15)作用下系统(4)和系统(13)在平衡状态(14)是全局渐近稳定的.

### 2.2 在有限时间区间上的最优同步

在这一部分, 我们将要研究的是在区间上 $[0, T]$ , 寻求最优控制器使得误差系统和参数时变系统在平衡状态下是渐近稳定的, 并且使性能指标达到最小值. 选定

$$J = \int_0^T \sum_{i=1}^4 [(\hat{a}_i - a_i)^2 + e_i^2 + kV_i^2] dt \quad (17)$$

作为性能指标, 其中  $k$  是正实数. 设  $\phi(\vec{e}, \vec{\hat{a}}, t)$  是性能指标沿着误差系统和参数时变系统的最优轨道达到极小值时的函数, 即

$$\phi = \min_V \int_0^T \sum_{i=1}^4 [(\hat{a}_i - a_i)^2 + e_i^2 + kV_i^2] dt \quad (18)$$

设  $V_i^* (i=1, 2, 3, 4)$  为所需的最优控制器. 在这个最优控制器的作用下, 函数  $\phi$  满足下面的哈密顿-雅可比-贝尔曼方程<sup>[17]</sup>:

$$\min_V \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} e_i + \frac{\partial \phi}{\partial \hat{a}_i} \hat{a}_i \right) + \sum_{i=1}^4 [e_i^2 + (\hat{a}_i - a_i)^2 + kV_i^2] \right\} = 0 \quad (19)$$

其中

$$V_i^* = -\frac{1}{2k} \frac{\partial E}{\partial e_i} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (20)$$

函数  $\phi(\vec{e}, \vec{\hat{a}}, t)$  必须满足边界条件:

$$\phi(\vec{e}, \vec{\hat{a}}, T) = 0 \quad (21)$$

偏微分方程(19)有下面这样的解:

$$\phi(\vec{e}, \vec{\hat{a}}, t) = \sqrt{k} \zeta(t) \sum_{i=1}^4 [e_i^2 + (\hat{a}_i - a_i)^2] \quad (22)$$

其中  $\zeta(t)$  满足 Riccati 方程:

$$\sqrt{k} \frac{d\zeta}{dt} - \zeta^2 + 1 = 0 \quad (23)$$

并且  $\hat{a}_i(t)$  满足下面的微分方程组:

$$\begin{cases} 2\sqrt{k}\dot{\hat{a}}_1 = -(\hat{a}_1 - a_1) \tanh\left[\frac{\alpha(T-t)}{\sqrt{k}}\right] - 2\sqrt{k}e_1(y_1 - x_1) \\ 2\sqrt{k}\dot{\hat{a}}_2 = -(\hat{a}_2 - a_2) \tanh\left[\frac{\alpha(T-t)}{\sqrt{k}}\right] + 2\sqrt{k}e_3 z_1 \\ 2\sqrt{k}\dot{\hat{a}}_3 = -(\hat{a}_3 - a_3) \tanh\left[\frac{\alpha(T-t)}{\sqrt{k}}\right] - 2\sqrt{k}e_2 y_1 \\ 2\sqrt{k}\dot{\hat{a}}_4 = -(\hat{a}_4 - a_4) \tanh\left[\frac{\alpha(T-t)}{\sqrt{k}}\right] - 2\sqrt{k}e_4 u_1 \end{cases} \quad (24)$$

把式(20)、(23)、(22)和方程组(24)代入到偏微分方程(19)中, 我们得到最优控制器:

$$\begin{cases} V_1^* = -e_4 - \hat{a}_1(e_2 - e_1) - \frac{1}{\sqrt{k}} \tanh\left[\frac{\alpha(T-t)}{\sqrt{k}}\right] e_1 \\ V_2^* = e_1 z_1 - \hat{a}_3 e_2 - \frac{1}{\sqrt{k}} \tanh\left[\frac{\alpha(T-t)}{\sqrt{k}}\right] e_2 \\ V_3^* = -y_1 e_1 + \hat{a}_2 e_3 - \frac{1}{\sqrt{k}} \tanh\left[\frac{\alpha(T-t)}{\sqrt{k}}\right] e_3 \\ V_4^* = -x_1 e_3 - \hat{a}_4 e_4 - z_1 e_1 - z_1 e_3 - \frac{1}{\sqrt{k}} \tanh\left[\frac{\alpha(T-t)}{\sqrt{k}}\right] e_4 \end{cases} \quad (25)$$

我们把  $\phi(\vec{e}, \vec{\hat{a}}, t)$  作为系统的 Lyapunov 方程, 经过一系列的运算得到

$$\phi = -\sum_{i=1}^4 [(\hat{a}_i - a_i)^2 + [1 + \tanh\left[\frac{\alpha(T-t)}{\sqrt{k}}\right]] e_i^2] \leq 0 \quad (26)$$

并且  $\phi$  当且仅当在平衡状态下等于零.

因此, 由 LaSalle 不变原理<sup>[18]</sup>, 在区间上 $[0, T]$ , 控制器(25)使系统(4)和系统(24)在平衡状态(14)下是渐近稳定的, 并且使性能指标(17)达到最小值.

### 3 数值仿真

为了更好地理解这个最优同步机制, 这一节将从图形上展示在任意初始状态下误差系统和参数时变系统的数值结果. 图1和图2是无限时间区间上误差系统和参数时变系统的图形. 其中参数为

$$\begin{aligned} n_1 = 1 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 2 \quad n_4 = 4, \\ c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 2 \quad c_4 = 4 \\ k_1 = 1 \quad k_2 = 1 \quad k_3 = 2 \quad k_4 = 5 \\ \beta_1 = 1 \quad \beta_2 = 2 \quad \beta_3 = 3 \quad \beta_4 = 4 \end{aligned}$$

初始状态为

$$\begin{aligned} (x_1(0), y_1(0), z_1(0), \mu_1(0)) &= (0.3, 2.5, 3.2, 0.2), \\ (x_2(0), y_2(0), z_2(0), \mu_2(0)) &= (2.5, 4, 1, 4.2); \\ (e_1(0), e_2(0), e_3(0), e_4(0)) &= (2.2, 1.5, -2.2, 4), \\ (\hat{a}_1(0), \hat{a}_2(0), \hat{a}_3(0), \hat{a}_4(0)) &= (30, 2, 15, 1.2) \end{aligned}$$

图3和图4是有限时间区间上误差系统和参数时变系统的图形.

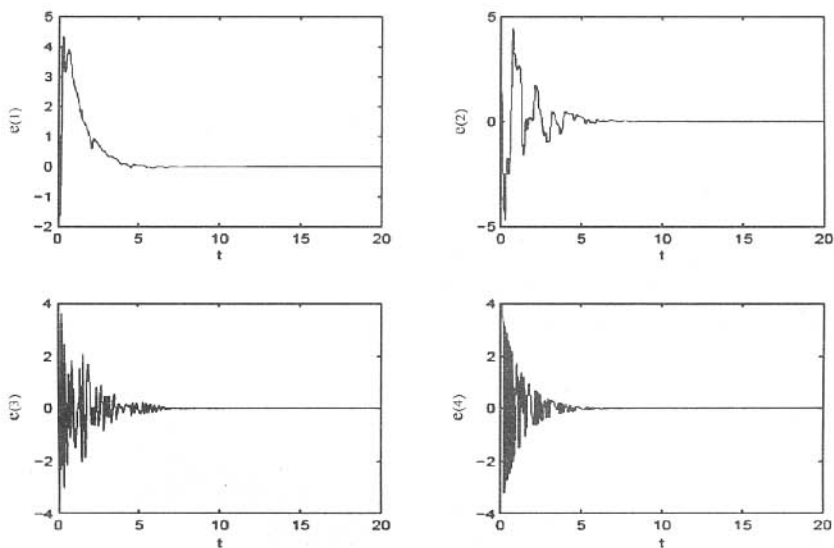


图 1 在无限时间区间上最优同步时误差系统

Fig. 1 The error system when the system reaches optimal synchronization on the infinite time interval

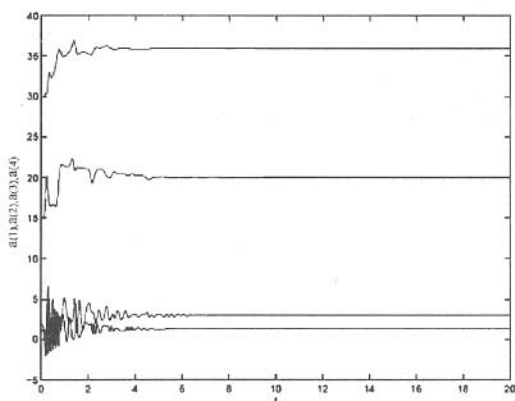


图 2 在无限时间区间上最优同步时参数时变系统

Fig. 2 The updated parameters when the system reaches optimal synchronization on the infinite time interval

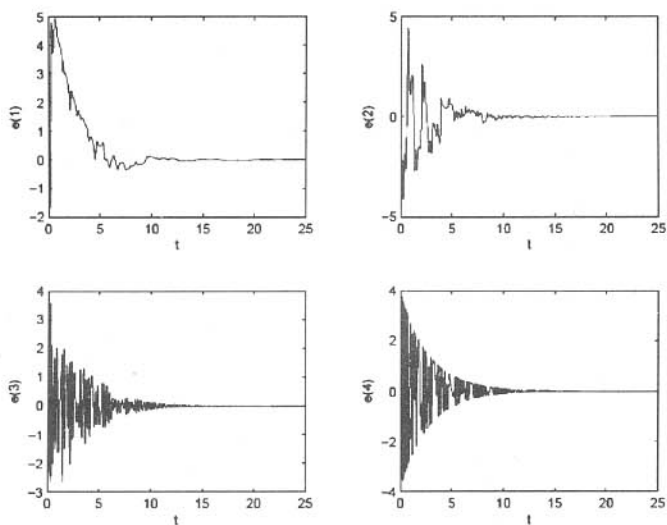


图 3 在 [ 0 , 30 ] 时段上 , 当 k = 4 时系统达到最优同步误差系统

Fig. 3 The error system when the system reaches optimal synchronization with k = 4 on the time interval [ 0 , 30 ]

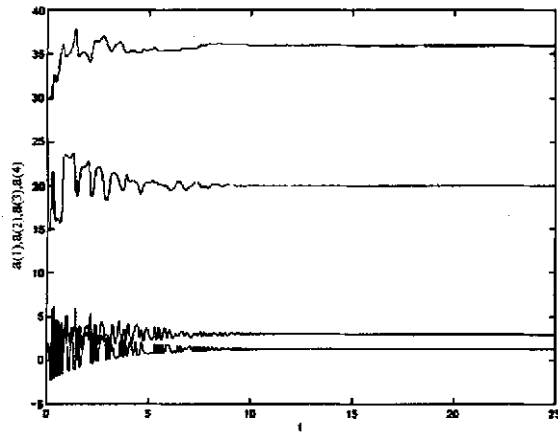


图4 在 $[0, 30]$ 时段上, 当 $k=4$ 时系统达到最优同步参数时变系统

Fig. 4 The updated parameters when the system reaches optimal synchronization with  $k=4$  on the time interval  $[0, 30]$

## 4 结论

本文利用哈密顿-雅可比-贝尔曼方程, 对最新提出的超混沌吕系统设计最优同步的方案, 数值仿真验证了理论分析的正确性. 在这篇文章中, 分别对无限和有限时间段进行研究, 并且得出在这两种情况下的最优控制器. 本文研究的方法可望应用到多个混沌系统的耦合同步和复杂网络上的混沌系统的同步.

## 参 考 文 献

- 1 E. Ott, C. Grebogi and J. A. Yorke. Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett* ,1990 ,64 :1196 ~ 1199
- 2 Pecora LM ,Carroll TL. Synchronization in chaotic system. *Phys. Rev. Lett* ,1990 ,64 :821 ~ 824
- 3 Chen G. and Dong X. From chaos to order. Singapore : World Scientific , 1998
- 4 胡岗, 萧井华, 郑志刚. 混沌控制. 上海: 上海科技教育出版社, 2000. (Hu gang, Xiao Jinghua, Zheng Zhigang. Chaos Control. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 2000 (in Chinese))
- 5 Lu Jun-an, Wu Xiao Qun, Lü Jinhua. Synchronization of a unified system and the application in secure communication. *Physics Letters A* ,2002 ,305 :365 ~ 370
- 6 Lu Jun-an, Wu Xiaoqun, Han Xiuping, Lü Jinhua. Adaptive feedback synchronization of a unified chaotic system. *Physics Letters A* ,2004 ,329 :327 ~ 333.
- 7 Wu Xiao-Qun, Lu Jun-an, Parameter Identification and Backstepping Control of Uncertain Lü system. *Chaos, Solitons and Fractals* ,2003 ,18 :721 ~ 729.
- 8 Lu Jun-an, Xie Jin, Lü Jinhua, Chen Shihua. Control chaos in transition system using sampled-data feedback. *Applied Mathematics and Mechanics* ,2003 ,24(11) :1307 ~ 1309.
- 9 Jin Zhou, Jun-an Lu, Jinhua Lü. Adaptive synchronization of an uncertain complex dynamical network. *IEEE Transactions on Automatic Control* ,2006 ,51(4) :652 ~ 656
- 10 蒋贵荣, 陆启韶, 钱临宁. 一类脉冲动力系统的状态反馈控制. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 17 ~ 23 (Jiang Guirong, Lu Qishao, Qian Linning state feedback control of class of impulsive dynamic systems. *Journal of Dynamics and Control* ,2005 ,3(4) :17 ~ 23 (in Chinese))
- 11 Rossler O E. An equation for the hyperchaos. *Phys Lett A* , 1979 ,71 :155 ~ 157
- 12 Ning C Z, Haken H. Detuned lasers and the complex Lorenz equations: Subcritical and supercritical Hopf bifurcations. *Phys Rev A* ,1990 ,41 :3826 ~ 3837
- 13 Kapitaniak T, Chua L O. Hyperchaotic attractors of unidirectionally-coupled Chua's circuits. *Int J Bifurcat Chaos* , 1994 ,4 :477 ~ 482
- 14 Li Y X, Tang W K S, Chen G R. Generating hyperchaos via state feedback control. *Int J Bifurcat Chaos* ,2005 ,15 :3367 ~ 3375.
- 15 Chen A M, Lu J A, Lü J H et al. Generating hyperchaotic Lü attractor via state feedback control. *Physica A* ,2006 ,364 :103 ~ 110
- 16 Lu, J., G. Chen, A new chaotic attractor coined. *Int J Bifurcat Chaos* ,2002 ,12 :659 ~ 661
- 17 Awad El-Gohary. synchronization of Rssler system with

complete uncertain parameters . *Chaos , Solitons and Fractals* , 2006 27 345 ~ 355

18 Hassan K. Khalil. nonlinear systems ( Second Edition ). Prentice Hall ,1996

## OPTIMAL SYNCHRONIZATION OF HYPERCHAOTIC LÜ SYSTEM WITH UNCERTAIN PARAMETERS \*

Gao jie<sup>1 2</sup> Lu Junan<sup>1</sup>

( 1. College of Mathematics and Statistics , Wuhan University , Wuhan 430072 , China )

( 2. College of Science , Southwest Petroleum University , Nanchong 643000 , China )

**Abstract** This paper investigated the optimal synchronization of the hyperchaotic Lü system. Based on the Hamilton – Jacobi – Bellman equation , a scheme for the optimal synchronization of the hyperchaotic Lü system with uncertain parameters was designed. The optimal controllers and the control laws of parameters were respectively derived on the infinite and finite time intervals. And the numerical simulations were given to verify the correctness of the theoretical analysis.

**Key words** hyperchaotic Lü system , Hamilton – Jacobi – Bellman equation , Riccati equation , optimal control