

不确定曲面上非完整移动机器人的鲁棒镇定*

祝晓才¹ 董国华¹ 蔡自兴² 胡德文¹

(1. 国防科技大学机电工程与自动化学院,长沙 410073) (2. 中南大学信息科学与工程学院,长沙 410083)

摘要 针对在不确定曲面上运动的非完整轮式移动机器人设计了鲁棒实际镇定控制律,使得机器人系统具有对曲面而引入的重力干扰的鲁棒性。设计过程中使用参数有界但未知的二次曲面来近似不确定曲面。整个设计过程构建于李群,综合了横截函数方法、积分器 backstepping 和 Lyapunov 重设计技术。在讨论了轮式移动机器人的运动学子系统对李群 $SE(2)$ 的标准群运算的左不变性之后,构造了一个有界横截函数,由它确定了相应的嵌入目标子流形。然后,对移动机器人的运动学误差系统设计了光滑的“虚拟”镇定律,使得误差变量指数镇定,从而也将机器人运动学子系统的状态镇定到先前定义的目标子流形。最后,使用积分器 backstepping 将该光滑“虚拟”控制律拓展到标称动力学系统,并通过重设计,得到鲁棒实际镇定控制律。仿真结果验证了算法的有效性。

关键词 轮式移动机器人 李群 横截函数 Lyapunov 重设计 鲁棒镇定

引言

近二十年来,非完整动力学系统的控制问题一直是研究热点。作为非完整系统的典型实例,受到非完整约束的轮式移动机器人成为许多文献的研究对象。从 Brockett 的经典结论^[1]可知,对于非完整力学系统,不存在将系统状态镇定到非奇异位形的光滑时不变镇定律。又因为该类系统在平衡点的 Taylor 线性化系统不可控,使得经典的线性控制技术也不适用。为了克服这些困难,研究者提出了三种其他类型的镇定控制律,即光滑时变控制律^[2]、不连续控制律^[3]以及混合控制律^[4]。相比于不连续控制律,光滑时变控制律的主要缺点是收敛速率慢。实际上,这类控制律最多只能实现多项式衰减。不过,光滑控制律的优势在于所得到的闭环系统仍然是光滑的,从而有利于闭环系统的理论分析和控制器的具体实现,并且闭环系统的稳定性一般得以保证。除了镇定问题以外,另一类轮式移动机器人的基本控制问题是轨迹跟踪,近年来也得到广泛关注^[5-10]。对于轮式移动机器人控制问题的更多信息可以参见早期的综述^[11],以及较新的文^[12]。

通过对已有文献的分析,轮式移动机器人的相关控制问题经过近二十年的研究似乎已经获得圆

满解决。但实际上,在该领域仍然存在着值得更深入研究的问题。比如,光滑控制律的过渡过程性能需要进一步提高,以及镇定和跟踪的统一控制设计问题,等等^[6]。此外,一个经常被研究者忽略的议题是如何对运动在曲面上的轮式移动机器人进行控制。已有的绝大多数文献均假设轮式移动机器人在水平面上运动。实际情况却并非总是如此,尤其是当轮式移动机器人被用于野外环境作业以及星际探测等任务时,它们将不可避免的运动在不平坦的支撑面上。当轮式移动机器人在曲面上运动时,重力将会对系统的运动产生影响,因此在系统的拉格朗日方程中需要考虑机器人的势能。从工程角度而言,在设计控制器的过程中考虑地面信息有助于提高控制器性能。此外,尤其是在未知环境中,当轮式移动机器人所处地面的精确模型难以获得时,更要求机器人的控制器对不同的地面具有适应能力,比如所处的曲面具有不同的坡度等等。针对曲面上的机器人镇定问题,一个较早的结果是 Laiou 等基于广义高阶链式系统框架设计的不连续控制律^[13]。

本文以运动在不确定曲面上的非完整轮式移动机器人动力学模型为对象,设计鲁棒实际镇定控制律。整个设计过程构建于李群,设计思想充分利用了轮式移动机器人的运动学子系统作为特殊欧

氏群 $SE(2)$ 上的系统时对于标准群运算的左不变性,设计过程中使用了横截函数方法^[14-18]、积分器 backstepping 以及 Lyapunov 重设计方法^[19]。具体而言,首先构造出有界横截函数,由该函数确定一个目标嵌入子流形;考虑到机器人运动学子系统的左不变性,我们通过群运算的方式而不是“通常”的方式定义了更适合于后续控制设计的误差变量,并推导出相应的运动学误差系统;之后对该误差系统设计光滑的指数镇定律,使得误差状态指数衰减,相应的就将运动学子系统的状态镇定到目标嵌入子流形。通过横截函数方法使得运动学误差子系统闭环线性化,这样就很自然的与 backstepping 以及 Lyapunov 重设计等构造性非线性控制技术相结合,实现在不确定曲面上运动的轮式移动机器人的鲁棒实际镇定。

1 建模及问题描述

考虑运动在某未知曲面 $z = \mathbb{W}(x, y)$ 上的 car-like 轮式移动机器人,依然假设车轮和地面的接触满足“纯滚动无滑动”条件。在曲面上,如果曲面的梯度处于合理的范围,以及车轮和地面接触点的摩擦力足够大,那么“纯滚无滑”的假设总是合理的。我们用具有如下形式的二次曲面来局部近似该未知曲面:

$$\mathbb{W}(x, y) = W_0 + \frac{1}{2}W_1x^2 + W_2x + W_3xy + W_4y + \frac{1}{2}W_5y^2$$

其中 $W_i, i = 1, \dots, 5$ 是未知但有界的常数,其界分别为 $w_i, i = 1, \dots, 5$ 。这种对未知曲面的处理方式至少可以在局部满足大多数情形,因为任何曲面都能在局部用二次曲面以任意精度逼近。

因为轮式移动机器人不再是在水平面上运动,所以它的运动不可避免要受到重力的影响。不失一般性,假设车体的质量、转动惯量、车轮的半径以及重力常数均为 1。通过拉格朗日方程可以得到如下的简化动力学模型:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{v} &= \tau_1 - (W_1x + W_2 + W_3y) \cos \theta + \\ &\quad (W_3x + W_4 + W_5y) \sin \theta \\ \dot{\omega} &= \tau_2 \end{aligned} \quad (1)$$

其中 v 是轮式移动机器人质心的前向速度, ω 是质心绕车体坐标系竖直轴的角速度, θ 是车体中轴线相对于惯性参考系 x 轴的方向角, τ_1 和 τ_2 分别是等效的驱动力和转向力矩, $q = (x, y, z)^T$ 是质心在惯性参考坐标系中的坐标,重力对运动的影响由上述方程第四个等式中 τ_1 后的附加项体现。注意我们并不关心常数项,因为从模型看来它并不影响系统的运动。

轮式移动机器人的运动学子系统由方程的前三个等式组成,写成矢量形式如下:

$$\dot{q} = B(q)u = (B_1(q) \ B_2(q)) \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \quad (2)$$

不难验证该运动学子系统的线性化系统不可控,但在非线性意义下能控^[20]。在第一节已经指出,轮式移动机器人的渐近镇定问题的棘手之处在于:1) 子系统在原点处的近似线性化系统不可控,从经典线性系统理论可知,它不可能被任何光滑静态控制律指数镇定;2) 子系统不满足 Brockett 必要条件,所以不能被任何连续控制律渐近镇定。所以对这个问题的常规解决办法是寻求其它类型的控制律。其实,还有一种目前较少被关注的思路,即在设计过程中放宽对系统的稳定性要求。正如文^[16]所指出:常规的渐近镇定要求可能在某种程度上过于苛刻,在实际应用中采用实际镇定(practical stabilization)可能是更现实、更合理的选择。这就是本文选择实际镇定作为目标的原因之一。放宽稳定性要求之后,在实际镇定的意义下,控制设计的目标将是把系统镇定到平衡点附近,而不再迫使系统状态收敛到该平衡点,即:定义状态空间的一个子流形 M ,寻找控制律使得该子流形渐近稳定。

2 控制律设计

2.1 李群和群运算

考虑运动学子系统,它可以理解成特殊欧氏群 $SE(2)$ 上的系统,相应的标准群运算定义如下:

$$q_1 \circ q_2 = \phi(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + R(\theta_1) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中 $R(\theta)$ 表示 R^2 空间上角度为 θ 的旋转矩阵, 即

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

易知该群的单位元为 $e = (0, 0, 0)^T$, 对 $\forall q \in SE(2)$

(2) 其逆元 $q^{-1} \in SE(2)$ 由等式 $q0q^{-1} = e$ 唯一确定, 即

$$q^{-1} = \begin{pmatrix} -R & -\theta \\ & -\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

运动学子系统(2)对于 $SE(2)$ 上的标准群运算具有特定的不变性^[18], 给后续控制设计带来便利。

命题 1 轮式移动机器人的运动学子系统(2)对于特殊欧式群 $SE(2)$ 的标准群运算具有左不变性。

证明: 由于 $B_1(q) = (\cos\theta \ \sin\theta \ 0)^T$, $B_2(q) = (0 \ 0 \ 1)^T$, 又单位元 $e = (0 \ 0 \ 0)^T$, 则有 $B_1(e) = (1 \ 0 \ 0)^T$, $B_2(e) = (0 \ 0 \ 1)^T$. 注意到 $\phi(q, e) = q$ 对 $\forall q = (x \ y \ \theta)^T \in SE(2)$ 都成立, 那么矢量场 $B_1(e)$ 在切映射 $(T_q)_*$ 下的像

$$\begin{aligned} (T_q)_* B_1(e) &= dl_q(e) B_1(e) = \\ & \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B_1(e) = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = B_1(q) \end{aligned}$$

由上式可知矢量场 B_1 对于标准群运算(3)具有左不变性, 同理可得矢量场 B_2 对标准群运算(3)左不变. 因此运动学子系统(2)对群运算(3)左不变。

2.2 横截函数和系统扩展

借助横截函数设计控制律需要进行以下两步工作: 1) 构造有界横截函数 f , 通过该函数在原系统的状态空间内定义出一个嵌入子流形 M , 该子流形与平衡点的距离可以由该横截函数的设计参数任意指定; 2) 对原系统进行扩张, 定义合适的误差变量并推导误差模型, 设计控制律使得误差系统渐近(或指数)镇定. 这样, 原系统的状态镇定到子流形 M , 从而间接镇定到平衡点附近, 实现实际镇定. 横截函数的构造是整个设计过程中的重要一环. 如下的定理描述了系统的能控性和有界横截函数的存在性之间的关系。

定理 1^[14]: 令 G 为 n 维李群, 其李代数表示为 Δ . $X_1, \dots, X_m \in \Delta$ 表示独立的矢量场, 则如下性质

等价:

1、LARC $Li(X_1, \dots, X_m) = \Delta$;

2、Transverse Condition (TC): 对 G 的单位元 e 的任意邻域 U , 存在函数 $f \in C^\infty(T^{n-m}; U)$ 使得

$$G_{X(\theta)} = span\{X_1(f(\theta)), \dots, X_m(f(\theta))\} \oplus df(\theta) (T_\theta^{n-m}), \forall \theta \in T^{n-m}. \quad (4)$$

该定理用独立于坐标的语言描述了函数的横截条件. 定义“横截矩阵” $H(\theta)$ 如下:

$$H(\theta) = [X_1(f(\theta)), \dots, X_m(f(\theta)), \frac{\partial f}{\partial \theta_{m+1}}(\theta), \dots, \frac{\partial f}{\partial \theta_n}(\theta)] \quad (5)$$

则如下的非奇异条件即为横截条件(4)依赖于具体坐标的表达:

$$det(H(\theta)) \neq 0, \forall \theta \in T^{n-m}. \quad (6)$$

在上一小节已经指出移动机器人的运动学子系统(2)能控, 从定理 1 可知该子系统一定存在着有界的横截函数. 不过, 横截函数的构造并不唯一, 如下命题给出了一个形式简单的横截函数。

命题 2: 令 $T = R/2\pi Z$ 为 R 上的 1 维环面, 对 $\forall \epsilon \in (0, \pi/2)$, 由

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} \epsilon \sin \alpha \\ \frac{1}{4} \epsilon^2 \sin 2\alpha \\ \epsilon \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (7)$$

定义的映射 $f: T \rightarrow SE(2)$ 是一个横截函数。

证明: 对应于(7)的横截矩阵为

$$H(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\epsilon \cos \alpha) & 0 & \epsilon \cos \alpha \\ \sin(\epsilon \cos \alpha) & 0 & \frac{1}{2} \epsilon^2 \cos 2\alpha \\ 0 & 1 & -\epsilon \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (8)$$

其行列式为

$$det(H(\alpha)) = \epsilon \cos \alpha \sin(\epsilon \cos \alpha) - \frac{1}{2} \epsilon^2 \cos 2\alpha \cos(\epsilon \cos \alpha)$$

注意到 $\epsilon \neq 0$, 则有

$$det(H(\alpha)) = \epsilon^2 \left[\cos^2 \alpha \frac{\sin(\epsilon \cos \alpha)}{\epsilon \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2} \cos(\epsilon \cos \alpha) \right]$$

不难证明当 $\forall \epsilon \in (0, \pi/2)$ 时, 如下不等式成立:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin(\epsilon \cos \alpha)}{\epsilon \cos \alpha}, \forall \alpha, \\ 0 < \cos(\epsilon \cos \alpha) \leq 1, \forall \alpha, \end{aligned}$$

从而

$$\det(H(\alpha)) \geq \frac{1}{2} \varepsilon^2 [\cos^2 \alpha (1 - \cos(\varepsilon \cos \alpha)) + \sin^2 \alpha] > 0.$$

上式表明横截矩阵 $H(\alpha)$ 非奇异, 因此横截条件 (6) 成立, 从而函数 (7) 为横截函数.

由横截函数 f 定义的子流形 M 本质上是一个光滑嵌入, 由横截函数 $f: T \rightarrow SE(2)$ 将 1 维环面 $T = R/2\pi Z$ 嵌入到李群 $SE(2)$. 该子流形的“大小”由设计参数 ε 决定, ε 越小那么该子流形越接近原点. 为便于后续设计, 利用环面上的元素 $\alpha \in T$ 对运动学子系统进行如下扩展:

$$\dot{\alpha} = B(q)u = (B_1(q) \ B_2(q)) \begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\dot{\alpha} = \zeta$$

扩展状态 α 由扩展输入 ζ 直接控制. 在横截函数方法中, 除了扩展出的状态 α 本身作为时变相关项是一个控制自由度以外, 其频率 $\dot{\alpha}$ 也被引入作为一个额外的控制自由度, 即 ζ . 这是横截函数方法与常规光滑时变控制方法的不同之处. 在随后的控制设计中我们将会看到它们的作用.

2.3 误差动态子系统

误差变量的定义方式对控制设计有重要影响, 合适的定义方式可以设计工作带来便利. 在此, 不采用通常的方式定义误差变量, 即 $z = q - f(\alpha)$, 而是利用运动学子系统对群运算的左不变性, 基于李群运算定义误差变量如下:

$$z = f(\alpha) \circ q^{-1} = d(f(\alpha)) q^{-1} \quad (10)$$

其机理在于: 因为原点是运动学子系统 (2) 的平衡点, 同时也是李群 $SE(2)$ 的单位元 $e = (0, \rho, \rho)^T$, 从 $q \circ q^{-1} = e$ 可知, 如果控制律使得误差系统的状态 $z \rightarrow e$, 那么子系统状态 $q \rightarrow f(\alpha)$; 而设计参数 ε 可以事先指定, 且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 $f(\alpha) \rightarrow 0$. 这样, 只要所选取的足够小, 那么子系统状态将足够接近原点, 即实现子系统的实际镇定.

对误差变量表达式 (10) 求导可得

$$\dot{z} = dr_{q^{-1}}(f(\alpha)) \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha) \dot{\alpha} + dl_{q^{-1}}(q^{-1}) \chi(q^{-1})$$

注意到

$$(q^{-1}) = -(dl_q(q^{-1}))^{-1} dr_{q^{-1}}(q) B(q)u,$$

并且运动学子系统具有左不变性, 那么

$$B(q) = dl_{q \circ f(\alpha)^{-1}}(f(\alpha)) B(f(\alpha)),$$

从而

$$\dot{z} = dr_{q^{-1}}(f(\alpha)) \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha) \dot{\alpha} - dl_{f(\alpha)}(q^{-1}) \times (dl_q(q^{-1}))^{-1} dr_{q^{-1}}(g) dl_{q \circ f(\alpha)^{-1}}(f(\alpha)) B(f(\alpha))u \quad (11)$$

进一步计算可得

$$\begin{aligned} \dot{z} &= dr_{q^{-1}}(f(\alpha)) \chi(f(\alpha)) \dot{\alpha} - dr_{q^{-1}}(f(\alpha)) \times \\ &\quad d(l_{f(\alpha)} l_{q^{-1}} l_{q \circ f(\alpha)^{-1}} \chi(f(\alpha)) B(f(\alpha)))u = \\ &= dr_{q^{-1}}(f(\alpha)) \chi(f(\alpha)) \dot{\alpha} - dr_{q^{-1}}(f(\alpha)) \times \\ &\quad B(f(\alpha))u = dr_{q^{-1}}(f(\alpha)) \chi(f(\alpha)) \dot{\alpha} - \\ &\quad B(f(\alpha))u \end{aligned}$$

即

$$\dot{z} = -dr_{q^{-1}}(f(\alpha)) H(\alpha) \begin{pmatrix} u \\ -\zeta \end{pmatrix} \quad (12)$$

其中 $H(\alpha)$ 即为横截矩阵 $(dr_{q^{-1}}(f(\alpha)))^{-1} = dr_q(z)$ 是非奇异矩阵. 因此, 可以选取如下的指数镇定律:

$$\begin{pmatrix} v_d \\ \omega_d \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} [H(\alpha)]^{-1} dr_q(z) Kz \quad (13)$$

其中 K 是任意的正定矩阵. 在上式中使用符号 v_d 和 ω_d 的原因在于该控制律在后续的 backstepping 过程中被作为“虚拟控制”. 在该控制律作用下, 相应的闭环误差系统成为线性系统如下:

$$\dot{z} = -Kz. \quad (14)$$

该线性化系统的 Lyapunov 函数可以取为 $V_1 = \frac{1}{2} z^T z$, 则 $\dot{V}_1 = -z^T Kz$ 负定. 如果 K 选择为对角矩阵 $\text{diag}(k_1, k_2, k_3)$, $k_i > 0, i = 1, 2, 3$, 那么闭环系统 (14) 将实现控制解耦.

注 1: 可以看出, 运动学误差子系统 (12) 在控制律 (13) 的作用下线性化为 (14), 并且在 K 为对角矩阵时进一步实现了控制解耦. 这种对误差系统进行的精确反馈线性化相当于实现了原系统的“实际”线性化, 所以这种线性化方式被称为“实际线性化”. 它和经典动态反馈线性化^[17]的相同点在于都需要对原系统进行动态扩张, 并且二者都能实现相应误差系统的精确线性化. 不同之处在于, 对于非完整系统 (包括轮式移动机器人), 在动态反馈线性化算法中存在潜在的奇异, 而这种奇异又是由非完整系统的结构属性导致. 具体而言, 对于 car-like 轮式移动机器人, 该潜在的奇异是指由动态反馈线性化算法扩张出的状态不能为 0. 而该状态的

物理意义是机器人的前向速度, 因此在动态反馈线性化算法中要求机器人持续运动, 这就导致了轨迹跟踪问题中对参考轨迹的“持续激励”要求. 反观“实际线性化”算法, 在整个过程中均不会出现奇异, 从而无需对机器人的运动做出额外假设, 简化了控制设计. 此外, 因为“实际线性化”不再对参考轨迹做出要求, 所以该控制设计方法可以直接应用于轨迹跟踪问题, 而且可以实际跟踪任意参考轨迹, 并不要求该参考轨迹是系统的解. 这样, 横截函数方法可用于轮式移动机器人镇定和跟踪的统一控制器设计.

2.4 标称控制律设计

从上一小节可以看出, 因为横截函数的设计保证了横截矩阵非奇异, 从而使用横截函数方法很方便的实现了误差系统的实际线性化, 进而只需简单直接的线性控制律即可保证误差系统的指数稳定, 也易于给出误差系统的 Lyapunov 函数. 这是横截函数方法的优点之一. 正是横截函数方法优良的性质使得它可以很自然的与其它基于 Lyapunov 函数的构造性非线性控制方法相结合.

注意到控制律的光滑性, 因此可以使用 back-stepping 方法将它扩展到系统的动力学模型. 考虑标称动力学系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= B_1(q)v + B_2(q)\omega \\ \dot{v} &= \tau_1 \\ \dot{\omega} &= \tau_2. \end{aligned} \tag{15}$$

定义控制误差变量为 $\tilde{u} = u - u_d = (\tilde{v} \tilde{\omega})^T$, 其中 $\tilde{v} = v - v_d$, $\tilde{\omega} = \omega - \omega_d$. 动力学误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -dr_{q^{-1}}(\mathcal{J}(\alpha))H(\alpha) \begin{pmatrix} \mu \\ -\zeta \end{pmatrix} \\ \dot{v} &= \tau_1 \\ \dot{\omega} &= \tau_2. \end{aligned} \tag{16}$$

选定该动力学误差系统的候选 Lyapunov 函数为

$$V_2 = \frac{1}{2}z^T z + \frac{1}{2}(\tilde{v}^2 + \tilde{\omega}^2). \tag{17}$$

对上式求导有

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z^T \left(-dr_{g^{-1}}(\mathcal{J}(\alpha))H(\alpha) \begin{pmatrix} \mu \\ -\zeta \end{pmatrix} \right) + \\ &\quad \tilde{v}(\dot{v} - \dot{v}_d) + \tilde{\omega}(\dot{\omega} - \dot{\omega}_d) = -z^T Kz + \\ &\quad z^T \left(-dr_{g^{-1}}(\mathcal{J}(\alpha))H(\alpha) \begin{pmatrix} \tilde{\mu} \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \end{aligned}$$

$$\tilde{v}(\dot{v} - \dot{v}_d) + \tilde{\omega}(\dot{\omega} - \dot{\omega}_d)$$

定义矩阵 $Q = dr_{g^{-1}}(\mathcal{J}(\alpha))H(\alpha) = (c_1 \ c_2 \ c_3)$, 则有

$$\dot{V}_2 = -z^T Kz - z^T(\tilde{v}c_1 + \tilde{\omega}c_2) +$$

$$\tilde{v}(\dot{v} - \dot{v}_d) + \tilde{\omega}(\dot{\omega} - \dot{\omega}_d) = -z^T Kz +$$

$$\tilde{v}(\tau_1 - z^T c_1 - \dot{v}_d) + \tilde{\omega}(\tau_2 - z^T c_2 - \dot{\omega}_d)$$

选取控制律为

$$\tau_1 = -k_v \tilde{v} + z^T c_1 + \dot{v}_d, \tag{18}$$

$$\tau_2 = -k_\omega \tilde{\omega} + z^T c_2 + \dot{\omega}_d, \tag{19}$$

其中 k_v 和 k_ω 都是正数, 那么候选 Lyapunov 函数的导数为

$$\dot{V}_2 = -z^T Kz - k_v \tilde{v}^2 - K_\omega \tilde{\omega}^2 \leq 0$$

2.5 鲁棒重设计

定义重力干扰项为

$$\delta = (W_1 x + W_2 + W_3 y) \cos \theta + (W_3 x + W_4 + W_5 y) \sin \theta,$$

原动力学系统重写如下

$$\dot{q} = B_1(q)v + B_2(q)\omega$$

$$\dot{v} = \tau_1 - \delta \tag{20}$$

$$\dot{\omega} = \tau_2.$$

相应的扰动动力学误差系统表示为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -dr_{q^{-1}}(\mathcal{J}(\alpha))H(\alpha) \begin{pmatrix} \mu \\ -\zeta \end{pmatrix} \\ \dot{v} &= \tau_1 - \delta \\ \dot{\omega} &= \tau_2. \end{aligned} \tag{21}$$

在开始标称控制律的鲁棒重设计之前, 我们先简要讨论重力干扰项的性质:

1. $W_2 \neq 0$. 则在原点 $(q \ v \ \omega)^T = (0 \ 0 \ 0)^T$ 处有 $\delta = W_2 \neq 0$, 因此由曲面引入的重力干扰为非消隐干扰. 这种情况下, 对于动力学(20)系统而言, 原点不再是其非受迫系统的平衡点. 根据非消隐扰动的相关理论, 我们已经不能再将原点作为平衡点进行讨论, 也不能期望扰动系统的解当 $t \rightarrow \infty$ 时到达原点^[19]. 那么, 合理的控制目标将是寻求系统状态的最终有界(Ultimate Boundedness), 这也是本文寻求实际镇定的动机之一.

2. $W_2 = 0$. 则在原点处有 $\delta = 0$, 从而重力的干扰表现为消隐干扰. 这种情况下可以对系统进行正常的稳定性分析.

现在开始进行标称控制律的重设计. 定义 $a_1 = \sqrt{w_1^2 + 2w_3^2 + w_5^2}$, $a_2 = \sqrt{w_2^2 + w_4^2}$, 则重力干扰项的

界表示如下：

$$\begin{aligned} & \|\delta\| \leq \\ & \sqrt{(W_1 \cos\theta + W_3 \sin\theta)^2 + (W_5 \sin\theta + W_3 \cos\theta)^2} \|(x \ y)\| + \\ & a_2 \leq \sqrt{w_1^2 + 2w_3^2 + w_5^2} \|(x \ y)\| + a_2 = \\ & a_1 \|(x \ y)\| + a_2 \end{aligned} \quad (22)$$

因为 Lyapunov 函数(17)沿扰动动力学误差系统(21)轨迹的导数为：

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -z^T Kz + \tilde{v}(\tau_1 + \lambda - \delta + z^T c_1 - \dot{v}_d) + \\ & \tilde{\omega}(\tau_2 + z^T c_2 - \dot{\omega}_d) \leq -z^T Kz - k_v \tilde{v}^2 - k_\omega \tilde{\omega}^2 + \\ & \tilde{v}\lambda + \|\tilde{v}\| \|\delta\| \leq -z^T Kz - k_v \tilde{v}^2 - k_\omega \tilde{\omega}^2 + \\ & \tilde{v}\lambda + \|\tilde{v}\| (a_1 \|(x \ y)\| + a_2) \end{aligned} \quad (23)$$

不妨选择

$$\lambda = -(a_1 \|(x \ y)\| + a_2) \tilde{v} / \|\tilde{v}\| \quad (24)$$

那么

$$\dot{V}_2 \leq -z^T Kz - k_v \tilde{v}^2 - k_\omega \tilde{\omega}^2 + \tilde{v}\lambda + \|\tilde{v}\| (a_1 \times$$

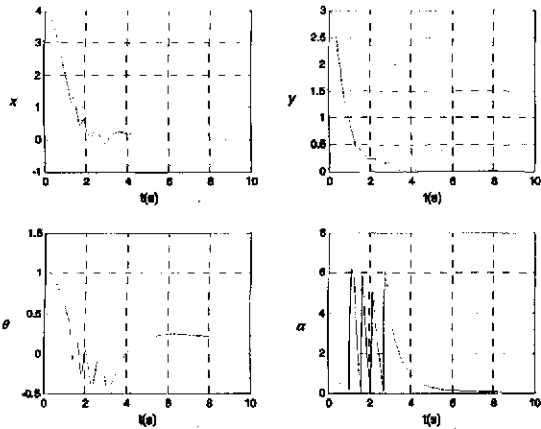


图1 运动学子系统的增广状态 $(x \ y \ \theta \ \alpha)^T$

Fig.1 The states $(x \ y \ \theta \ \alpha)^T$ of the kinematic subsystem

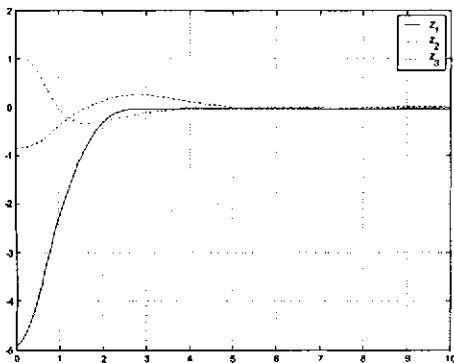


图3 误差变量 $z = f(\alpha) \circ q^{-1}$ 对时间的变化曲线

Fig.3 The evolution of the error variables $z = f(\alpha) \circ q^{-1}$

$$\begin{aligned} & \|(x \ y)\| + a_2) = -z^T Kz - k_v \tilde{v}^2 - k_\omega \tilde{\omega}^2 + \\ & \|\tilde{v}\| (a_1 + \|(x \ y)\| + a_2) - \\ & \tilde{v} \|(a_1 \|(x \ y)\| + a_2) \tilde{v} / \|\tilde{v}\| = \\ & -z^T Kz - k_v \tilde{v}^2 - k_\omega \tilde{\omega}^2 \leq 0 \end{aligned}$$

从上式可知扰动动力学误差系统(21)稳定。

从而经过 Lyapunov 重设计的动力学系统的实际控制输入 τ_1 和 τ_2 为

$$\begin{aligned} \tau_1 = & -k_v \tilde{v} + z^T c_1 + \dot{v}_d - (a_1 \|(x \ y)\| + a_2) \tilde{v} / \|\tilde{v}\| \\ \tau_2 = & -k_\omega \tilde{\omega} + z^T c_2 + \dot{\omega}_d \end{aligned} \quad (25)$$

其中虚拟控制律的导数 \dot{v}_d 和的 $\dot{\omega}_d$ 计算并不困难，但是非常繁琐，因为篇幅的限制在此将它们略去。

3 仿真结果及讨论

在仿真过程中，二次曲面选择为 $W(x \ y) = 0.4$

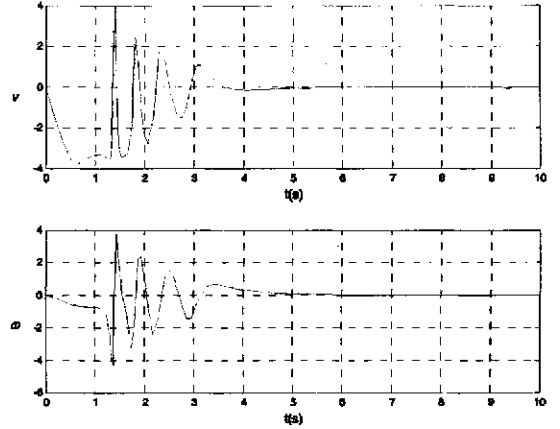


图2 运动学子系统的输入 $(v \ \omega)^T$ 对时间的变化曲线

Fig.2 The kinematic control inputs $(v \ \omega)^T$

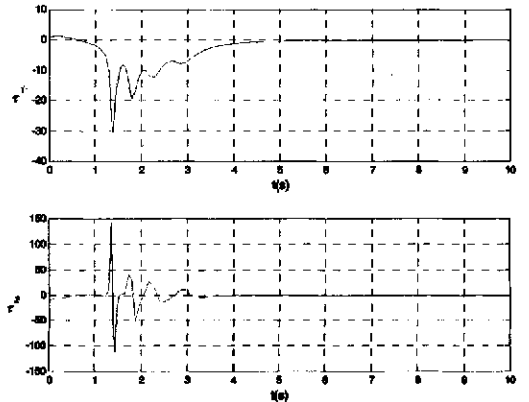


图4 控制输入 τ_1 和 τ_2

Fig.4 The control inputs τ_1 和 τ_2

+0.25x² - 0.2x + 0.1xy + 0.3y - 0.1y², 各系数的界分别设置为 $w_1 = 0.3, w_2 = 0.3, w_3 = 0.2, w_4 = 0.4, w_5 = 0.2$. 选择控制矩阵 $K = \text{diag}(1, 1, 1)$, $\varepsilon = 0.2$. 控制增益 $k_v = 0.5, k_\omega = 0.3$. 增广的初始状态为 $(x_0, y_0, \theta_0, \alpha_0) = (4, 3, \pi/3, \rho)^T$. 图 1 显示了增广之后运动学子系统状态 $(x, y, \theta, \alpha)^T$ 随时间的演化曲线, 从中可以看出大约 8 秒之后这些状态就进入稳态, 在初始阶段系统状态的曲线上出现少量振荡. 从可以证明当系统在水平面上运动时, 该频率随时间指数衰减, 所以系统很快进入稳态并不再有振荡出现. 需要注意的是, 我们只是实现了动力学系统在重力扰动下的实际镇定, 因此系统状态并没有收敛到原点, 这从 θ 曲线可以清楚地看出. 另外, 对于增广出的状态 α , 我们只关心它是否收敛, 而不关心它所收敛到的具体值. 显然, 图 1 也清晰地

显示了 α 的收敛性质. 运动学子系统的控制输入 v 和 ω 如图 2 所示, 它们也是动力学系统的两个状态. 从图中可以看出在控制过程中它们保持有界并最终收敛到 0, 并且其振荡频率随着时间的推移迅速衰减. 图 3 显示了通过李群运算定义的误差变量随时间的变化情况. 可以看出, 三个误差分量几乎是指数衰减到 0; 作为结果, 动力学系统的状态镇定到光滑子流形 M 而不是原点, 这已在图 1 中得到体现. 动力学系统的实际控制输入 τ_1 和 τ_2 如图 4 所示, 它们的有界性是明显的. 图 5 给出了轮式移动机器人镇定过程中的 3 维运动轨迹在水平面上的投影. 图 6 为相应的 3 维轨迹. 从图 5 可以明显看出系统轨线最终到达并保持水平面原点的附近, 这与实际镇定的理论预期一致.

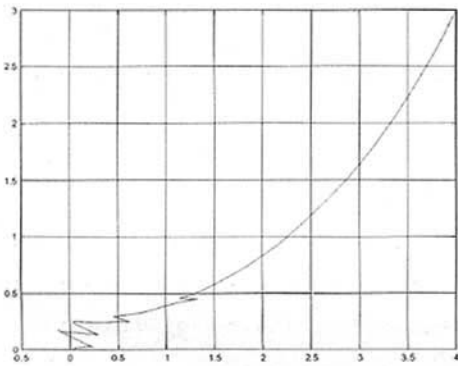


图 5 轮式移动机器人的 3 维轨迹在水平面上的投影
Fig. 5 The projection of the 3 - d trajectory in horizontal plane

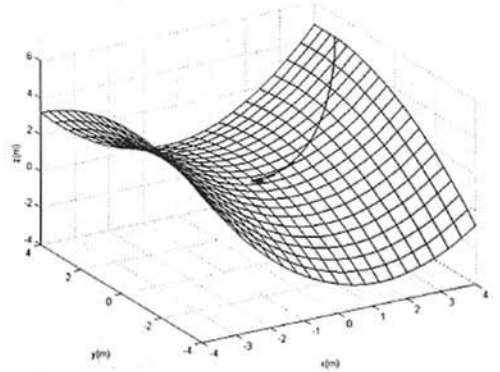


图 6 轮式移动机器人在镇定过程中的 3 维轨迹和
Fig. 6 The 3 - dimensional Cartesian trajectory of the robot

4 结论

本文对运动在不确定曲面上的轮式移动机器人设计了鲁棒实际镇定律, 使得机器人具有对不同曲面参数的自适应能力. 设计过程采用了横截函数方法和积分器 backstepping 以及 Lyapunov 重设计技术. 横截函数方法一种较为新颖的非线性控制技术, 目前仍在逐步完善. 整个设计思想可以直接推广到轨迹跟踪问题, 从而可以在统一的框架下同时解决轮式移动机器人的位形镇定和轨迹跟踪. 后续的工作将在以下方向得以体现: 其一是在控制器的设计中考虑执行机构的饱和. 从设计过程可知, 要提高控制精度需要减小设计参数的数值; 从标称运动学控制律以及横截矩阵的行列式可知, 以线性尺

度减小将导致控制强度以平方尺度增加. 因此, 有必要在控制器的设计中引入饱和和机制. 其二是探讨横截函数方法的改进. 因为横截函数方法的机理是定义一个与平衡点可任意接近的子流形, 然后将系统状态镇定到该流形以实现实际镇定. 而该目标流形本身是环面在状态空间中的一个光滑嵌入, 因此无论初始状态处于何种位置, 都将被吸引到该环面. 这样, 那些在初始时刻距离平衡点比距离该环面更近的状态仍然会被镇定到该环面, 导致最终误差比初始误差还要大. 这就有悖于我们对系统进行控制的初衷. 对此我们的初步设想是通过增加横截函数的自变量个数以引入切换机制.

参 考 文 献

- 1 Brockett R W. Asymptotic stability and feedback stabilization. in : Differential Geometric Control Theory , Boston : Birkhauser ,1983 ,181 ~ 191
- 2 Samson C. Time - varying feedback stabilization of a car - like wheeled mobile robot. *International Journal of Robotics Research* ,1993 ,12(1) :55 ~ 64
- 3 Astolfi A. Discontinuous control of nonholonomic systems. *Systems & Control Letters* ,1996 27(1) :37 ~ 45
- 4 W. Oelen ,H. Berghuis ,H. Nijmeijer ,et al. Hybrid stabilizing control on a real mobile robot. *IEEE Robotics and Automation Magazine* ,1995 2(2) :16 ~ 23
- 5 Jiang Z P ,Nijmeijer H. Tracking control of mobile robots : A case study in backstepping. *Automatica* ,1997 33(7) :1393 ~ 1399
- 6 Oriolo G ,De Luca A ,Vendittelli M. WMR control via dynamic feedback linearization : Design ,implementation and experimental validation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 2002 ,10(6) :835 ~ 852
- 7 Dixon W ,Dawson D ,Zhang F ,et al. Global exponential tracking control of mobile robot system via a PE condition. *IEEE Transactions on System ,Man ,Cybernetics (B)* ,2000 30(1) :129 ~ 142
- 8 李世华 ,田玉平 . 移动小车的轨迹跟踪控制 ,控制与决策 2002 ,15(5) :626 ~ 628 (LI Shi - hua ,TIAN Yu - ping ,Tracking Control of Mobile Robots. *Control and Decision* 2002 ,15(5) :626 ~ 628 (in Chinese))
- 9 董文杰 ,霍伟 . 链式系统的轨迹跟踪控制 ,自动化学报 ,2000 ,26(3) :310 ~ 316. (Dong Wen - jie ,Huo Wei. Trajectory tracking control of chained systems. *Sinica Automatic* 2000 26(3) :310 ~ 316(in Chinese))
- 10 Lee T C ,Song K T ,Lee C H ,et al. Tracking control of unicycle - modeled mobile robots using a saturation feedback controller. *IEEE Transactions on control systems technology* ,2001 9(2) :305 ~ 318
- 11 I. Kolmanovsky ,N. H. McClamroch. Developments in non-holonomic control systems. *IEEE Control System Magazine* ,1995 ,15(6) :20 ~ 36
- 12 A. De Luca ,G. Oriolo ,M. Vendittelli. Control of wheeled mobile robots : An experimental overview. in : RAMSETE - Articulated and Mobile Robotics for Services and Technologies ,Nicosia S ,Siciliano B ,Bicchi A ,et al. ,Eds. ,LN-CIS 2001 270 :181 ~ 226
- 13 Laiou M C ,Astolfi A. Discontinuous control of high - order generalized chained systems. *System & Control Letters* .1999 37 :309 ~ 322
- 14 Morin P ,Samson C. Practical stabilization of a class of nonlinear systems : Application to chain systems and mobile robots. in Proc. 39th IEEE Conf. Decision Control ,Sydney ,Australia 2000 2989 ~ 2994
- 15 Morin P ,Pomet J B ,Samson C. Design of homogeneous time - varying stabilizing control laws for driftless controllable systems via oscillatory approximation of Lie brackets in closed loop. *SIAM Journal on Control and Optimization* ,2000 38(1) :22 ~ 49
- 16 Morin P ,Samson C. Practical Stabilization of Driftless Systems on Lie Groups : The Transverse Function Approach. *IEEE Transactions on Automatic control* ,2003 ,48(9) :1496 ~ 1508
- 17 Morin P ,Samson C. A characterization of the Lie algebra rank condition by transverse periodic functions. *SIAM Journal on Control and Optimization* ,2002 ,40(4) :1227 ~ 1249
- 18 Morin P ,Samson C. Practical and Asymptotic Stabilization of Chained Systems by the Transverse Function Control Approach. *SIAM Journal on Control and Optimization* 2004 43(1) :32 ~ 57
- 19 Khalil H K. *Nonlinear Systems* 2nd ed. Upper Saddle River : Prentice Hall ,1996
- 20 Isidori A. *Nonlinear Control Systems* ,3rd ed. ,Berlin : Springer - Verlag ,1995
- 21 Spivak M. *A Comprehensive Introduction to differential Geometry* 2nd ed. ,vol. I ,Houston :Perish Inc. ,1979

ROBUST STABILIZATION OF NONHOLONOMIC MOBILE ROBOTS MOVING ON UNCERTAIN UNEVEN SURFACE *

Zhu Xiaocai¹ Dong Guohua¹ Cai Zixing² Hu Dewen¹

(1 . School of Mechatronics and Automation National University of Defense Technology ,Changsha 410073 ,China)

(2 . School of Information Science and Engineering Central South University ,Changsha 410083 ,China)

Abstract Robust control laws were proposed for the stabilization of nonholonomic wheeled mobile robots moving on an uneven surface ,which was not exactly known. The proposed control laws rendered the closed – loop dynamic system practically stable and robust with respect to the effect of the gravity introduced by the uneven surface. Quadratic surfaces with unknown but bounded coefficients were utilized in the design process to locally approximate the uneven surfaces. The design procedure was based on the transverse function method ,integrator backstepping and Lyapunov redesign technique. After exploring the left – invariance property of the kinematic subsystem of the wheeled mobile robots with respect to the standard group operation of the Lie group $SE(2)$,we constructed a bounded transverse function by which a corresponding embeded target submanifold was defined ,and derived the smooth " virtual" control laws ,which rendered the error subsystem exponentially stable ,thus the states of the kinematic subsystem converged to a smooth embedded submanifold defined by the transverse function. Then ,the integrator backstepping technique was applied to the nominal dynamic system due to the smoothness of the obtained " virtual" control laws. Finally ,a Lyapunov redesign component was constructed to handle the disturbance of the gravity. Driven by the proposed control laws ,the wheeled mobile robots had the ability of adaptation to varying uneven surface condition. Simulations were provided to validate the effectiveness of the algorithm.

Key words wheeled mobile robot , Lie group , transverse function , Lyapunov redesign , robust stabilization