

# 基于恢复系数的碰撞过程模型分析\*

秦志英<sup>1,2</sup> 陆启韶<sup>1</sup>

(1. 北京航空航天大学理学院, 北京 100083) (2. 河北科技大学机械电子工程学院, 石家庄 050054)

**摘要** 论述了恢复系数的含义及作用,并在此基础上介绍了几种碰撞过程模型.通过详细推导恢复系数与模型参数之间的关系,使得不同的碰撞过程模型可统一用恢复系数表示能量损失,并用接触刚度表示变形.这也阐明了碰撞过程模型与刚性模型之间的区别和联系,把动态接触理论和古典碰撞理论统一了起来.通过对一个单球碰撞系统进行数值仿真,不仅验证了关系推导的正确性,而且对各种模型从精度、效率、微观接触过程等方面进行了比较.

**关键词** 碰撞过程模型;接触力-变形函数;恢复系数

## 引言

对于碰撞问题的研究,古典碰撞理论忽略了碰撞过程中的接触时间和接触变形,假设接触力为无穷大,仅用恢复系数来表示碰撞前后的速度跳跃关系.但是当研究非对心斜碰撞问题时,若考虑切向摩擦作用,则仅采用恢复系数来确定碰撞前后的速度跳跃关系将变得十分棘手,甚至会出现碰撞过程能量增加的矛盾.<sup>[1]</sup>

而动态接触理论<sup>[2]</sup>则把碰撞过程微观化,充分考虑碰撞过程中两碰撞体之间的接触时间、接触变形和接触力.此时,由于法向接触和切向接触本质上是两类不同的问题,我们可以分开考虑,把碰撞限定为法向接触,而把切向接触归结为摩擦,从而采用不同的接触力模型<sup>[3-5]</sup>,从根本上解决有摩擦的非对心斜碰撞问题.另外,动态接触理论不仅可从微观角度计算碰撞力的历史,而且不需要求解额外的代数方程(速度跳跃关系),因此在很多工程领域中得到了广泛的应用,如球磨机的DEM仿真等.

动态接触理论的关键是选择合适的接触力模型,并确定模型参数的取值.本文暂不涉及切向接触,主要考虑各种法向接触力模型<sup>[3-10]</sup>,其本质是从微观上描述碰撞过程,因此又称作碰撞过程模型.本文主要考虑非连续体的碰撞过程,而对于连续体的碰撞过程<sup>[11]</sup>暂不涉及.

本文首先详细介绍恢复系数的含义和本质,然后对几种不同的碰撞过程模型进行较详细的分析.通过参数推导统一地用恢复系数来表示能量损失,从而也把动态接触理论和古典碰撞理论联系起来.最后通过单球碰撞系统的数值仿真,验证了参数推导的正确性,并对几种模型的特点进行了比较.

## 1 碰撞过程及恢复系数

如图1所示,A点为碰撞开始点, $v_+$ 为碰撞前的相对速度,C点为碰撞结束点, $v_-$ 为碰撞后的相对速度.则AB为压缩阶段,相对速度大于零;BC为膨胀阶段,相对速度小于零;B点为两阶段的转换点,速度为零且变形最大.

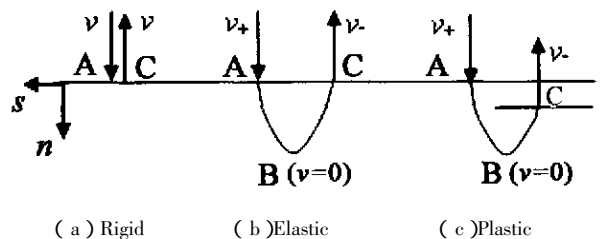


图1 碰撞过程模型

Fig. 1 Models of impact process

如图1(a)所示,古典碰撞理论不考虑碰撞过程中的变形,称作刚性碰撞.对此模型,仅用一个恢复系数来表示碰撞前后的状态:

$$e = -\frac{v_-}{v_+} = -\frac{v_{1-} - v_{2-}}{v_{1+} - v_{2+}} \quad (1)$$

根据此速度恢复系数, 及两体碰撞无外力做功时碰撞过程中遵循动量守恒定理, 可求出碰撞前后的绝对速度跳跃关系, 并进一步求出碰撞前后的动能变化

$$\begin{aligned} \Delta T &= \Delta T_1 + \Delta T_2 = \\ &= \frac{1}{2}m_1(v_{1+}^2 - v_{1-}^2) + \frac{1}{2}m_2(v_{2+}^2 - v_{2-}^2) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1+} - v_{2+})^2 (1 - e^2) = \\ &= \frac{1}{2} m v_+^2 (1 - e^2) \end{aligned} \quad (2)$$

可以看出, 恢复系数的大小表示了碰撞前后动能变化的幅度, 即从能量观点来看, 恢复系数的实质在于表示碰撞过程中的动能损失. 当不考虑其他能量损失的情况下, 根据能量守恒  $\Delta T = W$ , 即碰撞过程中的动能损失就等于接触力所作的功.

再如图 1(b) 和 (c) 所示, 动态接触理论则需要考虑碰撞过程中的微观变形. 根据变形特点分为可恢复的弹性变形和不可恢复的塑性变形, 相应的碰撞分别称为弹性碰撞和塑性碰撞, 统称为弹塑性碰撞. 对此类模型, 碰撞过程中接触力所作的功为

$$W = W_{AB} + W_{BC} = \int_A^C \mathcal{F}(\delta, \dot{\delta}) d\delta \quad (3)$$

因此, 应用动态接触理论的关键就是建立不同的碰撞过程模型, 即寻找不同形式的接触力 - 变形函数, 并确定其中的各个参数, 以满足两个基本条件: 1) 能合理表示碰撞过程中的变形; 2) 能合理表示碰撞过程中的能量损失.

## 2 几种碰撞过程模型

在后面的分析中, 我们将统一用  $\mathcal{F}(\delta, \dot{\delta})$  表示接触力,  $\delta$  表示接触变形,  $\dot{\delta}$  表示接触速度, 它们都是接触时间的函数. 令  $\dot{\delta}(0) = v_0 = v_+$ .

### 2.1 线性阻尼模型

最简单常用的是线性阻尼模型<sup>[3]</sup>

$$\mathcal{F}(\delta, \dot{\delta}) = \begin{cases} k_n \delta + c_n \dot{\delta} & \delta \geq 0 \\ 0 & \delta < 0 \end{cases} \quad (4)$$

这时, 可把碰撞过程看作一个单自由度振动系统

$$\begin{cases} m\ddot{\delta} + c_n \dot{\delta} + k_n \delta = 0 \\ \dot{\delta}(0) = 0, \delta(0) = v_0 \end{cases} \quad (5)$$

求得系统的解析解为

$$\dot{\delta}(t) = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

$$\dot{\delta}(t) = v_0 e^{-\xi \omega_n t} \left[ \cos(\omega_d t) - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t) \right] \quad (6)$$

式中  $\omega_n = \sqrt{k_n/m}$ ,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ ,  $\xi = \frac{c_n}{2\sqrt{k_n m}} =$

$\frac{c_n}{2\omega_n m}$ , 对于实际的两体碰撞,  $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ .

如果假设接触时间是半个有阻尼的固有周期  $T_d/2$ , 则整个接触过程中接触力所做的功为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{T_d/2} c_n \dot{\delta}(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 (1 - \exp(-2\pi\xi/\sqrt{1 - \xi^2})) \end{aligned} \quad (7)$$

根据  $\Delta T = W$ , 可得阻尼系数与恢复系数之间的关系为

$$\xi = \frac{-\ln e}{\sqrt{\ln^2 e + \pi^2}} \quad (8)$$

且接触阻尼为  $c_n = 2\xi \sqrt{k_n m}$  (9)

### 2.2 非线性阻尼模型

这类模型<sup>[4-6]</sup>的特点是阻尼项与接触变形相关, 以保证接触变形为零时接触力为零. 其中最具有代表性的是 Hunt 提出的非线性阻尼模型

$$\mathcal{F}(\delta, \dot{\delta}) = \begin{cases} k_n \delta + c_n \delta^n \dot{\delta} & \delta \geq 0 \\ 0 & \delta < 0 \end{cases} \quad (10)$$

首先假设在  $e \approx 1$ , 变形完全取决于弹性力, 从而得速度与变形之间的关系为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_0^2 &= \int_0^{\delta_m} k_n \delta^n d\delta = \frac{k_n}{n+1} \delta_m^{n+1} \\ \frac{1}{2} m \dot{\delta}^2 &= \int_0^{\delta_m} k_n \delta^n d\delta = \frac{k_n}{n+1} (\delta_m^{n+1} - \delta^{n+1}) \\ \dot{\delta} &= \sqrt{\frac{2k_n}{m(n+1)}} \sqrt{(\delta_m^{n+1} - \delta^{n+1})} \end{aligned} \quad (11)$$

则整个接触过程中接触力所做的功如下, 且只有当  $p = n$  时才可以容易地进行积分得到

$$\begin{aligned} W &= 2 \int_0^{\delta_m} c_n \delta^n \dot{\delta} d\delta = \\ &= 2 \int_0^{\delta_m} \frac{c_n}{n+1} \left( \frac{2k_n}{m(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} (\delta_m^{n+1} - \delta^{n+1})^{\frac{1}{2}} d\delta^{n+1} = \\ &= \frac{4 c_n}{(q+2)(n+1)} \left( \frac{2k_n}{m(n+1)} \delta_m^{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} \delta_m^{n+1} = \\ &= \frac{2 c_n}{(q+2)k_n} m v_0^3 \end{aligned} \quad (12)$$

根据  $\Delta T = W$ , 可得阻尼与恢复系数之间的关系为

$$C_n = \frac{3(1 - e^2)}{4v_0} k_n \quad (13)$$

由于推导过程中假设  $e \approx 1$ , 所以得到的表达式只能表示大的恢复系数, 而无法表示小的恢复系数. 本文作者对此作了改进, 得到了修正后接触阻尼与恢复系数之间的关系为

$$C_n = \frac{3(1 - e^2)\exp(2(1 - e))}{4v_0} k_n \quad (14)$$

### 2.3 分段塑变模型

这类模型的特点是碰撞膨胀阶段会产生不可恢复的塑性变形, 一般用于研究两碰撞体之间有脆性材料垫存在, 碰撞将导致破碎<sup>[7-9]</sup>.

本文作者在研究物料破碎时提出一种多项式表示的接触模型<sup>[9]</sup>

$$f(\delta, \dot{\delta}) = \begin{cases} k_n \delta^n & \delta \geq 0, \dot{\delta} > 0 \\ k_m (\delta - \delta_r)^n & \delta \geq \delta_r, \dot{\delta} < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (15)$$

根据弹性力做功原理, 在压缩和膨胀阶段分别有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_+^2 &= \int_0^{\delta_n} k_n \delta d\delta = \frac{1}{n+1}k_n \delta_n^{n+1} \\ \frac{1}{2}mv_-^2 &= \int_{\delta_r}^{\delta_n} k_m (\delta - \delta_r) d\delta = \\ &\frac{1}{n+1}k_m (\delta_m - \delta_r)^{n+1} \end{aligned} \quad (16)$$

再根据零速度  $B$  点处力相等条件

$$F_m = k_n \delta_m^n = k_m (\delta_m - \delta_r)^n \quad (17)$$

则膨胀刚度为  $k_{nr} = \frac{1}{e^{2n}} k_n$ , 且不可恢复的变形为

$$\delta_r = (1 - e^2) \delta_m \quad (18)$$

### 2.4 分段弹变模型

这类模型的特点是碰撞膨胀阶段与压缩阶段刚度存在一定的滞回, 但不会产生塑性变形. Andreaus 曾提出一种用双曲函数和指数函数共同表示的滞回模型<sup>[10]</sup>, 但形式比较复杂. 本文介绍一种简单的多项式表示的模型

$$f(\delta, \dot{\delta}) = \begin{cases} k_n \delta^n & \delta \geq 0, \dot{\delta} > 0 \\ k_m \delta^r & \delta \geq 0, \dot{\delta} < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (19)$$

根据弹性力做功原理, 在压缩和膨胀阶段分别有

$$\frac{1}{2}mv_+^2 = \int_0^{\delta_n} k_n \delta_n d\delta = \frac{1}{n+1}k_n \delta_n^{n+1}$$

$$\frac{1}{2}mv_-^2 = \int_0^{\delta_n} k_m \delta^r d\delta = \frac{1}{r+1}k_m \delta_m^{r+1} \quad (20)$$

再根据零速度  $B$  点的力相等条件

$$F_m = k_n \delta_m^n = k_m \delta_m^r \quad (21)$$

则膨胀阶段多项式次数为  $r = \frac{n+1}{e^2} - 1$ , 膨胀刚度为

$$k_n r = k_n (\delta_m)^{n-r} \quad (22)$$

通过以上的推导可以看出, 所有的碰撞过程模型都可以归结为两组参数:

1) 压缩刚度  $k_n$  (简称为接触刚度), 及压缩阶段变形的幂次  $n$ . 其中  $n = 1$  表示线性刚度,  $n \neq 1$  表示非线性刚度. 这两个参数的具体取值一般需要通过实验的方法来测定, 或者可根据 Hertz 接触理论进行估计.

该组参数主要用以描述碰撞过程中的变形, 是刚性碰撞所没有的, 使得弹塑性碰撞可以从更微观的角度去描述碰撞过程. 这正是动态接触理论与古典碰撞理论的不同之处.

2) 恢复系数  $e = 0 \sim 1$ , 一般可根据碰撞体的材料查阅手册得到.

该参数用于表示碰撞过程中的能量损失, 与刚性碰撞相一致. 这使得碰撞问题的两类研究方法, 即动态接触理论和古典碰撞理论, 可以相互联系起来. 在相同参数下进行比较研究.

### 3 模型比较及数值仿真

对一个自由落体的单球碰撞系统, 给定初始高度  $h_0 = 200\text{mm}$ , 接触刚度  $k_n = 1 \times 10^7 \text{N/m}$ , 变形幂次  $n = 1$ . 分别给定恢复系数  $e = 0.7$  和  $e = 0.3$ , 在计算机上用 Matlab 编程计算 1s 的时间历程, 记录所需的计算时间  $t$ , 并根据第一次碰撞过程给出速度恢复系数的计算值  $e^*$ .

表 1 恢复系数计算值  $e^*$  及所需计算时间  $t$

Table 1 Computed restitution coefficient $e^*$ & consumed time $t$						
Models	rigid	linear damp	nonlinear damp	PW - elastic	PW - plastic	
0.7	$e^*$	0.700	0.699	0.683	0.700	0.699
	$t$	0.484	1.235	1.828	1.672	1.375
0.3	$e^*$	0.300	0.299	0.332	0.300	0.295
	$t$	1.485	3.641	4.282	28.20	110.2

从表 1 来看, 采用各种模型数值仿真得出的恢复系数计算值与给定值基本一致, 这表明碰撞过程

可以统一地用恢复系数表示宏观能量损失. 由于非线性阻尼模型的推导中采用了一些假设和修正, 从而计算值与给定值之间的差别稍大. 实际采用这些模型进行数值仿真时, 都是采用其计算过程中得到的恢复系数去衡量能量损失的.

当接触变形已经为零时仍存在接触力; 且在接触过程中出现负的拉力. 这两点与实际碰撞不相符合<sup>[3]</sup>, 一直被看作线性阻尼模型的缺点. 其他模型对此进行了修正, 防止出现这种情况.

4) 随着恢复系数的变化, 模型之间的差别也不同. 尤其是当恢复系数较小时, 虽然线性阻尼模型的缺点变得更加明显, 但分段模型中两阶段转换点 B 处的非光滑性也十分突出, 膨胀阶段近似突变, 使得数值计算的效率大大降低.

因此, 对于较大的恢复系数, 为了微观过程更加接近实际, 可选用分段模型; 而对于较小的恢复系数, 从计算效率和精度方面来看可以选用线性阻尼模型. 实际应用中可根据需要综合考虑, 以选用合适的碰撞过程模型.

## 4 结论

本文首先回顾了碰撞问题的研究方法, 详细介绍了恢复系数的含义和本质. 随后分析了几种不同的碰撞过程模型, 通过详细推导接触力-变形函数中表示能量消耗的参数与恢复系数之间的对应关系, 使得不同模型都可以用接触刚度表示变形, 用恢复系数表示能量损失. 这也阐明了碰撞过程模型与刚性模型之间的区别和联系, 把动态接触理论和古典碰撞理论统一起来.

通过对一个单球碰撞系统进行数值仿真, 验证了参数推导的正确性. 但由于参数对应关系的表达式不同, 使得与恢复系数的对应精度和计算效率不同, 微观接触过程也不同. 总体来说, 几种碰撞过程模型及刚性模型各具优缺点, 适用于不同的实际应用场景.

## 参 考 文 献

- 1 Stronge WJ. Friction in collisions: Resolution of a paradox. *Journal of Applied Physics*, 1991, 69(2): 610~612
- 2 彼得·艾伯哈特, 胡斌. 现代接触动力学. 南京: 东南大学出版社, 2003 (Aberthard P, Hu Bin. *Advanced Contact Dynamics*. Nanjing: SouthEast University Press, 2003 (in Chinese))
- 3 Mishra BK. A review of computer simulation of tumbling mills by the discrete element method: Part I - contact mechanics. *International Journal of Mineral Processing*,

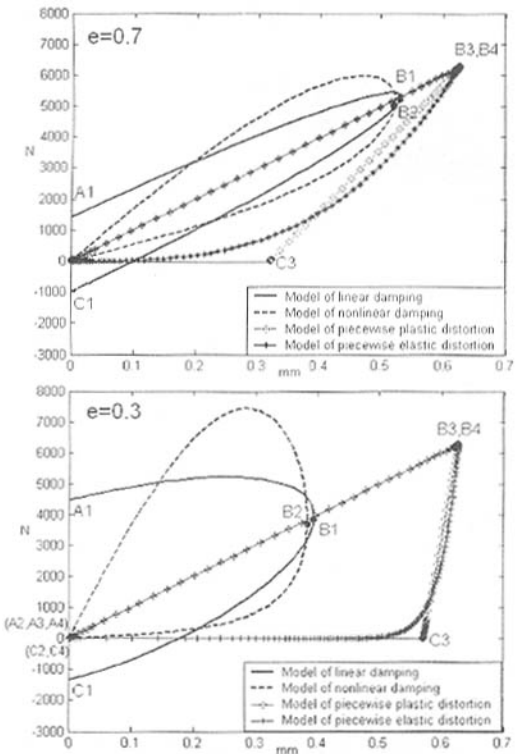


图2 接触力-变形关系曲线

Fig. 2 Curves of contact force - deformation function

如图2所示, 从接触力-变形曲线来看, 各种模型的微观接触过程随着恢复系数的变化有很大的不同. 正是微观接触过程的差别, 使得表1中各模型所需的计算时间不同.

1) 接触过程的差别主要是因为碰撞过程中消耗能量的机制不同. 前两种模型通过与速度成正比的接触阻尼  $c_n$  来消耗碰撞过程中的能量, 可统称为阻尼模型. 后两种模型通过两阶段刚度或变形不同而形成滞回环来消耗碰撞过程中的能量, 即不同于压缩阶段的膨胀刚度  $k_{nr}$ , 膨胀阶段变形的幂次  $r$  及不可恢复的变形  $\delta_r$ , 可统称为分段模型.

2) 阻尼模型中不需单独区分压缩和膨胀阶段, 两阶段的转换是光滑的, 但不能保证在两阶段转换点 B 处接触力最大. 而分段模型中需要将压缩和膨胀阶段分开考虑, 两阶段的转换是非光滑的, 但可以保证在两阶段转换点 B 处接触力最大.

3) 线性阻尼模型在接触开始点 A 和结束点 C,

- 2003 ,71 :73 ~ 93
- 4 Mishra BK , Murty CVR. On the determination of contact parameters for realistic DEM simulations of ball mills. *Powder Technology* ,2001 ,115 :290 ~ 297
- 5 Mishra BK , Thornton C. An improved contact model for ball mill simulation by the discrete element method. *Advanced Powder Technology* ,2002 ,13 :25 ~ 41
- 6 Hunt KH , Crossley FRE. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics* ,1975 ,42 :440 ~ 445
- 7 Stronge WJ. Chain reaction from impact on aggregate of elasto - plastic 'rigid' bodies. *International Journal of Impact Engineering* ,2003 ,28 :291 ~ 302
- 8 SchÖert K. Modelo de molinos de rodillos de atta Presiòn. *ZKG International* ,1998 ,7 :348 ~ 353
- 9 秦志英,赵月静,侯书军. 物料冲击破碎过程中的一种非线性力模型. 振动与冲击 2006 25(2):35 ~ 37( Qin Zhiying , Zhao Yuejing , Hou Shujun. Nonlinear Force Model during Material's Impact Crushing. *Journal of Vibration and Shock* ,2006 25(2) 35 ~ 37( in Chinese ))
- 10 Andreaus U , Casini P. Dynamics of SDOF Oscillators with Hysteretic Motion ~ Limiting Stop. *Nonlinear Dynamics* ,2000 ,22 :155 ~ 174
- 11 赵登峰. 基于 Laplace 变换的线性系统碰撞过程分析方法. 动力学与控制学报 2005 3(4):76 ~ 81 ( Zhao Dengfeng. Impact Process Analysis of Linear System Based on Laplace Transform. *Journal of Dynamics and Control* , 2005 ,3(4) :76 ~ 81( In Chinese ))

## ANALYSIS OF IMPACT PROCESS MODEL BASED ON RESTITUTION COEFFICIENT \*

Qin Zhiying<sup>1,2</sup> Lu Qishao<sup>1</sup>

( 1. School of Science , Beijing University of Aeronautics and Astronautics , Beijing 100083 , China )

( 2. School of Mechanical and Electrical Engineering , Hebei University of Science and Technology , Shijiazhuang 050054 , China )

**Abstract** The meaning and function of restitution coefficient were introduced , and some kinds of impact process models were analyzed. By deriving the relationship between the restitution coefficient and the model parameters , the energy dissipation was described as restitution coefficient , and the contact deformation was described as contact stiffness for different models. This also demonstrated the difference and connection between the impact process models and the rigid impact model. Through the numerical simulations of an impact system of falling ball , the derived relationship were verified and these models were compared in view of computation precision , efficiency and micro - contact process.

**Key words** impact process model , contact force - deformation function , restitution coefficient