

平方非线性振动方程的渐近解及其数值验证

蔡萍 马米花

(漳州师范学院数学系,漳州 363000)

摘要 改进的 Lindstedt-Poincaré(L-P)法在传统的 L-P 法的基础上,对频率的展开式作了改进,卷积分法则提供了一个求近似解的迭代格式.本文首先用这两种方法求得平方非线性振动方程的二阶渐近解,并用 Picard 逐步逼近法证明由卷积分法得到的渐近解在有限的时间上是一致收敛的.其次,一种数值阶验证技术证实求得的二阶渐近解对小参数都是一致有效的.最后,对这两种渐近解进行误差的数值比较,结果表明它们对大参数无效,并简明分析其失效的原因.因此,这两种方法在平方非线性振动方程中的应用受到小参数的限制.

关键词 非线性振动,改进的 L-P 法,卷积分法,数值验证

引言

经典的摄动法被广泛应用于研究非线性振动方程^[1-3].但是,这种方法只能解决带有小参数的问题,从而使其在应用上受到限制.为了克服这一限制,近年来已提出许多改进的方法.例如,对 Duffing 方程^[1-3],用改进的 L-P 法^[4]和卷积分法^[5]得到的渐近解已被证实其不仅对小参数一致有效,而且对大参数也一致有效.最初由 Bosley 提出的数值阶验证技术可用于验证渐近解的定量精确度以及精确度的阶^[6].文[7]用 L-P 法求得某个来源于广义相对论的非线性方程的渐近解,修正了 Bosley 的方法,并从数值上验证渐近解一致有效.考虑平方非线性振动方程

$$\ddot{x} + x + \epsilon x^2 = 0, x(0) = A, \dot{x}(0) = 0 \quad (1)$$

其中“·”表示对时间 t 的求导, ϵ 是正的参数.

按照改进的 L-P 法^[8],引入新的自变量 $\tau = \omega t$,方程(1)变为

$$\omega^2 x'' + x + \epsilon x^2 = 0, x(0) = A, x'(0) = 0 \quad (2)$$

其中“'”表示对 τ 求导.把 x 和 ω^2 都展成的幂级数形式,即

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \epsilon x_1(\tau) + \epsilon^2 x_2(\tau) + \dots \quad (3)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (4)$$

把等式(3)(4)代入方程(2)得

$$\begin{aligned} & \omega^2(x_0'' + \epsilon x_1'' + \epsilon^2 x_2'' + \dots) + (\omega^2 - \epsilon \omega_1 - \\ & \epsilon^2 \omega_2 - \dots)(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) = \\ & -\epsilon(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

比较等式两边同次幂的系数可得线性微分方程组

$$x_0'' + x_0 = 0 \quad (6)$$

$$x_1'' + x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} x_0 - \frac{x_0^2}{\omega^2} \quad (7)$$

$$x_2'' + x_2 = \frac{\omega_2}{\omega^2} x_0 + \frac{\omega_1}{\omega^2} x_1 - \frac{2}{\omega^2} x_0 x_1 \quad (8)$$

⋮

对上述方程组利用消去久期项的附加条件,便能逐次确定各未知函数.

对于卷积分法^[5],考虑非线性振动系统

$$\ddot{x} + F(x) = 0, x(0) = A, \dot{x}(0) = 0 \quad (9)$$

假设系统的自然频率为 ω ,则其精确解为

$$\begin{aligned} x(t) = & A \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t [\omega^2 x(\tau) - F(x(\tau))] \times \\ & \sin \omega(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\frac{1}{\omega} \int_0^t [\omega^2 x(\tau) - F(x(\tau))] \sin \omega(t - \tau) d\tau$ 称为

卷积分.对方程(1)取 $F(x) = x + \epsilon x^2$.

取 $x_0 = A \cos \omega t$,利用迭代式

$$\begin{aligned} x_n = & A \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t [\omega^2 - 1] x_{n-1}(\tau) - \\ & \epsilon x_{n-1}^2(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

可获得更高阶的近似解.

1 平方非线性振动方程的渐近解

按照改进的 L-P 法^[8],可以求得方程(1)的二阶渐近解为

$$x_{asym} = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 \tag{11}$$

其中

$$x_0 = A \cos \omega t \tag{12}$$

$$x_1 = \frac{A^2}{6\omega^2} (2\cos \omega t + \cos 2\omega t - 3) \tag{13}$$

$$x_2 = \frac{A^3}{144\omega^4} (29\cos \omega t + 16\cos 2\omega t + 3\cos 3\omega t - 48) \tag{14}$$

$$\omega = \frac{1}{6} \sqrt{18 + 3\sqrt{36 - 120A^2\epsilon^2}} \tag{15}$$

同样地,按照卷积分法^[5]迭代得到方程(1)的二阶近似解为

$$x_{asym} = \frac{1}{2160\omega^6} (1080A^2\epsilon\omega^2 - 720A^2\epsilon^2\omega^2 - 2160A^2\epsilon\omega^4 - 1200A^2\epsilon\omega^4\cos\omega t + 435A^3\epsilon^2\omega^2\cos\omega t + 1920A^2\epsilon\omega^4\cos\omega t + 2160A\omega^6\cos\omega t + 120A^2\epsilon\omega^2\cos 2\omega t + 240A^3\epsilon^2\omega^2\cos 2\omega t + 240A^2\epsilon\omega^4\cos 2\omega t + 45A^3\epsilon^2\omega^2\cos 3\omega t) \tag{16}$$

其中

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{A\epsilon}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{9 + 6A\epsilon - 29A^2\epsilon^2}} \tag{17}$$

我们可以证明由卷积分法得到的近似解在有限的时间上是一致收敛的.

定理 1 对非线性振动系统(9),若 $F(x)$ 在 $R, 0 \leq t \leq h, |x - x_0| \leq a$ 上连续,则由卷积分法迭代得到的近似解 $\{x_n\}$ 在 $0 \leq t \leq h$ 上是一致收敛的.

证明 由卷积分法迭代得到的近似解为

$$x_n = A \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t [\omega^2 x_{n-1}(\tau) - F(x_{n-1}(\tau))] \sin \omega(t - \tau) d\tau, n = 1, 2, 3, \dots$$

令

$$f(\tau, x) = [\omega^2 x(\tau) - F(x(\tau))] \sin \omega(t - \tau)$$

下证函数序列

$$x_0 = A \cos \omega t, x_n = x_0 + \frac{1}{\omega} \times$$

$$\int_0^t f(\tau, x_{n-1}(\tau)) d\tau, n = 1, 2, 3, \dots$$

在 $0 \leq t \leq h$ 一致收敛.

考虑级数 $x_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [x_k(t) - x_{k-1}(t)], 0 \leq t \leq h$

$$|x_1 - x_0| = \left| \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau, x_0(\tau)) d\tau \right| \leq$$

$$\frac{1}{\omega} \int_0^t |f(\tau, x_0(\tau))| d\tau \leq \frac{M}{\omega} t$$

其中, M 是 $f(\tau, x)$ 的界, 即 $|f(\tau, x)| \leq M, \forall (\tau, x) \in R$

$$|x_2 - x_1| \leq \frac{1}{\omega} \int_0^t |f(\tau, x_1(\tau)) -$$

$$f(\tau, x_0(\tau))| d\tau \leq \frac{L}{\omega} \int_0^t \times$$

$$|x_1 - x_0| d\tau \leq \frac{L}{M}$$

$$\int_0^t \frac{M}{\omega} \tau d\tau = \frac{ML}{2\omega^2} t^2$$

其中, L 是 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的界, 即 $\left| \frac{\partial f(\tau, x)}{\partial x} \right| \leq L, \forall (\tau, x) \in R$

设对于正整数 n , 如果 $|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{ML^{n-1}}{n! \omega^n} t^n$ 成立, 则

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{\omega} \int_0^t |f(\tau, x_n(\tau)) -$$

$$f(\tau, x_{n-1}(\tau))| d\tau \leq \frac{L}{\omega} \times$$

$$\int_0^t |x_n - x_{n-1}| d\tau \leq \frac{ML^n}{n! \omega^{n+1}} \times$$

$$\int_0^t \tau^n d\tau = \frac{ML^n}{(n+1)! \omega^{n+1}} t^{n+1}$$

所以, 对所有的正整数 K , 有

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \frac{ML^{K-1}}{K! \omega^K} t^k \leq \frac{ML^{K-1}}{K! \omega^K} h^k (0 \leq t \leq h)$$

显然, 正项级数 $\sum_{K=1}^{\infty} \frac{ML^{K-1}}{\omega^K} \frac{h^K}{K!}$ 收敛, 所以 $\sum_{K=1}^{\infty} [x_K(t) - x_{K-1}(t)]$ 在 $0 \leq t \leq h$ 一致收敛.

因此, 部分和 $x_0(t) + \sum_{k=1}^n [x_k(t) - x_{k-1}(t)] = x_n$ 在

0 ≤ t ≤ h 上一致收敛.

显然, F(x) = x + εx² 满足定理条件.

2 渐近解的数值阶验证

首先简要介绍 Bosley 的数值阶验证技术^[6]. 假设非线性振动方程的渐近解为

$$\begin{aligned}
 x_{asy}(t, \epsilon) = & x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \\
 & \epsilon^2 x_2(t) + \dots + \epsilon^N x_N(t) + \\
 & O(\epsilon^{N+1})
 \end{aligned} \tag{18}$$

设渐近解的误差为

$$\begin{aligned}
 Error = E_N(t, \epsilon) = & |x_{exact}(t, \epsilon) - \\
 & x_{asy}(t, \epsilon)| = |x_{exact}(t, \epsilon) - \\
 & \sum_{n=0}^N \epsilon^n x_n(t)| = O(\epsilon^{N+1}) = K\epsilon^{N+1}
 \end{aligned} \tag{19}$$

其中 K 是常数. 对方程(19)两边同时取对数得到

$$\log(Error) = \log(E_N) = \log K + (N + 1)\log\epsilon \tag{20}$$

如果对小参数 ε 和某个固定值 t = t₀, E_N 的阶是 O(ε^{N+1}), 那么 log E_N 作为 log ε 的函数是线性的且斜率为 N + 1. 这样对不同的 ε 值, 画出 log E_N 与 log ε 的关系图时, 这些点应近似在一条直线上, 且用最小二乘法拟合的直线的斜率近似为 N + 1.

由于误差在不同的时间 t 上的取值不同, 为了更恰当地评价渐近解和数值解之间的误差, 文[7]在有限个点 t = t_i (i = 1, 2, ..., m) 定义平均误差, 而不是文[6]在固定点 t = t₀ 取值. 令

$$\text{Average Error} = \bar{E}_N(t, \epsilon) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E_N(t_i, \epsilon) \tag{21}$$

其中 t_i 是 t 的取值范围内的点.

为了验证由改进的 L-P 法得到的渐近解的阶, 取 A = 1, t_i = i, i = 1, 2, ..., 10, 以及 ε 以步长 0.003 从 0.01 增加到 0.1, 计算出方程(1)的数值解. 接着取同样的 ε 和 t_i 值求出渐近解(11), 方程(19)中的 x_{exact}(t, ε) 用数值解代替. 对于 N = 0, 1, 2, 图 1 分别画出 Log ε 与 Log E₀⁽¹⁾, Log E₁⁽²⁾ 和 Log E₂⁽²⁾ 对应的 31 个点, 这些点用最小二乘法拟合的直线的斜率分别为 1.01518, 2.04088 和 3.02758, 这与理论上的斜率 N + 1 = 1, 2 和 3 相当一致.

同样地, 为了验证由卷积积分法得到的渐近解的阶, 取 A = 1, t_i 和 ε 值同上, 代入方程(16)(17)求

出渐近解. 对于 N = 0, 1, 2, 图 2 分别画出 Log ε 与 Log E₀⁽²⁾, Log E₁⁽²⁾ 和 Log E₂⁽²⁾ 对应的 31 个点, 这些点用最小二乘法拟合的直线的斜率分别为 1.01518, 2.04088 和 3.02202, 这与理论上的斜率 N + 1 = 1, 2 和 3 也是相当一致的.

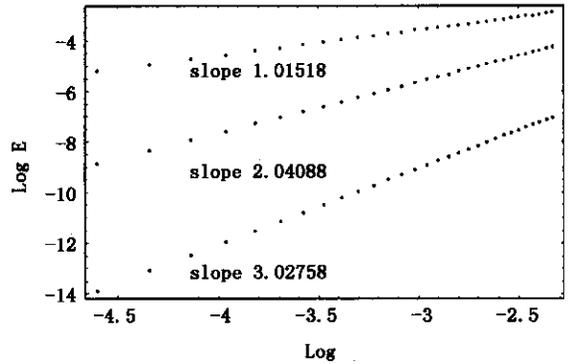


图 1 用改进的 L-P 法得到的渐近解的数值验证

Fig.1 Numerical verification of the asymptotic solution obtained by the modified L-P method

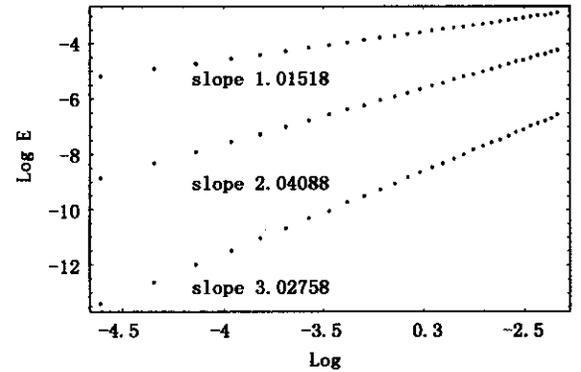


图 2 用卷积积分法得到的渐近解的数值验证

Fig.2 Numerical verification of the asymptotic solution obtained by the convolution integral method

可见对于平方非线性振动方程, 用改进的 L-P 法和卷积积分法得到的渐近解对小参数都是一致有效的.

3 两种方法对大参数的误差的数值比较

文[5][9]指出对立方非线性振动方程, 由改进的 L-P 法和卷积积分法所得到的渐近解不仅对小参数 ε, 而且对大参数 ε 都是一致有效的.

对平方非线性振动方程, 下面用数值阶验证技术[6, 7]验证这两种方法对大参数的有效性. 为了简单起见, 只取二阶渐近解作为例子.

对于改进的 L-P 法, 取 A = 1, t_i = i, i = 1, 2, ...

... ,10, ϵ 以步长 0.015 从 0.1 增加到 0.46, 图 3 画出 ϵ 与 $\bar{E}_2^{(1)}$ 对应的 25 个点. 从图可以看到当 $\epsilon > 0.4$ 时, 误差超过 0.13.

对于卷积积分法, 取 $A = 1, l_i$ 和 ϵ 的值同上, 图 4 画出 ϵ 与 $\bar{E}_2^{(2)}$ 对应的 25 个点. 从图可以看到当 $\epsilon > 0.4$ 时, 误差超过 0.17.

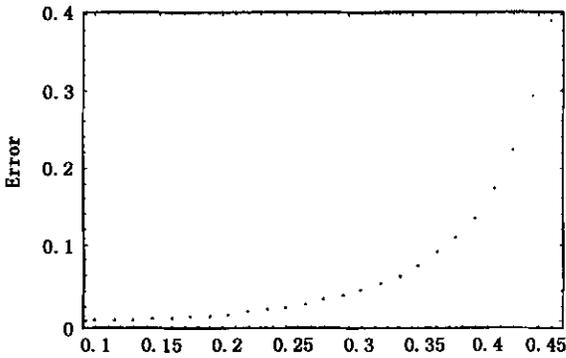


图 3 用改进的 L-P 法得到的二阶渐近解对大参数的误差
Fig.3 Error of the second order asymptotic solution obtained by the modified L-P method for large parameter

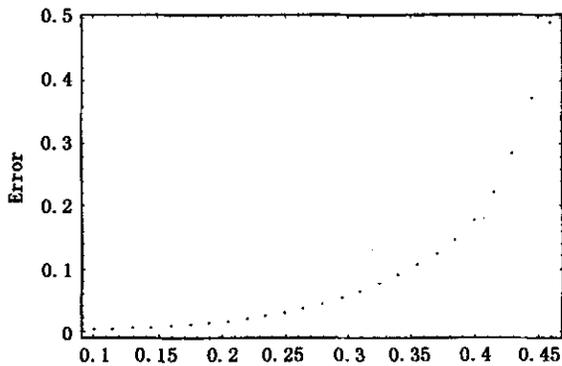


图 4 用卷积积分法得到的二阶渐近解对大参数的误差
Fig.4 Error of the second order asymptotic solution obtained by the convolution integral method for large parameter

可见对于平方非线性振动方程, 用改进的 L-P 法和卷积积分法得到的渐近解对大参数 ϵ 是无效的. 事实上, 当 $\epsilon A > 0.5$ 时, 式(15)是无效的, 而当 $\epsilon A > 0.7$ 时, 式(17)也是无效的.

4 结论

对于平方非线性振动方程, 用改进的 L-P 法和

卷积积分法得到的渐近解对小参数都一致有效, 而且用卷积积分法迭代得到的渐近解是一致收敛的. 但这两种方法得到的频率的表达式都限制了取值. 因此, 由这两种方法得到的渐近解对大参数是无效的.

致谢 作者感谢蔡建平教授的指导和胡辉教授有益的建议.

参 考 文 献

- 1 Mickens RE. Oscillations in planar dynamic systems. Singapore : World Scientific , 1996
- 2 Nayfeh AH, Mook DT. Nonlinear oscillations. New York : Wiley , 1979
- 3 Nayfeh AH. Introduction to perturbation techniques. New York : Wiley , 1981
- 4 Cheung YK, Chen SH, Lau SL. A modified Lindstedt-Poincaré method for certain strongly non-linear oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* , 1991 , 26 :367-378
- 5 Hu H, Tang JH. A convolution integral method for certain strongly nonlinear oscillators. *Journal of Sound and Vibration* , 2005 , 285 :1235-1241
- 6 Bosley DL. A technique for the numerical verification of asymptotic expansions. *SIAM Review* , 1996 , 38 (1) :128-135
- 7 Cai JP. Numerical verification of the order of the asymptotic solutions of a nonlinear differential equation. *Mathematical and Computational Applications* , 2006 , 11(1) 85-90
- 8 何吉欢. 工程与科学中的近似非线性分析方法. 郑州 : 河南科技出版社 , 2002(He Jihuan. Approximate nonlinear analytical techniques in science and engineering. Zhengzhou : Henan Science and Technology Publishing House , 2002 (in Chinese))
- 9 Hu H, Xiong ZG. Comparison of two Lindstedt-Poincaré-type perturbation methods. *Journal of Sound and Vibration* , 2004 , 278 :437-444

ASYMPTOTIC SOLUTION OF A QUADRATIC NONLINEAR OSCILLATOR AND NUMERICAL VERIFICATION

Cai Ping Ma Mihua

(*Department of Mathematics , Zhangzhou Teachers College , Zhangzhou 363000 ,China*)

Abstract The modified Lindstedt-Poincaré method modifies the expansion of the fundamental frequency based on the classical L-P method , and the convolution integral method provides an iteration scheme to obtain the asymptotic solution . Firstly , we obtained the second order solutions of a quadratic nonlinear oscillator respectively by these two methods , and demonstrated that the solution obtained by convolution integral was uniformly convergent . Secondly , a technique of numerical order verification was applied to verify that the asymptotic solutions were uniformly valid for small parameter . Finally , numerical comparison of error shows that this two methods are invalid for large parameter . So , these two methods are limited by small parameter when they are applied to quadratic nonlinear oscillator .

Key words nonlinear oscillation , modified Lindstedt-Poincaré method , convolution integral method , numerical verification