

# 带干摩擦的非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值计算\*

付士慧 王琪 王士敏

(北京航空航天大学理学院,北京 100083)

**摘要** 对带干摩擦的非光滑动力系统,在不连续点利用闭上链(cocycle)得到一个传递矩阵,由此给出一种非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值计算方法.该方法是根据计算光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值方法而提出的.通过对带干摩擦的动力系统进行 Lyapunov 指数的数值计算,结合时间历程图和 Poincare 映射对其动力学特性进行了分析.数值结果表明该方法的可行性和有效性,与一般的计算非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值算法相比,该方法更便于数值计算.

**关键词** 干摩擦,传递矩阵,非光滑动力系统, Lyapunov 指数

## 引言

Lyapunov 指数是判定动力系统运动特性的工具之一,它给出了对系统任意相邻轨线平均发散程度或平均收敛程度的一种度量,是判别系统动力学行为的一种特征量.对光滑动力系统, Lyapunov 指数的数值计算方法研究已比较成熟<sup>[1,2]</sup>.对于自治的光滑动力系统,其 Lyapunov 指数的计算是同时数值求解下列系统动力学方程(1)及其线性化方程(2)

$$\dot{x} = f(x(t)), x(0) = x_0 \quad (1)$$

其中,  $x \in R^n$ ,  $f \in C^1$ ,  $C^1$  为所有连续可微的向量函数组成的集合

$$\dot{u}(t) = J(x(t))u(t) \quad (2)$$

其中,  $J(x(t)) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x(t)}$  是方程(1)的 Jacobi 矩阵,  $u(t) = y(t) - x(t)$  ( $y(t)$  是系统方程(1)以初值  $y_0$  的解,并且  $y_0$  是  $x_0$  邻域的一点).对于非自治动力系统,将其转化成自治系统后,上述计算 Lyapunov 指数的数值方法自然成立.

带干摩擦的动力系统是具有不连续点的非光滑动力系统,即方程(1)中的右端函数在某些点是不连续的.由于存在不连续点,系统方程 Jacobi 矩阵不存在,上述计算 Lyapunov 指数的算法不能直接被用到非光滑动力系统.为此,在不连续点[3]定义了闭上链(cocycle)从理论方面进行了研究,而

[4]通过修正矩阵给出了数值计算方法;甚至[5]还利用混沌同步给出了非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值估算方法,避免了系统方程 Jacobi 矩阵的计算.然而,这些方法在一定程度上都有局限性.例如[3]中闭上链(cocycle)的定义是对系统方程产生的半流而言的,但是绝大多数系统方程没有解析解,即系统产生的半流不能用解析方法给出,所以这种方法不利于数值计算[4]中利用的修正矩阵没有严格的理论背景,并且数值计算一直采用 Euler 算法,计算的精确和效率都比较低;利用[5]给出的算法便于分析系统的混沌与周期运动,不便于分析系统的分岔点.本文利用[3]在不连续点定义的闭上链(cocycle),进一步得到了一个传递矩阵,从而将计算光滑动力系统 Lyapunov 指数的思想方法应用到非光滑动力系统,给出了一种带干摩擦的非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值计算方法,该方法更便于数值计算.我们将显示该方法精度和效率要比[4]给出的方法有所提高,并且通过算例表明利用该方法能很好的识别分岔点.

本文具体安排如下:首先根据[3]在不连续点定义的闭上链(cocycle),得到了一个传递矩阵;其次,利用这个传递矩阵,将计算光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值算法应用到非光滑动力系统,具体给出了一种非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值计算方法;最后,将该方法应用到一个带干摩擦的动力系统,通过计算 Lyapunov 指数,对其动力

学特性进行分析.

### 1 传递矩阵

带干摩擦的非光滑动力系统以  $x(0) = x_0$  为初值,假定在时间  $t^1(x_0) > 0$ ,系统第一次到达不连续点,在时间  $t^2(x_0)$  ( $0 < t^1(x_0) < t^2(x_0)$ )系统第二次到达不连续点,那么在  $[0, t^2(x_0))$ ,系统的动力学方程可表示为

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) = \begin{cases} f_-(x(t)) & 0 \leq t < t^1(x_0) \\ f_+(x(t^1)) & t = t^1(x_0) \\ (h(x(t^1)) = 0) \\ f_+(x(t)) & t^1(x_0) < t < t^2(x_0) \end{cases} \quad (3a)$$

其中  $x, f_-, f_+ \in R^n$  并且  $f_-, f_+, h \in C^1$ . 开始,系统的运动形式可由方程(3a)表示.  $h(x) = 0$  表示当时间  $t$  到达  $t^1(x_0)$  时,系统的运动形式开始发生了变化,进而系统的运动由方程(3b)表示. 当然,在  $(t^2(x_0), +\infty)$  还存在很多不连续的时刻,在不连续时刻之间可定义类似  $f_-, f_+$  的光滑函数. 这样带干摩擦的非光滑动力系统的动力学方程在  $[0, +\infty)$  可表示为分段光滑的函数. 为方便起见,本文只对方程(3)进行研究,得到的结论对类似的区间方程也自然成立.

在方程(3)中,  $t^1(x_0)$  为不连续时刻,系统方程 Jacobi 矩阵不存在. 假定在此定义一个传递矩阵  $J_n(x(t^1))$ ,相应地可定义动力学方程(3)的广义线性化方程

$$\dot{u}(t) = J(x(t))u(t) \quad (4)$$

其中

$$J(x(t)) = \begin{cases} \frac{\partial f_-}{\partial x} \Big|_{x=x(t)} & 0 \leq t < t^1(x_0) \\ J_n(x(t^1)) & t = t^1(x_0) \\ \frac{\partial f_+}{\partial x} \Big|_{x=x(t)} & t^1(x_0) \leq t < t^2(x_0) \end{cases}$$

$u(t)$  的定义与方程(2)类似. 对光滑动力系统,系统方程的线性化方程主要通过求其 Jacobi 矩阵得到. 对非光滑动力系统,系统方程存在不连续点,在不连续点系统方程的 Jacobi 矩阵不存在,这样非光滑动力系统不存在线性化方程,所以在不连续点我们定义传递矩阵后,称方程(4)为方程(3)的广义线性化方程.

此时,比较方程(3)(4)和方程(1)(2),它们的形式基本一致. 这样,只要知道广义线性化方程在不连续点的传递矩阵,就可将光滑动力系统 Lyapunov 指数数值计算方法应用到非光滑动力系统. 下面,我们将根据[3]中在不连续点定义的闭上链(cocycle)近似求得传递矩阵  $J_n(x(t^1))$ . 令  $\Delta t$  为时间  $t$  的步长,  $t_k$  是经过积分  $k$  次后的时间,那么  $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ . 假定在时间  $t = t_k$  时,非光滑动力系统相邻轨线在同一时刻之差即  $u(t_k)$  已知.

在时刻  $t_k$  对方程(3)应用 Euler 算法<sup>[6]</sup>,有

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \Delta t f(x(t_k)) = \begin{cases} x(t_k) + \Delta t f_-(x(t_k)) & 0 \leq t_k < t^1(x_0) \\ x(t^1) + \Delta t f_+(x(t^1)) & t_k = t^1(x_0) \\ x(t_k) + \Delta t f_+(x(t_k)) & t^1(x_0) < t_k < t^2(x_0) \end{cases} \quad (5)$$

记  $Jac(x(t^1)) =$

$$\frac{(f_+(x(t^1)) - f_-(x(t^1))) \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x(t^1)}}{\frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=x(t^1)} f_-(x(t^1))}$$

看作由方程(3)产生的半流,因此它的闭上链(cocycle)见参考文献[3]

$D\varphi(t_k, x(t_k)) =$

$$\begin{cases} I + \Delta t \frac{\partial f_-}{\partial x} \Big|_{x=x(t_k)} & 0 \leq t_k < t^1(x_0) \\ (I + Jac(x(t^1))) \wedge I + \Delta t \frac{\partial f_-}{\partial x} \Big|_{x=x(t^1)} \\ t_k = t^1(x_0) \\ I + \Delta t \frac{\partial f_+}{\partial x} \Big|_{x=x(t_k)} & t^1(x_0) < t_k < t^2(x_0) \end{cases} \quad (6)$$

其中  $I$  为单位矩阵. 根据闭上链(cocycle)的性质和的定义

$u(t_{k+1}) = D\varphi(t_k, x(t_k))u(t_k) =$

$$\begin{cases} u(t_k) + \Delta t \frac{\partial f_-}{\partial x} \Big|_{x=x(t_k)} & 0 \leq t_k < t^1(x_0) \\ (I + Jac(x(t^1))) \wedge I + \Delta t \frac{\partial f_-}{\partial x} \Big|_{x=x(t^1)} \\ t_k = t^1(x_0) \\ u(t_k) + \Delta t \frac{\partial f_+}{\partial x} \Big|_{x=x(t_k)} & u(t_k) \\ t^1(x_0) < t_k < t^2(x_0) \end{cases} \quad (7)$$

同时,我们可用下列方法计算  $u(t_{k+1})$ ,并使两种方

法计算得到的结果相同。

在时间  $t_k$  对方程(4)应用 Euler 算法<sup>[6]</sup>,有

$$\begin{cases}
 u(t_{k+1}) = u(t_k) + \Delta t J(x(t_k))u(t_k) = \\
 u(t_k) + \Delta t \left. \frac{\partial f_-}{\partial x} \right|_{x=x(t_k)} u(t_k) & 0 \leq t_k < t^1(x_0) \\
 u(t^1) + \Delta t J_r(x(t^1))u(t^1) & t_k = t^1(x_0) \\
 u(t_k) + \Delta t \left. \frac{\partial f_+}{\partial x} \right|_{x=x(t_k)} u(t_k) & t^1(x_0) < t_k < t^2(x_0)
 \end{cases} \quad (8)$$

比较方程(7)和方程(8),在时间  $t_k = t_1$ ,有

$$\begin{aligned}
 & (I + Jac(x(t^1))) \left( I + \Delta t \left. \frac{\partial f_-}{\partial x} \right|_{x=x(t^1)} \right) \times \\
 & u(t^1) = u(t^1) + \Delta t J_r(x(t^1)) \times \\
 & (u(t^1)) \quad (9)
 \end{aligned}$$

因此,由(9)我们可以得到传递矩阵

$$\begin{aligned}
 J_r(x(t^1)) &= \frac{1}{\Delta t} (Jac(x(t^1))) + (I + \\
 & Jac(x(t^1))) \left. \frac{\partial f_-}{\partial x} \right|_{x=x(t^1)} \quad (10)
 \end{aligned}$$

其中,  $Jac(x(t^1)) =$

$$\frac{(f_+(x(t^1)) - f_-(x(t^1))) \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x(t^1)}}{\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x(t^1)} f_-(x(t^1))}$$

### 2 数值算法

带干摩擦的非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值计算方法与光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值计算方法基本一致,主要是同时数值求解系统的动力学方程及广义线性化方程.具体算法如下:

首先,得到系统的动力学方程,根据(10)计算系统在不连续点的传递矩阵,从而得到广义线性化方程.

其次,将积分过程在时域分为  $K$  段  $[0, T], [T, 2T], \dots, [(K-1)T, KT]$ .系统方程任给  $n$  个初始值,广义线性化方程任给  $n$  个线性无关的初始扰动,同时求解系统的动力学方程及广义线性化方程,当从时间 0 积分到时间  $T$ ,广义线性化方程得到的向量记为  $\delta x_{11}, \delta x_{21}, \dots, \delta x_{n1}$ .把这些向量进行 Gram-Schmidt 正交化后为  $u_{11}, u_{21}, \dots, u_{n1}$ .对其范数归一化处理后做为下一次积分的初值,当从时间  $T$

积分到时间  $2T$ ,广义线性化方程得到的向量记为  $\delta x_{12}, \delta x_{22}, \dots, \delta x_{n2}$ ,进行向量 Gram-Schmidt 正交化后为  $u_{12}, u_{22}, \dots, u_{n2}$ .对其范数归一化后结果做为下一次积分的初值,重复上述过程,直到积分到时间  $KT$ ,广义线性化方程得到的向量 Gram-Schmidt 正交化后记为  $u_{1K}, u_{2K}, \dots, u_{nK}$ .当  $K$  足够大时,可得到系统全部的 Lyapunov 指数<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned}
 \lambda_i &\approx \frac{1}{KT} \ln \prod_{k=1}^K \|u_{ik}\| = \frac{1}{KT} \sum_{k=1}^K \|u_{ik}\| \\
 &(i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)
 \end{aligned}$$

注记 1)与光滑动力系统类似,当非光滑动力系统为非自治时,转化成自治系统后,再按上述算法进行 Lyapunov 指数的数值计算.

2 [4]中利用修正矩阵和 Euler 方法给出了一种计算非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值算法.而它给出的修正矩阵没有理论依据,在数值计算过程中一直沿用 Euler 方法,计算精度显然不高.本文利用闭上链(cocycle)进一步得到了一个传递矩阵,从而给出计算非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值算法.闭上链(cocycle)有严格的理论基础,并且在整个数值计算过程中还可用其它求解常微分方程的数值算法比如龙格-库塔(RK4)等算法,提高了计算精度.

3)由上面描述易见,计算非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值算法和光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值算法几乎一致,关键是不连续点处传递矩阵的计算.这样我们只要按照(10)给出的公式计算出传递矩阵,就可以利用计算光滑动力系统 Lyapunov 指数的算法进行非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值计算.

### 3 数值应用

对带干摩擦振子非线性动力学特性的研究一直是人们关注的问题<sup>[8,9]</sup>. [4]给出了一个带干摩擦的动力系统,并具有粘性阻尼和外激力,具体模型用微分包含[3]表示如下

$$\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + \lambda \sin(\theta) + \alpha \text{Sgr}(\dot{\theta}) - A \sin(\omega t) \ni 0 \quad (12)$$

其中  $\cdot = \frac{d}{dt}$ ,  $\beta, \lambda, A, \omega \in R, \alpha \in R^+, \theta, \dot{\theta}$  分别是系统的位移和速度,并且

$$\text{Sgn}(\dot{\theta}) = \begin{cases} -1 & \text{if } \dot{\theta} < 0 \\ 1 & \text{if } \dot{\theta} > 0 \\ [-1, 1] & \text{if } \dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

此系统为非自治系统,为了计算 Lyapunov 指数首先要转化成自治系统,令  $x = [\theta, \dot{\theta}, z]^T$  ( $z = t$  为系统运动的时间),系统方程(12)化为

$$\dot{x} = f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ A \sin(\omega t) - \beta \dot{\theta} - \lambda \sin(\theta) + \alpha \\ 1 \end{bmatrix} & \text{if } \dot{\theta} < 0 \\ f_2(x) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ A \sin(\omega t) - \beta \dot{\theta} - \lambda \sin(\theta) - \alpha \\ 1 \end{bmatrix} & \text{if } \dot{\theta} > 0 \\ f_3(x) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{if } \dot{\theta} = 0 \text{ and } |A \sin(\omega t) - \lambda \sin(\theta)| \leq \alpha \\ f_4(x) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ A \sin(\omega t) - \lambda \sin(\theta) + \alpha \text{sgn}(A \sin(\omega t) - \lambda \sin(\theta)) \\ 1 \end{bmatrix} & \text{if } \dot{\theta} = 0 \text{ and } |A \sin(\omega t) - \lambda \sin(\theta)| > \alpha \end{cases} \quad (13)$$

利用(10)计算在不连续点的传递矩阵后,可以得到方程(13)的广义线性化方程,那么根据(11)就可计算该系统所有的 Lyapunov 指数.由方程(13),该系统运动形式变化多样,在不同阶段的方程有  $f_1, f_2, f_3, f_4$ ,它们两两组合可以得到多个传递矩阵.为简洁,我们只计算其中两个,其余传递矩阵的计算类似.

假定  $f_-(x), f_+(x), h(x), \Delta t$  如前面定义.开始给系统一个正向初始速度,即  $\dot{\theta} > 0$ ,系统方程  $f_-(x) = f_2(x)$ ,当  $t = t_1$ ,有  $h(x) = \dot{\theta} = 0$ ,系统开始静止,那么系统方程为  $f_+(x) = f_3(x)$ .因此,在不连续点  $t_1$  的传递矩阵

$$J_r(x(t_1)) = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left. \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \right|_{x=x(t_1)}$$

当系统静止一段时间后,在  $t = t_2$ ,有  $h(x) = A \sin(\omega t) - \beta \dot{\theta} - \lambda \sin(\theta) - \alpha = 0$ ,系统又开始以正向速度运动,此时  $f_-(x) = f_3(x), f_+(x) = f_2(x)$ ,而在不连续点  $t_2$  的传递矩阵

$$J_r(x(t_2)) = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\left. \frac{\partial f_3(x)}{\partial x} \right|_{x=x(t_2)}$$

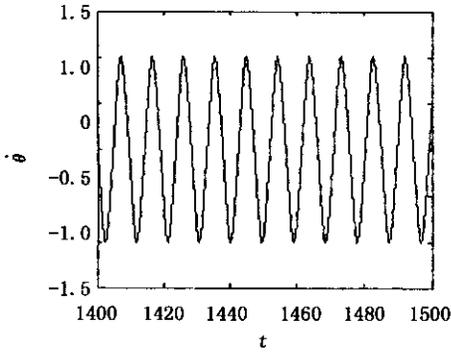
.....

该系统转化成自治系统后,系统维数为 3,那么系统会有 3 个 Lyapunov 指数.根据系统方程(13)和传递矩阵其中一个 Lyapunov 指数为 0.[4]也给出了一种非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值计算方法,并对上述算例进行了数值模拟.但它没有给出 Lyapunov 指数随参数变化的示意图.下面,我们将应用本文给出的算法也对该算例进行 Lyapunov 指数的数值计算,结合时间历程图和 Poincare 映射分析它的动力学行为.

取定系统参数  $\lambda = 0.87, A = 0.586, \omega = 0.666$ .

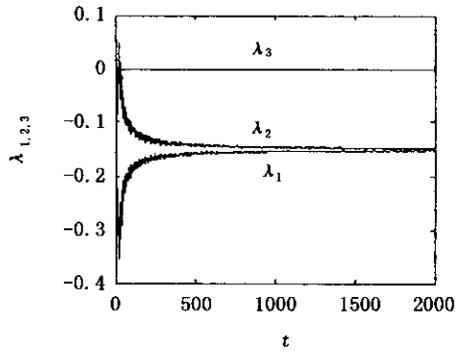
图 1 给出了具有 slip-slip 运动的周期吸引子.其中,系统速度随时间变化示意图如图 1a 所示.图 1b 展示了该周期吸引子所有 Lyapunov 指数随时间变化示意图,此时系统的 Lyapunov 指数有两个负值一个零值,说明该方法的正确性.

图 2 给出了具有 stick-slip 运动的周期吸引子.其中,系统速度随时间变化示意图如图 2a)所示.图 2b)展示了该周期吸引子所有 Lyapunov 指数随时间变化示意图,此时系统的 Lyapunov 指数有两个负值一个零值,说明该方法的正确性.



(a) 系统速度随时间变化示意图

(a) The time history of the system's velocity

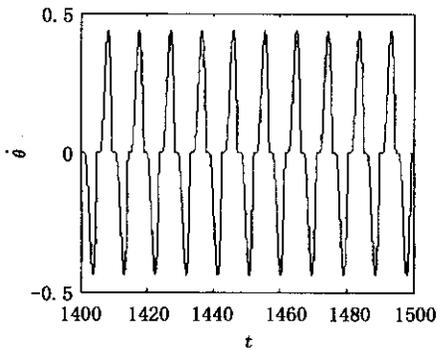


(b) 系统 Lyapunov 指数 \$\lambda\_{1,2,3}\$ 随时间变化示意图

(b) The time history of Lyapunov exponents \$\lambda\_{1,2,3}\$

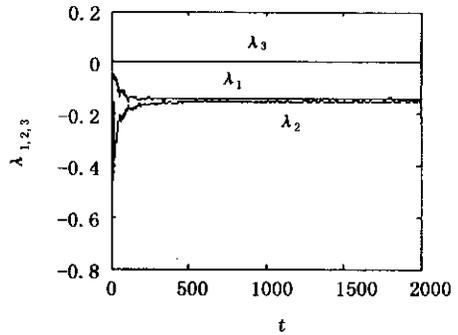
图1 \$\beta = 0.3, \alpha = 0.01\$, 周期吸引子

Fig.1 \$\beta = 0.3, \alpha = 0.01\$, Periodic attractor



(a) 系统速度随时间变化示意图

(a) The time history of the system's velocity



(b) 系统 Lyapunov 指数 \$\lambda\_{1,2,3}\$ 随时间变化示意图

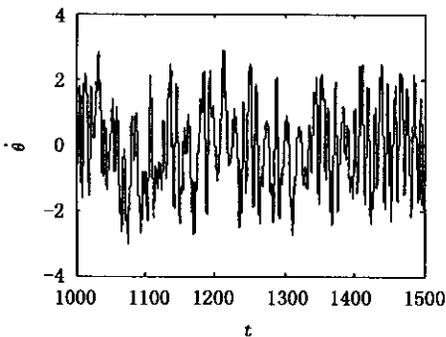
(b) The time history of Lyapunov exponents \$\lambda\_{1,2,3}\$

图2 \$\beta = 0.052, \alpha = 0.5\$, 周期吸引子

Fig.2 \$\beta = 0.052, \alpha = 0.5\$, Periodic attractor

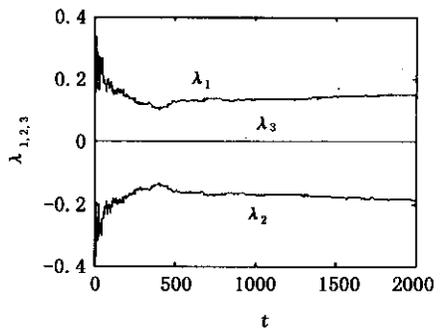
图3给出了混沌吸引子. 其中,系统速度随时间变化示意图如图3(a)所示.图3(b)展示了该混沌吸引子所有 Lyapunov 指数随时间变化示意图,此

时系统的 Lyapunov 指数分别为正值,零值,负值,说明该方法的正确性.



(a) 系统速度随时间变化示意图

(a) The time history of the system's velocity



(b) 系统 Lyapunov 指数 \$\lambda\_{1,2,3}\$ 随时间变化示意图

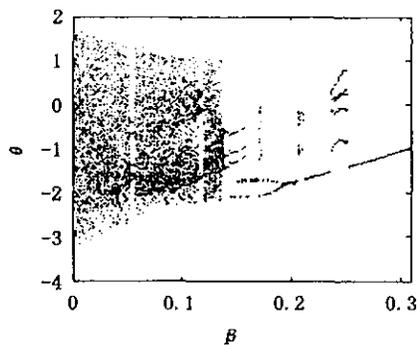
(b) The time history of Lyapunov exponents \$\lambda\_{1,2,3}\$

图3 \$\beta = 0.052, \alpha = 0.01\$, 混沌吸引子

Fig.3 \$\beta = 0.052, \alpha = 0.01\$, Chaotic attractor

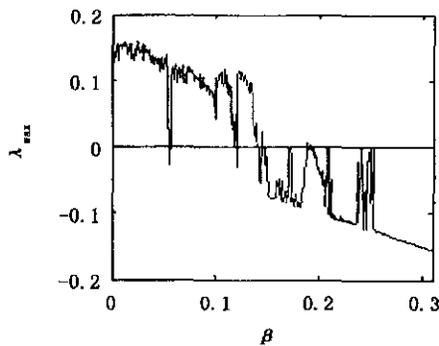
为进一步表明该方法的准确性,图4给出了系统分岔图(图4a)和最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{max}$  随分岔参数  $\beta$  变化示意图(图4b).从它们的相互对应中可以看到系统吸引子的特性与其最大 Lyapunov 指数

一致:当系统为混沌运动时,最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{max} > 0$ ;当系统为周期运动时,最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{max} < 0$ ;而当系统出现分岔时,最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{max} = 0$ .



(a) 系统随分岔参数  $\beta$  变化的分岔图

(a) The bifurcation diagram of  $\theta$  versus  $\beta$  parameter



(b) 系统最大 Lyapunov 指数随参数  $\beta$  变化示意图

(b) The largest Lyapunov exponent  $\lambda_{1,2,3}$  versus  $\beta$  parameter

图4  $\beta \in [0, 0.3], \alpha = 0.01$

Fig.4  $\beta \in [0, 0.3], \alpha = 0.01$

## 4 结论

非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值计算一直是人们关注的问题之一.本文根据[3]在不连续点处定义的闭链(cocycle)得到了一个传递矩阵,从而给出了一种带干摩擦的非光滑动力系统 Lyapunov 指数的数值计算方法.通过对带干摩擦的动力系统进行 Lyapunov 指数的数值计算,结合时间历程图和 Poincare 映射对系统的动力学特性进行了分析,表明了该方法的正确性.由于该方法是在光滑动力系统 Lyapunov 指数数值计算算法的基础上给出的,它更便于数值计算;在数值计算过程中可用 RK4 等精度较高的求解常微分方程的数值算法,比[4]给出的用 Euler 方法计算精度显然更高;数值仿真结果也表明利用该方法能很好的识别分岔点.

## 参 考 文 献

- Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn Jm. Lyapunov exponents for smooth dynamical systems and Hamiltonian systems; a method for computing all of them, Part II: Numerical application. *Meccanica*, 1980, 15: 21 ~ 30
- Wolf JB, Swift HL, Swinney, Vastano JA. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 1985, 16: 285 ~ 317

- Kunze M. Non-smooth dynamical systems. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2000
- Lamarque CH, Bastien J. Numerical study of a forced pendulum with friction. *Nonlinear dynamics*, 2000, 23: 335 ~ 352
- Andrzej S, Tomasz K. Using chaos synchronization to estimate the largest Lyapunov exponent of nonsmooth systems. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2000, 4: 207 ~ 215
- Schatzman M, Bastien J, Lamarque CH. An ill-posed mechanical problem with friction. *European Journal of Mechanics*, 1999, 18: 415 ~ 420
- Parker Thomas s, chua Leon O. Practical numerical algorithms for chaotic systems. Beijing, China: World Publishing Corp, 1992
- 王剑锋, 王棋. 含干摩擦多体系统 Lagrange 方程的数值算法. *动力学与控制学报*, 2004, 2(2): 58 ~ 61 (Wang Jianfeng, Wang Qi. The Numerical method for Lagrange's equations of multibody system with dry friction. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(2): 58 ~ 61 (in Chinese))
- 王士敏, 陆启韶. 转子通过临界转速时碰摩热效应对振动特性的影响. *动力学与控制学报*, 2004, 2(3): 64 ~ 69 (Wang Shimin, Lu Qishao. The effect of rub-impact thermal effects on vibration characteristics of a rotor passing through critical speed. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3): 64 ~ 69 (in Chinese))

# NUMERICAL CALCULATION OF LYAPUNOV EXPONENTS OF DISCONTINUOUS SYSTEMS WITH DRY FRICTION\*

Fu Shihui Wang Qi Wang Shimin

(*School of Science , Beijing University of Aeronautics and Astronautics , Beijing 100083 ,China* )

**Abstract** For nonsmooth systems with dry friction , the transitional matrix was deduced from the cocycle at the nonsmooth instants , and then a numerical method for calculating Lyapunov exponents was introduced by means of the transitional matrix . The method was conducted from conventional algorithm of calculating Lyapunov exponents for smooth systems . The dynamical behavior of a system with dry friction was analyzed by calculating its Lyapunov exponents , along with time history and Poincare map ; and numerical results showed the effectiveness of the method . Compared with some existent methods of calculating Lyapunov exponents of nonsmooth systems , the method is more adequate to numerical calculation .

**Key words** dry friction , transitional matrix , nonsmooth system , Lyapunov exponent