第4卷第3期 2006年9月
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol.4 No.3 Sep. 2006

微分方程的 Hamilton 化与解法*

葛伟宽　黄文华

（湖州师范学院物理系，湖州　313000）

摘要　提出一种求解微分方程的力学方法.首先，将一类常微分方程化成一个 Hamilton 方程，在特殊情况下化成 Hamilton 原来的方程，在一般情况下化成带非保守力的 Hamilton 方程.其次，利用 Hamilton 系统的 Noether 理论求守恒量.如果找到足够多的守恒量，便找到了方程的解.最后，举例说明结果的应用.

关键词　Hamilton 方程，微分方程，Noether 理论，积分

引言

对称性和第一积分是常微分方程的两个基本结构[1].目前，研究得比较多的有 Noether 对称性[2~5,18]，Lie[3,4,6~14,18] 和形式不变性或 Mei 对称性[15~21]等.从寻求守恒量的角度看，Noether 对称性更便于应用.本文将微分方程化成 Hamilton 系统的方程，用 Hamilton 系统的 Noether 理论来求系统的守恒量.如能找到部分守恒量，便可将方程降阶，如能找到全部守恒量，便找到了方程的解.

1　微分方程的 Hamilton 化和部分 Hamilton 化

研究 $2n$ 个一阶常微分方程

$$\dot{x}_\mu = f_\mu(t, x_v) \quad (\mu, v = 1, \cdots, 2n) \tag{1}$$

的积分问题.将方程两端乘以

$$(\omega_{\mu v}) = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix} \tag{2}$$

并对 v 求和，得

$$\sum_{v=1}^{2n} \omega_{\mu v}\dot{x}_v = F_\mu(t, x_v) \tag{3}$$

其中

$$F_\mu = \sum_{v=1}^{2n} \omega_{\mu v} f_v \tag{4}$$

如果函数 F_μ 满足

$$\frac{\partial F_\mu}{\partial x_v} = \frac{\partial F_v}{\partial x_\mu} \tag{5}$$

则方程(3)是自伴随的.此时，方程(3)可 Hamilton 化为[19]

$$\sum_{v=1}^{2n} \omega_{\mu v}\dot{x}_v = \frac{\partial H}{\partial x_\mu} \tag{6}$$

其中 H 为 Hamilton 函数

$$H = x_\mu \int_0^1 F_\mu(t, \tau x_v)\,\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

如果 F_μ 不满足式(5)，可将方程(3)部分 Hamilton 化.

令

$$q_s = x_s, p_s = x_{n+s} \tag{8}$$

则方程(3)可表为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \tag{9}$$

其中 Hamilton 函数为

$$H = p_s \int_0^1 f_s(t, \boldsymbol{q}, \tau \boldsymbol{p})\,\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

而非势广义力为

$$Q_s = \frac{\partial H}{\partial q_s} + f_{n+s}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \tag{11}$$

这样，方程(1)的求解问题就归结为 Hamilton 方程(6)或(9)的求解问题.

2　Hamilton-Noether 方法

Hamilton 系统的 Noether 理论指出[2~4]，如果无限小生成元 $\xi_0 = \xi_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$，$\xi_s = \xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 和规范函数 $G_N = G_N(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足 Noether 等式

$$p_s\dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_s - H\dot{\xi}_0 + \dot{G}_N = 0 \tag{12}$$

2005-03-30 收到第1稿，2006-05-22 收到修改稿.

* 国家自然科学基金（10272021，10572021）和高等学校博士学科点专项基金（20040007022）资助项目

则方程(6)有如下Noether守恒量

$$I_N = p_s\xi_s - H\xi_0 + G_N = \text{const} \tag{13}$$

Hamilton系统的Noether理论指出[2~4]，如果无限小生成元 $\xi_0 = \xi_0(t, q, p)$，$\xi_s = \xi_s(t, q, p)$ 和规范函数 $G_N = G_N(t, q, p)$ 满足Noether等式

$$p_s\dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_s - H\dot{\xi}_0 + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_N = 0 \tag{14}$$

则方程(9)有如下Noether守恒量式(13).

所得Noether守恒量式(13)就是方程(6)或(9)的第一积分，如能找到部分积分，就可降阶方程，或了解到系统动力学的一些信息.如能找到全部积分，就找到了方程的解.上述方法可称为Hamilton-Noether方法.

3 算例

为说明上述方法，给出一个算例.

试求解方程

$$\ddot{y} = 2\dot{y}^2\cot y + \sin y\cos y \tag{15}$$

首先，将方程(15)Hamilton化，令

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}\sin^{-4} y \tag{16}$$

则方程(15)表为一阶方程组

$$\dot{x}_1 = x_2\sin^4 x_1,$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2^2\sin^3 x_1\cos x_1 + \sin^{-3} x_1\cos x_1 \tag{17}$$

将其乘以

$$(\omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则有

$$-\dot{x}_2 = 2x_2^2\sin^3 x_1\cos x_1 - \sin^{-3} x_1\cos x_1$$
$$\dot{x}_1 = x_2\sin^4 x_1 \tag{18}$$

它们满足式(5).按式(7)构造Hamilton函数，有

$$H = x_1\int_0^1 \{2x_2^2\tau^2\sin^3\tau x_1\cos\tau x_1 - \sin^{-3}\tau x_1 \times \cos\tau x_1\}\mathrm{d}\tau + x_2\int_0^1 x_2\tau\sin^4\tau x_1\,\mathrm{d}\tau$$

做上述积分，不难求得

$$H = \frac{1}{2}x_2^2\sin^4 x_1 + \frac{1}{2}\sin^{-2} x_1 \tag{19}$$

令

$$q = x_1, p = x_2$$

则

$$H = \frac{1}{2}p^2\sin^4 q + \frac{1}{2}\sin^{-2} q \tag{20}$$

其次，用Noether理论求积分，式(12)给出

$$p\dot{\xi} - (2p^2\sin 3q\cos q - \sin^{-3} q\cos q)\xi - H\dot{\xi}_0 + \dot{G}_N = 0 \tag{21}$$

它有如下解

$$\xi_0 = 0, \xi = -\cos t\sin^2 q,$$
$$G_N = \sin t\cot q \tag{22}$$
$$\xi_0 = 0, \xi = \sin t\sin^2 q,$$
$$G_N = \cos t\cot q \tag{23}$$

守恒量式(13)分别给出

$$I_N = -p\cos t\sin^2 q + \sin t\cot q = C_1 \tag{24}$$
$$I_N = p\sin t\sin^2 q + \cos t\cot q = C_2 \tag{25}$$

由式(24)和(25)消去 p，得

$$\cot q = C_1\sin t + C_2\cos t \tag{26}$$

即

$$\cot y = C_1\sin t + C_2\cos t \tag{27}$$

这就是方程(15)的通解.

同时，亦可将方程(15)部分Hamilton化为

$$\dot{q} = p, H = \frac{1}{2}p^2,$$
$$Q = 2p^2\cot q + \sin q\cos q \tag{28}$$

这里

$$q = y, p = \dot{y} \tag{29}$$

Noether等式(14)给出

$$p\dot{\xi} - \frac{1}{2}p^2\dot{\xi}_0 + (2p^2\cot q + \sin q\cos q) \times (\xi - \dot{q}\xi_0) + \dot{G}_N = 0 \tag{30}$$

它有如下解

$$\xi_0 = 0, \xi = -\cos t\sin^{-2} q,$$
$$G_N = \sin t\cot q \tag{31}$$
$$\xi_0 = 0, \xi = \sin t\sin^{-2} q,$$
$$G_N = \cos t\cot q \tag{32}$$

相应的守恒量分别为

$$I_N = -p\cos t\sin^{-2} q + \sin t\cot q = C_1 \tag{33}$$
$$I_N = p\sin t\sin^{-2} q + \cos t\cot q = C_2 \tag{34}$$

由式(33)和(34)消去 p，仍得式(26).

4 结论

本文提出一种求解微分方程的力学方法——Hamilton-Noether方法，其基本思想是将微分方程化成一个Hamilton系统的方程，再利用Hamilton系统

的 Noether 理论来求方程的积分，如能找到全部积分，便求出了方程的解.

参　考　文　献

1　Bluman GW，Anco SC. Symmetry and Integration Methods for Differential Equations. New York：Springer-Verlag，2002

2　李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京：北京工业大学出版社，1993（Li ZPC. lassical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties. Beijing：Beijing Polytechnic University Press，1993（in Chinese））

3　赵跃宇，梅凤翔. 力学系统的对称性与不变数. 北京：科学出版社，1999（Zhao YY，Mei FX. Symmetries and Invariants of Mechanical Systems Beijing：Science Press，1999（in Chinese））

4　梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用. 北京：科学出版社，1999.（Mei FX. Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems. Beijing：Science Press，1999（in Chinese））

5　葛伟宽. Poincaré-Chetaev 方程的 Noether 对称性. 物理学报，2002，51（6）：1156～1158（Ge WK. Noether symmetry of poincaré-chetaev equations. *Acta Physica Sinica*，2002，51（6）：1156～1158（in Chinese））

6　Mei FX Lie. symmetries and conserved quantities of holonomic variable mass systems. *Applied Mathematics and Mechanics*，1999，20（6）：629～634

7　Mei FX. Nonholonomic mechanics. *ASME Applied Mechanics Review*，2000，53（11）：283～305

8　Zhang HB. Lie symmetries and conserved quantities of non-holonomic mechanical systems with unilateral Vacco constraints. *Chinese Physics*，2002，11（1）：1～4

9　许志新. 变质量完整力学系统的非 Noether 守恒量. 物理学报，2002，51（11）：2423～2426（Xu ZX. Non Noether symmetrical conserved quantity for holonomic mechanical systems with variable mass. *Acta Physica Sinica*，2002，51（11）：2423～2426（in Chinese））

10　张毅. 非保守力和非完整约束对 Hamilton 系统 Lie 对称性的影响. 物理学报，2003，52（6）：1326～1329（Zhang Y. Effects of non-conservative forces and nonholonomic constraints on Lie symmetries of a Hamiltonian system. *Acta Physica Sinica*，2003，52（6）：1326～1329（in Chinese））

11　Fu JL，Chen LQ. Lie symmetries and conserved quantities of controllable nonholonomic dynamical systems. *Chinese Physics*，2003，12（7）：695～699

12　Luo SK，Cai JL. A set of the Lie symmetrical conservation laws for the rotational relativistic Birkhoffian system. *Chinese Physics*，2003，12（4）：357～360

13　Qiao YF，Li RJ，Zhao SH. Non-Noether symmetrical conserved quantity for nonholonomic Vacco dynamical systems with variable mass. *Chinese Physics*，2004，13（11）：1790～1796

14　方建会，魏周亮，张军. 变质量力学系统的一般形式的非 Noether 守恒量. 物理学报，2004，53（6）：1156～1159（Fang JH，Wei ZL，Zhang J. Non-Noether conserved quantity of a general form for mechanical systems with variable mass. *Acta Physica Sinica*，2004，53（6）：1156～1159（in Chinese））

15　Mei FX. Form Invariance of Lagrange System. *Journal of Beijing Institute of Technology*，2000，9（2）：120～123

16　Wang SY，Mei FX. Form invariance and Lie symmetry of equations of non-holonomic systems. *Chinese Physics*，2002，11（1）：5～8

17　Xu XJ，Mei FX，Qin MC. Non-Noether conserved quantity constructed by using form invariance for Birkhoffian system. *Chinese Physics*，2004，13（12）：1999～2002

18　梅凤翔. 完整力学系统的三类对称性与三类守恒量. 动力学与控制学报，2004，2（1）：28～31（Mei Fengxiang. Three kinds of symmetries and three kinds of conserved quantities for holonomic systems. *Journal of Dynamics and control*，2004，2（1）：28～31（in Chinese））

19　Santilli RM. Foundations of Theoretical Mechanics I. New York：Springer-Verlag，1978

20　吴惠彬. Poincaré-Chetaev 变量下广义 Routh 方程的对称性与守恒量. 动力学与控制学报，2004，2（1）：37～39（Wu Huibin. Symmetries and conserved quantities for generalized Routh's equations in Poincaré-Chetaev variables. *Journal of Dynamics and Control*，2004，2（1）：37～39（in Chinese））

21　秦茂昌，梅凤翔. Fokker-Planck 方程的非古典势对称群及新显式解. 动力学与控制学报，2006，4（2）：103～108（Qin Maochang，Mei Fengxiang. Nonclassical potential symmetries and new explicit solutions of Fokker－Planck equation. *Journal of Dynamics and Control*，2006，4（2）：103～108（in Chinese））

HAMILTONIAN FORMULARIZATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR METHOD OF SOLUTION*

Ge Weikuan Huang Wenghua
(*Department of Physics*, *Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

Abstract A kind of mechanical method for solving differential equations is given. First, a set of differential equation can be written in the form of the Hamilton equations. In particular case, the Hamilton equations possess a canonical form. In general case, they possess a canonical form with non-conservative forces. Secondly, the first integrals of the equations can be obtained by using the Noether theory of the Hamilton system. If all of the integrals can be found, then the solution of the equations will be obtained. Finally, an example is given to illustrate the application of the result.

Key words Hamilton equations, differential equations, Noether theory, integral

Received 30 March 2006, revised 22 May 2006.
* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10272021, 10572021) and the Doctoral Programme Foundation of Institution of Higher Education, China (20040007022)