

约束动力系统的分析结构力学积分*

钟万勰^{1,2} 高 强¹

(1.大连理工大学工程力学系,大连 116023)(2.上海交通大学工程力学系,上海 200030)

摘要 约束保守系统导出了微分代数方程,其数值求解总是采用差分法.微分-代数方程的约束带来 Lagrange 参变函数转变而得的微分方程,有其指标问题,扩大了求解的规模.虽然已经注意差分的保辛,但沿切面积分再投影,仍带来许多问题.本文运用分析结构力学的方法,以节点处的独立位移为未知数且严格满足节点的约束条件,再将有限元近似用于区段作用量函数,在区段内部用简单插值求解.则按分析结构力学的理论,不但达到了积分的保辛且区段内部的约束条件也可在变分原理的意义下近似满足.数值结果满意.

关键词 分析结构力学,微分-代数方程,约束,保辛,有限元法

1 约束保守体系的微分-代数方程

从传统分析力学看到,哈密顿体系理论是很一般的,并不限于线性体系,而是对于保守体系的^[1,2].动力系统的数值积分吸引了众多研究,有代表性的著作见[3,4].许多课题引导到约束的 Hamilton 系统(Constrained Hamiltonian system),总是推导出微分-代数方程,概述如下.

设 $q(t)$ 是 n 维广义位移向量,无约束时动力系统的 Lagrange 函数为 $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$, $T(q, \dot{q}) = \dot{q}^T M(q) \dot{q} / 2$, T, U 分别为动能,势能.但当运动时有 c 维的理想约束,约束方程为

$$g(q) = 0 \quad (1)$$

运动只能在约束下的超曲面(流形,Manifold)上运动,即 $q(t)$ 已不是独立的广义位移.其动力方程的推导是引入 c 维的 Lagrange 乘子函数 $\lambda(t)$

$$L_c(q, \dot{q}, \lambda) = L(q, \dot{q}) - \lambda^T \cdot g(q) \quad (2)$$

导出的方程组是

$$\begin{aligned} u &= \dot{q} \\ M(q) \dot{u} &= f(q, u) - G^T(q) \cdot \lambda \\ g(q) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $G(q) = \partial g / \partial q$, $f(q, u) = u^T (\partial M / \partial q) u / 2 - \partial U / \partial q$.这构成了 q, u 的微分-代数方程组.

以上是用位移-速度空间推导的微分-代数方程.在 Hamilton 列式下,Legendre 变换给出 $p = \partial L / \partial \dot{q} = M(q) \dot{q}$, $\dot{q} = M^{-1} p$.变换后,其 Hamilton

函数为 $H(q, p) = p^T M^{-1} p / 2 + U(q)$, 而约束下的 Hamilton 函数为 $H_c(q, p) = p^T M^{-1} p / 2 + U(q) + \lambda^T g(q)$.对应的微分-代数方程为

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \partial H / \partial p \\ \dot{p} &= -\partial H / \partial q - G^T(q) \cdot \lambda \\ g(q) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$H(q, p) = E$ 是保守的.这就是在对偶方程 q, p 下的微分-代数方程^[3,4].其求解方法论的基础是微分方程,要推出联立微分方程引起指标(Index)问题等,给理论上与计算上带来了复杂附加因素.

微分-代数方程的求解有广泛应用,但非线性系统的微分-代数方程并不是可轻易地求解的,多种常见的差分近似已经有了较深入的探讨^[3,4].但差分数值积分要保证其轨道满足约束条件,非常困难.因每步积分开始就采用差分近似以逼近微分方程,难于保证轨道节点满足约束条件.只能在每步积分后再采用投影等修补手段,这种修补成了一种干扰.因其方法论是先用差分法离散微分方程,然后再考虑约束.差分近似本身的精度就不够,虽然注意到差分近似的保辛,但其投影修补是否保辛也是问题.随着该思路有许多研究,但不够理想,因方法论不理想.

“行成于思,毁于随”.既然现有求解方法论不理想,就应重新探讨.孙子兵法曰:“出其不意,攻其所不备”,本文要改变其求解方法论.回顾 Lagrange 力学的基本思想,是先引入广义位移以满

足全部约束条件的,但以上的做法改变了其思路.虽然 Lagrange 体系要处处满足约束条件的广义位移难以找到,但本文运用分析结构力学^[5]的基本概念,进入离散系统来分析.首先保证积分点的约束条件严格满足;再用时间有限元^[6,7]离散代替差分离散,然后运用作用量的变分原理以代替微分方程.分析结构力学理论保证可达到每步积分的自动保辛^[8].

讨论 即使采用了时间有限元,也还没有运用精细积分法^[8].精细积分法具有很高的精度,故还有潜力有待发挥,不过这已经是下一步的任务了.

本文介绍:先满足区段积分点约束条件,再用时间有限元保辛积分求解微分-代数方程的思路.

2 微分-代数方程的有限元求解

基于分析结构力学理论的方法,可从最简单的例题着手阐明.

例题1 质量 m 的单摆振动,取 $q(t) = \{x, y\}$ 为未知数,而不用 $\theta(t)$, $x = r \sin \theta$, $y = r(1 - \cos \theta)$ 为未知数.有约束条件 $g(q) = r^2 - (x^2 + y^2) = 0$, $r = 1$. 初始条件 $x(0) = 0.99$, $\dot{x}(0) = 0$.

解 y 坐标以向下为正,势能 $U(x, y) = -mg_r y$, $g_r = 10 \text{ m/sec}^2$; 动能 $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$, Lagrange 函数 $L(q, \dot{q}) = T - U$, 其变分原理

$$S = \int_0^{t_f} L(q, \dot{q}) dt = \int_0^{t_f} m[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + g_r y] dt, \delta S = 0$$

约束条件

$$g(q) = r^2 - (x^2 + y^2) = 0, r = 1.$$

取离散时间区段 η , $t_0 = 0, t_1 = \eta, \dots, t_k = k\eta, \dots$. 设 t_{k-1} 时的位移与速度是 $x_{k-1}, y_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, \dot{y}_{k-1}$ 已知,当然 $x_{k-1}^2 + y_{k-1}^2 = 1$. 离散体系节点的位移连续条件及约束条件是满足的.连续时间模型 $g(q) = 0$ 是处处满足的,故有微商的约束条件 $x_k \dot{x}_k + y_k \dot{y}_k = 0$. 回顾有限元法,在单元与单元之间,二阶微分方程只要求 C_0 连续性,其一次微商的连续性可通过变分原理来满足,有启发意义.表明微商约束条件 $x_k \dot{x}_k + y_k \dot{y}_k = 0$ 也可通过变分原理来满足.

要积分下一个时间步的 $x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k$ 时,首先

应满足约束条件 $x_k^2 + y_k^2 = 1$. 取 x_k 为独立未知数, $y_k = (1 - x_k^2)^{1/2}$. 从而可计算区段 (t_{k-1}, t_k) 的作用量

$$S_k(x_{k-1}, x_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} L(q, \dot{q}) dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} m[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + g_r y] dt$$

根据约束条件,作用量只是独立位移 (x_{k-1}, x_k) 的函数.二阶微分方程的微商约束条件 $x_k \dot{x}_k + y_k \dot{y}_k = 0$ 可在有限元的意义下满足.

分别对区段位移分量线性插值 $\dot{x} = (x_k - x_{k-1})/\eta, \dot{y} = (y_k - y_{k-1})/\eta; g_r y = g_r(y_{k-1} + y_k)/2$, 单元内部的约束条件则放松掉.运用有限元法近似计算作用量 $S_k(x_{k-1}, x_k)$,它相当于结构力学的区段变形能.整体变形能无非是全部单元变形能之和

$$S(x_0, x_k) = \sum_{k=1}^{k_f} S_k(x_{k-1}, x_k)$$

因 y_{k-1}, y_k 是 x_{k-1}, x_k 的非线性函数,故 $S_k(x_{k-1}, x_k)$ 是独立变量 x_{k-1}, x_k 的非线性函数,而与如何达到 x_{k-1}, x_k 无关.符合分析结构力学正则变换对区段作用量的要求^[6,8].

$S_k(x_{k-1}, x_k)$ 的有限元计算,取 $\dot{x}_k = (x_k - x_{k-1})/\eta, \dot{y}_k = (y_k - y_{k-1})/\eta; g_r y = g_r(y_{k-1} + y_k)/2$. (在区段内不能严格满足约束条件,而是近似满足)

$$S_k(x_{k-1}, x_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} m[(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + g_r y] dt \approx \int_{t_{k-1}}^{t_k} m[(x_{k-1} - x_k)^2 + (y_k - y_{k-1})^2]/(2\eta^2) + g_r(y_k + y_{k-1})] dt = (m/2)[(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2]/(2\eta) + g_r \eta(y_k + y_{k-1})$$

其中 $y_k = (1 - x_k^2)^{1/2}$, 因此 $S_k(x_{k-1}, x_k)$ 只是两端独立自变量 x_{k-1}, x_k 的函数.

[注 偏微商时 $\partial y_k / \partial x_k = -x_k \cdot (1 - x_k^2)^{-1/2}$. 即 $x_k \dot{x}_k + y_k \dot{y}_k = \alpha(\dot{y}_k / \dot{x}_k = -x_k / y_k)$]

由于插值公式,相当于作用量(区段变形能)用的有限元近似与真实作用量略有不同. Lagrange 原理的位移约束条件已经在节点处严格满足,区段内部的约束条件则由有限元插值近似满足.

根据离散系统的分析结构力学,引入对偶变量 $p_{k-1} = -\partial S_k / \partial x_{k-1}, p_k = \partial S_k / \partial x_k$ 则状态变量为

$$v_k = \{x_k, p_k\}^T$$

显然, 区段 $(t_{k-1}, t_k), (t_k, t_{k+1})$ 的 $S_k(x_{k-1}, x_k), S_{k+1}(x_k, x_{k+1})$ 都产生 p_k , 两者相等就是动力方程

$$-\partial S_{k+1}/\partial x_k = \partial S_k/\partial x_k$$

这给从 v_{k-1} 传递到 v_k 提供了方程. 根据分析结构力学理论, 传递变换是辛矩阵^[6, 8], 即保辛.

现在要考虑初始条件以确定 p_0, x_0, \dot{x}_0 为给定. 与 x_0 相关的区段能量是 $S_1(x_0, x_1)$, 根据分析结构力学有 $p_0 = -\partial S_1/\partial x_0$. 具体计算有

$$S_1(x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} m[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \mathcal{V} (2\eta^2) + g_r y \mathcal{V} dt = m[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \mathcal{V} (2\eta) + mg_r (y_1 + y_0) \eta / 2$$

其中 $y_0 = (1 - x_0^2)^{1/2}$ 是 x_0 的函数. 故

$$p_0 = -\partial S_1/\partial x_0 = mg_r \eta \partial y_0 / \partial x_0 - m[(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0) \mathcal{X} \partial y_0 / \partial x_0] \mathcal{V} \eta$$

取 $\dot{x}_0 \approx (x_1 - x_0) \mathcal{V} \eta, \dot{y}_0 = -\dot{x}_0 x_0 / y_0$, 代入就可得到 p_0 . 这样, 初始条件具备, 时间有限元逐步保辛积分即可执行. 数值积分计算结果, 其约束条件必然满足很好, 因积分点的约束要求预先满足. 图 1 显示其轨迹在圆上, 以后不再显示约束条件满足好的图.

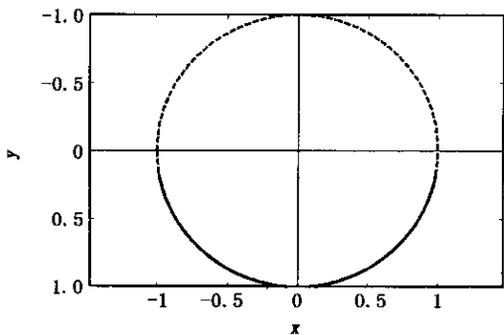


图 1 实线是单摆轨迹图, 虚线是单位圆, 积分步长 0.01 秒

Fig.1 The solid curve is the trajectory of pendulum, dashed curve is unit circle, time step is 0.01s

以上的离散方法是直接以独立位移为未知数的, 其好处是未知数少, 但约束条件首先在节点满足却带来了推导的非线性因素. 另一种方法是将节点约束条件(1.1)推迟处理, 利用节点的 c 个 Lagrange 参变向量 λ . 故其区段扩展 Lagrange 函数成为(2)的 $L_c(q, \dot{q}, \lambda)$, 扩展区段作用量为

$$S_k(q_{k-1}, q_k, \lambda_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} [m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 +$$

$$mg_r y] dt - \lambda_k^T g(x_k, y_k)$$

参变量 λ_k 则用于处理 t_k 处的约束条件. 单元内位移则用有限元法插值

$$q(t) = N(t)d_k, d_k = \{q_{k-1}^T, q_k^T\}^T$$

积分就得区段作用量 $S_k(q_{k-1}, q_k, \lambda_k)$. 因未曾满足节点约束条件, 故位移 q_k 仍是原来 n 维的, 不是约束后的独立位移. 该作用量对参变量 λ_k 是线性的, 可表达为

$$S_k(q_{k-1}, q_k, \lambda_k) = S_{k0}(q_{k-1}, q_k) - \lambda_k^T \cdot g(q_k)$$

根据

$$p_{k-1}(q_{k-1}, q_k, \lambda_k) = -\partial S_k/\partial q_{k-1},$$

$$p_k(q_{k-1}, q_k, \lambda_k) = \partial S_k/\partial q_k$$

与无约束系统相比, 多了线性参变量 λ_k . 组成各站的 $2n$ 维状态向量

$$v_k = \{q_k^T, p_k^T\}^T$$

按分析结构力学方法进行, 从 v_{k-1} 可递推 v_k , 该变换保辛, 但带有参变量 λ_k . 确定 λ_k 要根据节点约束条件 $g(q_k) = 0$.

建议运用线性的有限元插值函数 $N(t)$, 因区段内的约束条件并未严格满足, 用线性函数插值近似满足, 可能效果好些.

本方法用参变量线性 λ_k 满足节点约束条件 $g(q_k) = 0$. 未知数包含线性参变量 λ_k 与全部节点位移, 有 $2n + c$ 个未知数要求解, 仍是非线性联立方程, 保辛. 与前面讲的方法相同. 预先满足节点约束的方法则未知数为 $\alpha(n - c)$, 但推导可能复杂些. 当然两种方法给出的数值结果相同.

可归纳分析结构力学(带参变量 λ_k)的算法如下:

- 1) 形成 Lagrange 函数(动能 - 势能), 并形成扩展 Lagrange 函数.
- 2) 将时间坐标离散, 得一系列的时间点 $t_0 = 0, t_1, \dots, t_k, \dots$, 以各点的 n 维位移 q_k 当作未知数.
- 3) 按分析结构力学, 计算区段 (t_{k-1}, t_k) 的作用量 $S_k(q_{k-1}, q_k, \lambda_k)$, 用有限元线性插值得作用量.
- 4) 生成对偶向量 $p_{k-1} = -\partial S_k/\partial q_{k-1}, p_k = \partial S_k/\partial q_k$, 并组成状态向量.
- 5) 根据 $p_{k-1} = -\partial S_k/\partial q_{k-1}$ 以及初始条件, 对 1

号单元,用插值公式计算初始 p_0 并组成初始状态.

6) 各单元的辛矩阵可从方程 $p_{k-1} = -\partial S_k / \partial q_{k-1}, p_k = \partial S_k / \partial q_k$,会同约束条件 $g(q_k) = 0$ 解出.成为根据 q_{k-1}, p_{k-1} 计算 q_k, p_k, λ_k ,完成逐步积分的保辛递推.

分析结构力学的算法运用有限元,不具体考虑约束对偶的 λ 微分方程,而是将 λ 逐点当作待定的常参数.因不涉及其微商,故不必考虑其微分方程,也不会产生微分方程理论的指标(Index)^{3,41}问题.给数值计算提供很大方便.

3 数值例题与讨论

可提供更多的数值例题以供比较.本文展示约束保守体系的分析结构力学有限元保辛算法.

例题2 选择球面摆^[4]的例题.

解 按[4]取重力加速度取 $g_r = 1$,摆的长度为1,质点质量为1, z 坐标以向下为正.Hamilton函

数为 $H(q, p) = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) / 2 + z$.初始位置为 $q_0^T = \{0 \quad \sin(0.1) \quad -\cos(0.1)\}$,初始动量为 $p_0^T = \{0.06 \quad 0 \quad 0\}$,积分步长分别取为0.03秒和0.1秒.图2给出了球面摆质点的轨迹图.因满足约束条件是本算法的基本点,故不再展示约束.图3给出了系统的Hamilton函数随时间变化情况.文献[4]13页分别用辛欧拉算法和投影辛欧拉算法给出了同样问题的Hamilton函数和质点偏离约束面的情况,可以看到两种算法的Hamilton函数都随时间线性增长,保辛效果不理想.将本文的图3与它们比较,可以看到本文算法的保辛效果好,对约束的满足具有非常高的精度,具有更大的优势.图4~6给出了质点 x, y, z 坐标随时间的变化,图7~9给出了质点 x, y, z 方向的动量随时间的变化.图3~9中,虚线与实线分别是积分步长为0.03秒与0.1秒的结果.

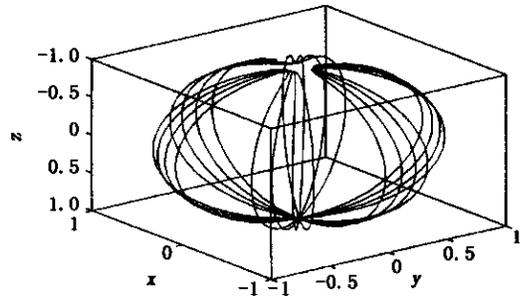
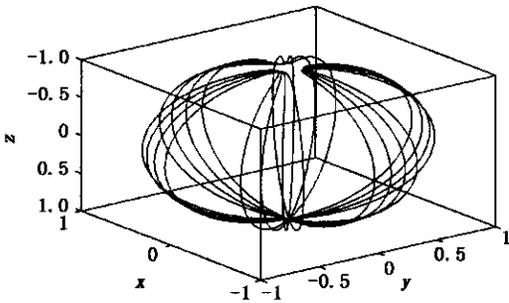


图2 球面摆质点的轨迹图(步长分别为0.03秒和0.1秒)

Fig.2 The trajectory of the sphere pendulum (time step is 0.03s and 0.1s)

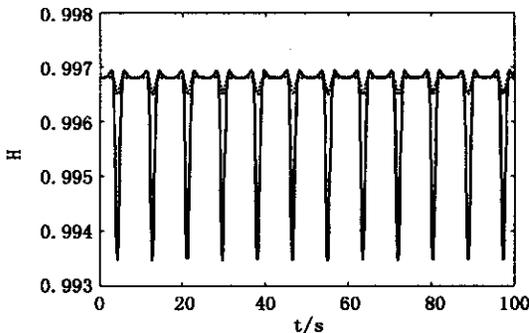


图3 球面摆 Hamilton 函数随时间变化, 真实 $H = 0.99680$

Fig.3 The Hamilton function of sphere pendulum, actual Hamilton function is $H = 0.99680$

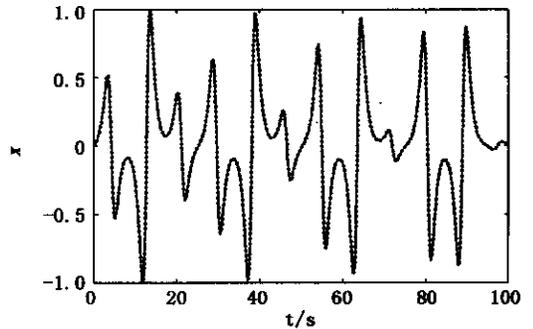


图4 球面摆质点 x 坐标随时间变化

Fig.4 The x coordinate of sphere pendulum

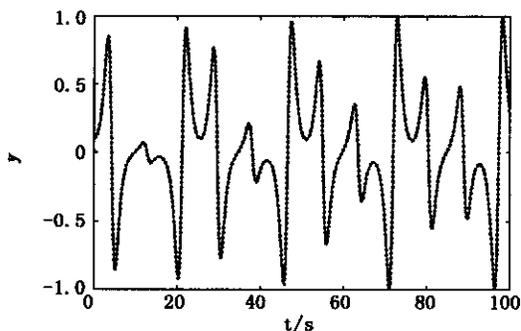


图 5 球面摆质点 y 坐标随时间变化

Fig.5 The y coordinate of sphere pendulum

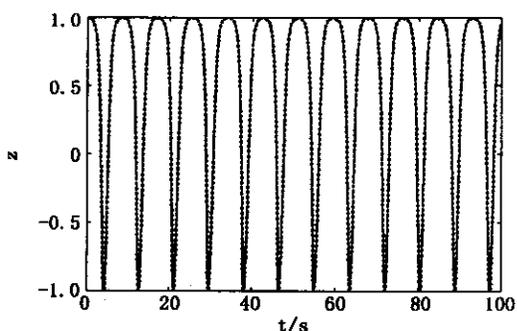


图 6 球面摆质点 z 坐标随时间变化

Fig.6 The z coordinate of sphere pendulum

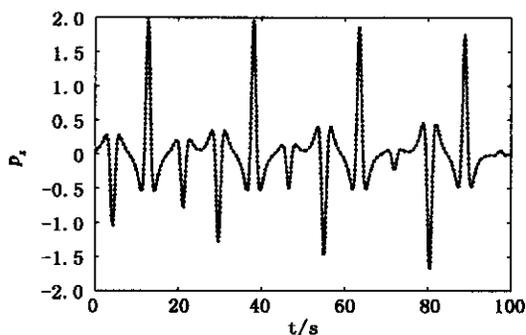


图 7 球面摆质点 x 方向动量随时间变化

Fig.7 The momentum of sphere pendulum for x direction

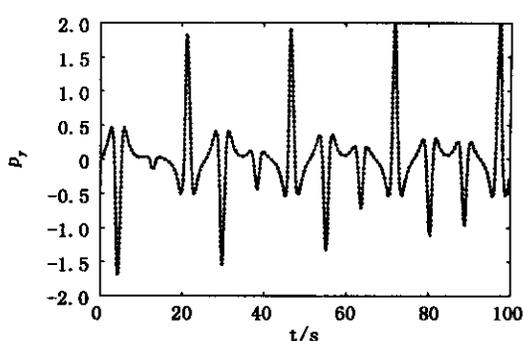


图 8 球面摆质点 y 方向动量随时间变化

Fig.8 The momentum of sphere pendulum for y direction

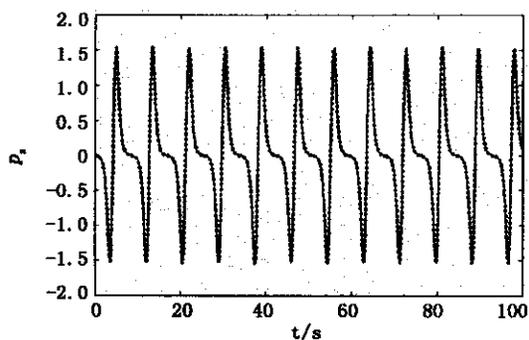


图 9 球面摆质点 z 方向动量随时间变化

Fig.9 The momentum of sphere pendulum for z direction

例题 3 平面双摆问题的积分. 考虑如图 10 所示的双摆问题, 质量分别是 $m_1 = 1, m_2 = 2$, 摆的半径分别是 $r_1 = 1, r_2 = 1$, 重力加速度 $g_i = 10$.

解 质点 1 的初始位置是 $\{1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}^T$, 初始动量是 $\{0, 0\}^T$; 质点 2 的初始位置是 $\{0, \sqrt{2}\}^T$, 初始动量是 $\{0, 0\}^T$, 积分步长为 0.01 s. 积分结果如以下. 图 11 是第二个质点的绝对轨迹. 图 12 是系统的 Hamilton 函数随时间变化情况, 可以看到 Hamilton

函数在两个确定数值之间震荡, 不会线性变化, 并且这两个数值和系统真实的 Hamilton 函数相差很小, 这说明保辛效果很好.

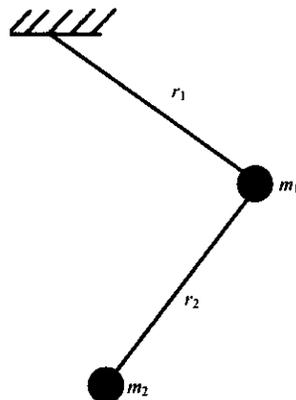


图 10 双摆模型

Fig.10 Double pendulum

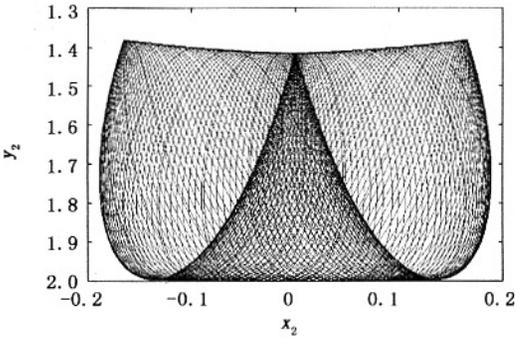


图 11 第二个质点的轨迹

Fig.11 The trajectory of the second mass

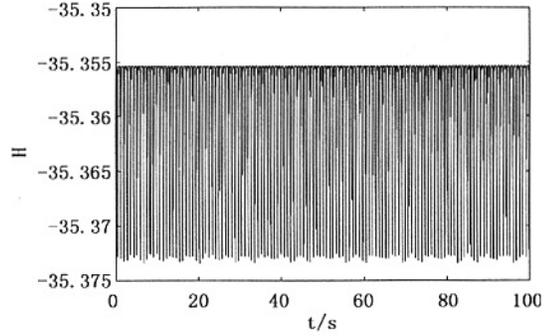


图 12 双摆 Hamilton 函数随时间变化, 真实 $H = -35.35534$

Fig.12 The Hamilton function for double pendulum , actual Hamilton function is $H = -35.35534$

空间双摆问题 质点 1 的初始位置是 $\{1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3} \ 1/\sqrt{3}\}^T$, 初始速度是 $\{1 \ 0 \ 0\}^T$, 质点 2 的初始位置是 $\{0 \ 0 \ 2/\sqrt{3}\}^T$, 初始速度是 $\{2 \ 0 \ 0\}^T$, 积分步长为 0.01 秒. 积分结果如以下. 图 13 是质点 1 的轨迹图, 图 14 是质点 2 相对于质点

1 的轨迹, 图 15 是质点 2 的绝对轨迹. 图 16 是系统的 Hamilton 函数随时间变化情况, 可以看到 Hamilton 函数在两个确定数值之间震荡, 不会线性变化, 并且这两个数值和系统真实的 Hamilton 函数相差很小, 这说明保辛效果很好.

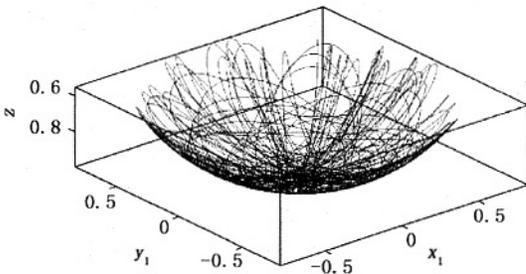


图 13 质点 1 的轨迹

Fig.13 The trajectory of the first mass

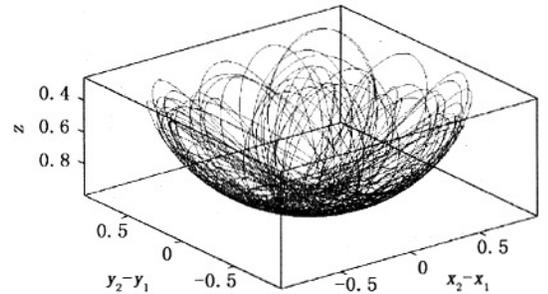


图 14 质点 2 相对于质点 1 的轨迹

Fig.14 The relative trajectory of the second mass to the first mass

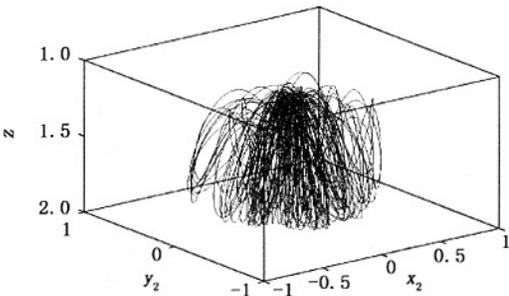


图 15 质点 2 的轨迹

Fig.15 The trajectory of the second mass

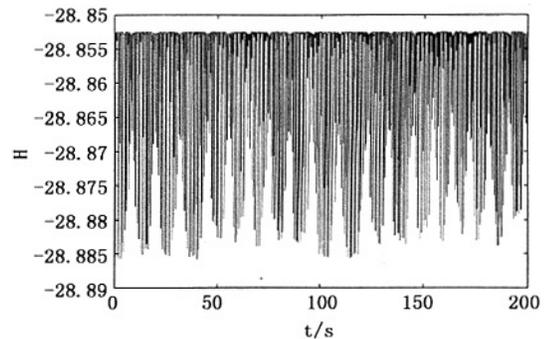


图 16 Hamilton 函数随时间变化, 真实 $H = -28.85251$

Fig.16 The Hamilton function actual Hamilton function is $H = -28.85251$

4 结束语

本文改变保守约束体系数值求解的方法论,运用分析结构力学理论,先进行离散,并在节点处严格满足位移约束条件,运用有限元能量法以代替微分方程而进行求解.求解过程并不从微分-代数方程离散,而是离散后先满足节点的约束条件再用分析结构力学变分原理能量法得到有限元保辛离散算子进行求解.过去从微分-代数方程先差分再考虑满足约束条件,则约束条件成为一种负担;分析结构力学则不管微分方程,先满足节点的位移约束条件,然后再用有限元法得到离散算子.而不用离散微分方程之法,区段内的约束条件则用有限元线性插值逼近.位移的有限元线性插值只可能影响区段作用量的值,影响不大.于是就回避了约束条件引起的微分方程指标等问题,得到很大方便.数值结果表明,基于分析结构力学离散体系新方法论的效果是满意的.

本文只用了有限元离散插值,并未运用精细积分法以及保辛摄动等有效手段.还有很多改进的余地.

参 考 文 献

1 Goldstein H. Classical mechanics, 2nd ed. Addison-Wesley,

London, 1980

- 2 钟万勰.应用力学对偶体系.北京:科学出版社,2002 (Zhong WX. Duality system in applied mechanics and optimal control. Kluwer, NY, 2002 (in Chinese))
- 3 Hairer E, Wanner G. Solving ordinary differential equations II-stiff and differential-algebraic problems 2nd ed. ch.7. Springer, Berlin, 1996
- 4 Hairer E, Lubich Ch, Wanner G. Geometric numerical integration-Structure preserving algorithms for ordinary differential equations, ch.7. Springer, Berlin, 2002
- 5 钟万勰.分析结构力学与有限元.动力学与控制学报, 2004, 2(3):1~8 (Zhong WX. Analytical structural mechanics and finite element. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3):1~8 (in Chinese))
- 6 Zienkiewicz OC, Taylor R. The finite element method, 4-th ed. McGraw-Hill, NY, 1989
- 7 钟万勰,姚征.时间有限元与保辛.机械强度, 2005, 27(2):178~183 (Zhong WX, Yao Z. Time Domain FEM and Symplectic Conservation. *Journal of Mechanical Strength*, 2005, 27(2):178~183 (in Chinese))
- 8 钟万勰.应用力学的辛数学方法.北京:高等教育出版社, 2006 (Zhong WX. Symplectic Solution Methodology in applied mechanics. Higher education press, 2006 (in Chinese))

INTEGRATION OF CONSTRAINED DYNAMICAL SYSTEM VIA ANALYTICAL STRUCTURAL MECHANICS*

Zhong Wanxie^{1,2} Gao Qiang¹

(1. *Dalian University of Technology, Dalian 116023, China*)

(2. *Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China*)

Abstract The conserved constrained dynamical system derives to differential-algebraic equation. Solving the constrained differential-algebraic equation via introducing the Lagrange parametric differential equation to treat the constraint, there is the differential index problem, which enlarges the variables to be solved. The existing solution methodology is always via the FDM. The symplectic preservation of the finite difference scheme is considered, however, the projection operation onto the constraint manifold still brings problems. The present paper applies the methodology of analytical structural mechanics. The independent displacements at the integration points are treated as primary variables to be solved, and the constraint conditions are satisfied strictly at the integration points. The time-domain finite element linear interpolation function is applied to approximate the orbit to generate the action function of the time-interval. According to the theory of analytical structural mechanics, not only the symplectic preservation of the integration scheme is reached, but also the constraint conditions are satisfied in the sense of variational approach approximately. Numerical examples demonstrate satisfactory results.

Key words analytical structural mechanics, differential-algebraic equation, constraints, symplectic preservation, FEM