

用有限元法计算特征值问题的一种新的动态凝聚方法*

周星德¹ 刘志军²

(1. 河海大学工程力学系, 南京 210098) (2. 南京航空航天大学振动工程研究所, 南京 210016)

摘要 有限元法是常用的建模方法, 由于所建模型具有较大的自由度, 通常需要进行降阶处理. 一般来讲, 模型前几阶特征值和特征向量可以较精确地得到, 利用所得到的特征值和主振型分量(在特征向量中与所给定的主自由度对应的振型分量), 本文提出了一种新的动态凝聚方法, 该方法是通过迭代方式, 利用所得到的特征值和主振型分量对 Guyan 降阶法所得到的降阶模型进行修正. 与同类方法相比, 本文方法具有较高的计算精度和很小的计算量, 且迭代收敛的稳定性很好. 最后本文给出了一个计算实例.

关键词 模型降阶 动态凝聚 主振型分量 迭代 有限元

引言

动态凝聚成为有限元模型动力分析的常用方法. 自由度凝聚方法可以分为二类: 一类是静态凝聚方法, 如 Guyan 降阶法^[1], 能量法^[2]等, 其特点是通过公式直接计算得到降阶模型; 另一类方法是动态凝聚方法^[3-8], 其特点是通过迭代法获得精度较高的特征解. 与静态凝聚法相比, 由于考虑了主从自由度中从自由度对应的惯性项的影响, 动态凝聚法可以获得较好的结果, 是目前此领域的主要研究方向. 动态凝聚法中, 比较有代表性的是 Friswell 等^[5-6]提出的迭代 IRS 算法、Lin 和 Xia 提出的改进 IRS 算法^[7]和变质量迭代算法^[8]. 动态凝聚法的优点是考虑了从自由度惯性项的影响, 但这也是其缺点, 因为对大自由度系统来讲, 对应于从自由度部分的子质量与刚度矩阵具有较大的自由度, 尤其是子刚度矩阵的求逆, 计算量大且很难保证精度. 此外, 动态凝聚法只能修正降阶模态中的前几阶模态.

对于具有大自由度的有限元模型来讲, 可以采用子空间迭代法等, 较精确地得到模型前十几阶模态的特征值与特征向量, 从所得到的特征向量中可以提取与主自由度对应的振型分量(简称为主振型分量), 本文就是利用特征值和主振型分量对 Guyan 消去法所得到的降阶模型进行修正, 提出了一种新的动态凝聚方法, 从实例计算结果来看, 本

文方法是可行的.

1 模型降阶的动态凝聚法

设根据有限元法得到了含 N 个自由度的模型, 其质量与刚度矩阵分别为 M 和 K , 状态向量和外力分别为 x 、 f . 采用 Guyan 降阶法, 把质量、刚度矩阵及状态向量分解为与系统主从自由度对应的向量, 当没有外力施加于从自由度上, 且阻尼可忽略时, 其振动方程为

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{x}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中: 下标 m 、 s 分别表示系统的主、从自由度数, $m + s = N$, f_m 为 $m \times 1$ 维外力向量, x_m 和 x_s 分别为对应于系统主、从自由度的状态向量. 忽略式(1)中第二个方程中的惯性项, 可得

$$K_{sm}x_m + K_{ss}x_s = 0 \quad (2)$$

由式(2)可得

$$\begin{bmatrix} x_m \\ x_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{bmatrix} [x_m] = T_s x_m \quad (3)$$

式中: I 为 $m \times m$ 阶单位矩阵, T_s 为静态转换矩阵. 此时可得到降阶的质量与刚度矩阵分别为

$$M_R = T_s^T M T_s, K_R = T_s^T K T_s \quad (4)$$

在式(4)的基础上, 通过修正转换矩阵以得到更好

的降阶模型, Friswell 提出 IRS 和迭代 IRS 算法, IRS 算法的转换矩阵为

$$T_{IRS} = T_s + SMT_s M_R^{-1} K_R \quad (5)$$

其中 $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ss}^{-1} \end{bmatrix}$ 为 $n \times n$ 矩阵. 此时, 降阶的质量与刚度矩阵分别为

$$M_{IRS} = T_{IRS}^T M T_{IRS}, K_{IRS} = T_{IRS}^T K T_{IRS} \quad (6)$$

迭代 IRS 方法中, 转换矩阵为

$$T_{IRSj+1} = T_s + SMT_{IRSj} M_{IRSj}^{-1} K_{IRSj} \quad (7)$$

这里还介绍 Lin^[8] 的变质量迭代过程, 其计算过程可归纳为

1) 由式(4)得到 M_R, K_R , 令 $M^0 = M_R, K^0 = K_R, t_G = -K_{ss}^{-1} K_{ms}^T$, 由 M^0, K^0 确定初始特征值、特征向量分别为 λ^0 和 Φ^0 ;

2) 对于第 r ($r = 1, 2, \dots, m$) 阶模态, 取初始值分别为: $t_d^{(0)} = K_{ss}^{-1} (M_{ms}^T + M_{ss} t_G), \lambda_r^{(0)} = \lambda_r^0, \Phi_r^{(0)} = \Phi_r^0$;

3) 对于第 k 步迭代, 计算下列值:

$$a. t_d^{(k)} = K_{ss}^{-1} (M_{ms}^T + M_{ss} t_G) + \lambda_r^{(k-1)} K_{ss}^{-1} M_{ss} t_d^{(k-1)}$$

$$b. \Delta M^{(k)} = \lambda_r^{(k-1)} (M_{ms} + t_G^T M_{ss}) t_d^{(k)}$$

$$c. M^{(k)} = M^{(0)} + \Delta M^{(k)}$$

$$d. \bar{\lambda}_r^{(k)} = \lambda_r^0 \frac{(\Phi_r^0)^T M \Phi_r^{k-1}}{(\Phi_r^0)^T M^{(k)} \Phi_r^{k-1}}$$

$$e. \Phi_r^{(k)} = \bar{\lambda}_r^{(k)} \sum_{i=1}^m \frac{\Phi_i^0 (\Phi_i^0)^T}{\lambda_i^0 - \bar{\lambda}_r^{(k)}} \Delta M^{(k)} \Phi_r^{(k-1)}$$

$$f. \lambda_r^{(k)} = \lambda_r^0 \frac{(\Phi_r^0)^T M \Phi_r^k}{(\Phi_r^0)^T M^{(k)} \Phi_r^k}$$

4) 如果 $|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}| / \lambda_r^{(k)} \leq \epsilon$, 停止迭代, 否则, 令 $k = k + 1$ 转入第三步.

2 本文提出的动态凝聚方法

对式(1), 选择主自由度 m 和从自由度 s , 采用式(4)得到降阶模型质量和刚度矩阵 M_R 和 K_R . 采用子空间迭代法求出系统的前 n ($n \leq m$) 阶特征值和特征向量分别为 $\lambda_i, \bar{\Phi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). $\bar{\Phi}_i$ 为 $N \times 1$ 维矩阵. 从 $\bar{\Phi}_i$ 中选择对应于系统主自由度的分量, 得到主振型分量 ϕ_i ($m \times 1$ 维向量), 设修正后的质量与刚度矩阵分别为

$$\tilde{M} = M_R + \Delta M, \tilde{K} = K_R + \Delta K \quad (8a)$$

$$\Delta M = \Delta M^T, \Delta K = \Delta K^T \quad (8b)$$

把各阶主振型分量对修正后质量矩阵归一化得

$$\Phi_i^T \tilde{M} \Phi_i = 1, i = 1, \dots, m \quad (9)$$

式(9)代入式(8)可得

$$\Phi^T \Delta M \Phi = I_n - \Phi^T M_R \Phi \quad (10)$$

式中 $\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_n]$, I_n 为 $n \times n$ 阶单位矩阵.

对式(10)进行拉直运算^[9]得

$$(\Phi^T \otimes \Phi^T) \text{vec}(\Delta M) = \text{vec}(I_n - \Phi^T M_R \Phi) \quad (11)$$

式中 “ \otimes ” 表示 Kronecker 积.

现对 $\text{vec}(\Delta M)$ 内的元素进行次序调整, 步骤如下: 1. 把对角线上变量沿对角线方向依次放在列向量 $\text{vec}(\Delta M)$ 的最前部分; 2. 把下三角阵上非对角线上变量按对角线方向依次放在列向量 $\text{vec}(\Delta M)$ 的中间部分; 3. 把上三角阵上非对角线上变量按对角线方向依次放在列向量 $\text{vec}(\Delta M)$ 的最后部分. 在调整过程中系数阵 $(\Phi^T \otimes \Phi^T)$ 应做相应的列调整. 记调整后的 $(\Phi^T \otimes \Phi^T)$ 为 A_1 (为 $n^2 \times m^2$ 维矩阵), 而调整后的 $\text{vec}(\Delta M)$ 仍用原符号表示. 注意, 在列调整过程中, 式(11)右端不动, 此时, 式(11)可表示为

$$A_1 \text{vec}(\Delta M) = \text{vec}(I_n - \Phi^T M_R \Phi) \quad (12)$$

式(12)存在 $n(n-1)/2$ 冗余方程, 删去对应于矩阵 $I - \Phi^T M_R \Phi$ 上三角元素(不包括对角线上元素)在拉直向量中所对应的方程, 此时右端为 $n(n+1)/2$ 维向量, 记为 B . 相应地要删去系数矩阵 A_1 对应的行, 系数矩阵变为 A_2 (为 $n(n+1)/2 \times m^2$ 维矩阵), 此时, 式(12)变为

$$A_2 \text{vec}(\Delta M) = B \quad (13)$$

由于 ΔM 为对称矩阵, 只要得到含对角线的下三角部分的元素即可, 为此, 进行半拉直运算

$$\text{vec}(\Delta M) = A_3 \text{svec}(\Delta M) \quad (14a)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & I_2 \end{bmatrix}^T \quad (14b)$$

式中: I_1 为 m 阶单位矩阵, I_2 为 $m(m-1)/2$ 阶单位. 把式(14)代入式(13)可得

$$A \text{svec}(\Delta M) = B \quad (15)$$

式中: $A = A_2 \times A_3$ 为 $n(n+1)/2 \times m(m+1)/2$ 阶矩阵, 此时可得

$$\text{svec}(\Delta M) = A^+ B \quad (16)$$

式中: A^+ 为 Moore 逆. 此时可得到质量修正矩阵

ΔM 代入式 (8a) 可得 \tilde{M} .

现对刚度矩阵进行修正,修正的刚度矩阵应该满足

$$\tilde{K}\phi = \tilde{M}\phi\Lambda \quad (17)$$

式中 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n)$.

式 (17) 进行拉直运算得

$$(\phi^T \otimes I_m) \text{vec}(\Delta K) = \text{vec}(\tilde{M}\phi\Lambda - K_R\phi) \quad (18)$$

式中 I_m 为 $m \times m$ 阶单位矩阵. 与对 $\text{vec}(\Delta M)$ 的元素进行次序调整的方法相同,对向量 $\text{vec}(\Delta K)$ 内的元素进行次序调整,调整后仍用原符号表示,在调整过程中,其系数矩阵应进行相应的列调整,记调整后的系数矩阵为 C^1 则

$$C_1 \text{vec}(\Delta K) = \text{vec}(\tilde{M}\phi\Lambda - K_R\phi) \quad (19)$$

式中 C_1 为 $nm \times m^2$ 阶矩阵.

对向量 $\text{vec}(\Delta K)$ 进行半拉直运算可得

$$(C_1 \times A_3) \text{svec}(\Delta K) = \text{vec}(\tilde{M}\phi\Lambda - K_R\phi) \quad (20)$$

由式 (20) 可得

$$\text{svec}(\Delta K) = (C_1 \times A_3)^+ \text{vec}(\tilde{M}\phi\Lambda - K_R\phi) \quad (21)$$

此时可得到刚度修正矩阵.

设根据修正后的质量、刚度矩阵所计算的特征

值为 $\bar{\lambda}_i$, 则当

$$\max |\bar{\lambda}_i - \lambda_i| \leq \epsilon, \quad i = 1, \dots, m \quad (22)$$

停止迭代,否则,令 $M_R = \tilde{M}, K_R = \tilde{K}$, 重新进行修正.

3 实例分析

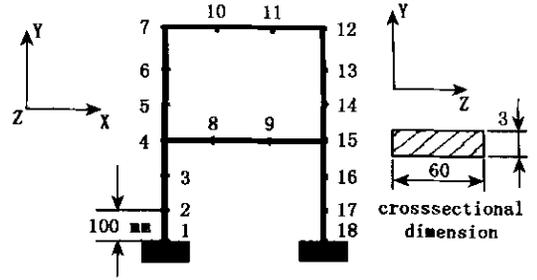


图 1 平面框架结构

Fig. 1 Plane frame structure

本文以框架结构为研究对象(图 1),材料为铝合金,弹性模量为 71 GPa,比重为 2.714×10^{-5} N/mm³.泊松比为 0.33,划分 18 个节点,每个节点存在 x, y 方向的位移及绕 z 轴的转角,共有 48 个自由度.采用主从自由度降阶时,降为六阶模型,主自由度分别为 3X, 5X, 7X, 8Y, 10Y, 12X(3X 表示节点 3 的 X 方向,依此类推).系统前六阶固有频率(单位:Hz)及主振型分量见表 1. 为与迭代 IRS

表 1 前六阶频率及模态

Table 1 The first six frequencies and their modes

frequency	mode						
1	11.6172	0.521,	1.1025,	1.5773,	-0.0477,	-0.0218,	1.5773
2	38.1404	1.231,	0.8424,	-1.3649,	0.0317,	0.1211,	-1.3649
3	83.9291	0.940,	-1.7594,	-0.0003,	1.4855,	-2.2311,	0.0003
4	119.7012	1.381,	-0.4426,	-0.0002,	2.3266,	2.3249,	0.0002
5	131.4957	2.302,	-2.3053,	1.1039,	0.5816,	-0.5032,	1.1039
6	174.0854	1.267,	1.0939,	0.0008,	-0.1696,	-1.0925,	-0.0008

方法及变质量迭代法进行比较,本文取 $n = m = 6$,迭代次数为 2 次.采用迭代 IRS 及变质量迭代法时,以其最优的修正结果为准,修正后的降阶模型的质量与刚度矩阵见表 2,表中质量的单位为 kg,刚度的单位为 $\times 10^4$ N/m.在计算时发现,迭代 2 次过后修正的质量与刚度矩阵保持不变,笔者还进行过其他模型的修正,均很快收敛,说明本文方法收敛快且稳定.修正前后系统固有频率(单位:Hz)见表 3.

与主振型分量相比,本文方法与文[6]和文

[8]的误差见表 4,误差采用下列公式计算

$$\text{error} = \frac{\|\phi_i - \phi_i'\|}{\|\phi_i'\|} \times 100\% \quad (23)$$

式中 $\|\ast\|$ 表示欧氏范数, ϕ_i' 为所采用的降阶方法得到的第 i 阶振型.

表 3 中的精确值是指根据原模型计算出的值.从表 3 ~ 4 可以看出,经过二次迭代后本文方法的结果,固有频率与振型误差均为零,也就是说可以达到完全修正,而迭代 IRS 方法及变质量迭代法都是只可保证降阶模型的前几阶与精确值一致.

此外,当所取的主振型阶数小于降阶模型阶数(即 $n < m$)时,本文方法可以达到修正模型的前阶特征值与精确值完全一致,见表5.限于篇幅,此处未列出相应的修正质量与刚度矩阵.

表2 质量与刚度矩阵的修正结果

Table 2 Modified results of mass and stiffness matrices

Location	Reduced		Madified	
	Mass	Stiffness	Mass	Stiffness
1,1	0.1739	3.5320	0.2384	5.3648
1,2	0.1011	-2.1671	0.0631	-3.9138
1,3	-0.0229	0.5450	-270.125	-3.0468*
1,4	-0.0001	-1.8951	-0.1934	-7.1377
1,5	-0.0275	0.5845	0.0151	2.0617
1,6	0.0169	-0.1701	270.0957	3.0476*
2,2	0.1706	3.0633	0.2204	4.5508
2,3	-0.0016	-1.1209	-238.7120	1.3766*
2,4	0.0061	1.7812	0.0606	6.2223
2,5	-0.0197	-0.9749	-0.0782	-2.3167
2,6	0.0183	-0.1731	238.7540	-1.3783*
3,3	0.0900	4.2606*	8.7642*	4.96276**
3,4	0.0004	-0.1641	219.2121	15.0151*
3,5	0.0165	0.8575	76.0063	-2.7463*
3,6	0.0209	-4.2600*	-8.7644*	-4.9627**
4,4	0.0859	6.7790	0.3697	18.4801
4,5	-0.0076	0.0759	-0.0751	-3.1953
4,6	0.0112	-0.2420	-219.1773	-15.0166*
5,5	0.0971	4.6036	0.1249	4.7639
5,6	-0.0171	-0.3165	-76.0143	2.7472*
6,6	0.1020	4.2602*	8.7645*	4.9627**

Note: The unit of * corresponding to stiffness is $\times 10^7$ N/m, the unit of ** corresponding to stiffness is $\times 10^{11}$ N/m, the unit of * corresponding to mass is $\times 10^5$ kg.

表3 修正后的结构频率

Table 3 The frequencies of modified structure

	Frequencies					
Reduced	11.655	39.848	92.074	128.562	168.417	5731.223
Paper 6	11.391	38.116	83.897	119.744	131.519	174.184
Paper 8	11.617	38.143	84.853	119.723	132.213	182.145
proposed	11.617	38.140	83.929	119.701	131.496	174.085
Exact	11.617	38.140	83.929	119.701	131.496	174.085

表4 振型误差

Table 4 Mode errors

	Mode errors %					
Mode	1	2	3	4	5	6
Reduced	0.14	8.01	27.0	18.9	91.2	421.5
Paper 6	0.43	0.39	0.07	0.12	3.72	128.2
Paper 8	0.12	0.33	0.21	0.07	2.63	28.7
Proposed	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

表5 修正后的结构频率

Table 5 The frequencies of modified structure(Hz)

	Frequencies					
$n = 3$	11.617	38.140	83.929	134.624	176.0700	5586.79
$n = 4$	11.617	38.140	83.929	119.701	179.255	5578.526
$n = 5$	11.617	38.140	83.929	119.701	131.496	5542.07
Exact	11.617	38.140	83.929	119.701	131.496	174.085

4 结论

对于采用有限元建立的模型来讲,通常具有较大的自由度,需要进行降阶处理以便于随后的动力分析.本文利用有限元模型的前几阶特征值及相应的主振型分量对降阶模型进行修正,与迭代 IRS 方法和变质量迭代算法相比,具有三个优点:1. 计算量大大减小;2. 计算结果的精度得到提高;3. 可以修正降阶模型的所有模态;4. 通过实例发现本文提出的算法随着迭代次数的增加,计算结果的精度会越来越高且趋于稳定.

参 考 文 献

- Guyan RJ. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 1965, 3(2): 380~380
- Kim KO, Choi YJ. Energy Method for Selection of Degrees of Freedom in Condensation. *AIAA Journal*, 2000, 38(7): 1253~1259
- Qu ZQ, Fu ZF. New structural dynamic condensation method for finite element models. *AIAA Journal*, 1998, 36(7): 1320~1324
- Suarez LE, Singh MP. Dynamic condensation method for structural eigenvalue analysis. *AIAA Journal*, 1998, 30(4): 1046~1054
- Friswell MI, Garvey SD, Penny JET. Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 186(2): 311~323
- Friswell MI, Garvey SD, Penny JET. The convergence of the iterated IRS method. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 211(1): 123~132
- Lin RM, Xia Y. Improvement on the iterated IRS method for structural eigensolutions. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 270: 713~727
- Lin RM, Xia Y. A New Eigensolution of Structures via Dynamic Condensation. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 266: 93~106

- 9 周星德,汪凤泉,陈道政. 实验模态数据修正计算模型的拉直算法. 振动工程学报, 2001, 14(2): 245~248 (Zhou Xingde, Wang Fengquan, Chen daozheng. A straightened algorithm to modify Calculating Model using experimental modes data. *Journal of Vibration Engineering*, 2001, 14(2): 245~248 (in Chinese))

A NEW DYNAMIC CONDENSATION METHOD USING FINITE ELEMENT APPROACH TO CALCULATE EIGENVALUE PROBLEM*

Zhou Xingde¹ Liu Zhijun²

(1. Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing 210098, China)

(2. Institute of Vibration Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract Finite element method is an usual model-built method in which the reduction transaction is necessary for the acquired model as it has a larger degrees of freedom (d. o. f.) and generally speaking, the first several eigenvalues and eigenvectors can be accurately gained. In the paper, a new dynamic condensation method is presented based on the eigenvalues and master-mode-part (the parts corresponding to master d. o. f. in eigenvectors) and the reduction model obtained by Guyan reduction can be updated by aid of an iterative method, the eigenvalues and master-mode-part. Compared with congeneric other methods, the presented method has a higher calculation precision, smaller calculation efforts and better calculation stability. In the last, an example is given to show the effectiveness of the presented algorithms.

Key words model reduction, dynamic condensation, master-mode-part, iteration, finite element