

基于能量法的超声电机压电振子的 耦合动力学模型分析

赵增辉 王育平 袁义坤 赵向东

(山东科技大学理学院, 青岛 266510)

摘要 基于分析动力学的哈密顿原理,采用模态假定将超声电机压电振子复合结构的复杂振动在模态域内等效成单自由度系统的简单振动,考虑压电陶瓷的压电效应,将压电陶瓷诱发应变的激振力的大小用参数力系数描述,建立了超声电机压电振子的机电耦合动力学模型,通过实例计算与实验结果对比,验证该模型是较准确的,可以在超声电机的初步设计阶段替代有限元分析来确定电机的结构及材质参数,并选定合适的工作频率,从而为超声电机进一步的参数化分析和仿真模型的建立,及结构动力特性优化打下理论基础.

关键词 压电振子 动力学模型 振动模态

引言

超声电机(USM)是一种利用压电陶瓷的逆压电效应,把电能转化为机械能,并依靠摩擦力来驱动的新型微小电机.它具有许多普通电磁电机无法比拟的优点,如低速大转矩、微位移性、高保持力矩、动态响应快、运行无噪声、不受电磁场影响等,在精密仪器仪表、航空航天、医疗、机器人等高新技术领域具有广泛的应用前景.

超声电机技术是一门非常年轻的技术,从发明到发展,毕竟只有20年的历史.目前开发出的原型机普遍存在如下问题:性能不稳、效率低、负载特性难以预测、尚难以实现精确控制及无法按照性能要求进行设计等等,离工业产品的标准尚有很大差距.为了开发设计出高效率、性能好、运转稳定、可工业化的超声电机产品,进一步挖掘超声电机的潜力,对超声电机的建模及性能仿真技术进行深入系统的研究是非常必要的.综合考虑超声电机及其动力学行为,可发现这是一个机、电、控耦合的复杂的动力学系统,理论研究的核心就是建立这个系统的机电耦合动力学模型.复合压电振子是超声电机换能的核心部件,由压电材料与其它材料(一般为金属)粘接在一起构成的复合结构,其主要功能是产生某一特定模态的超声共振.作为能量转换的关键性部件,研究其机电耦合动力学模型,对提高电机

的性能具有举足轻重的作用.

1 压电振子机电耦合动力学系统的哈密顿原理

超声电机压电振子在实现从电能到机械能的转换过程中,内部既有机械能(弹性变形能),同时又有电能,既是振子(弹性体),又具有电容,是机电的统一体,而且它所激发的振动为微幅振动,对于这样的体系结构,用分析动力学的Hamilton原理^[2]来建立其机电耦合模型会变得简单而有效.

对于超声电机的振动主体压电振子(含压电陶瓷层)来说,其Hamilton原理形式可写为如下

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (1)$$

其中, L 为Lagrange函数, δW 为非有势力的虚功之和,两部分的形式如下:对于Lagrange函数, $L = E_k - E_p + E_e$.

其中 E_k 、 E_p 、 E_e 分别为振子体系(含压电陶瓷层)的动能,体系的势能以及压电陶瓷内存储的电能; δW 为定、转子接触界面法向作用力 F_{cn} 和切向作用力 F_{ct} 在广义坐标上所做虚功之和.

2 压电振子特定工作模态下的振型假定

对于圆板型行波超声电机,振子弯曲振动时其中性层面的位移可设为:

$$u_s(r, \theta, t) = \begin{bmatrix} u_{s0} \\ v_{s0} \\ w_{s0}(r, \theta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{s0}(r, \theta, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ X_{sw1}(r, \theta) & X_{sw2}(r, \theta) & \dots & X_{swn}(r, \theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} = X_{sm}(r, \theta) \chi(t) \quad (2)$$

其中 $X_{sm}(r, \theta)$ 为中性层面的振型函数, $q_i(t)$ 为模态坐标. 由于超声电机工作在预先选定的某一特定模态, 故此振子中性层面的工作振型可假定为已知, 这是采用假定振型法进行超声电机建模的一大优势^[3]. 一般可设为

$$X_{sm}(r, \theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ F(r) \cos(q\theta) & F(r) \sin(q\theta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 q 为所用模态阶次. 如此假定既符合超声电机的实际振动型态, 又将 r, θ 两个变量分离开来, 便于计算处理. 同时, 模态坐标也就只有两个, 即 $n = 2$

$$q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

这样, 中性层面的振动方程为

$$\begin{cases} u_{s0} = 0 \\ v_{s0} = 0 \\ w_{s0}(r, \theta, t) = F(r) \cos(q\theta) q_1(t) + F(r) \sin(q\theta) q_2(t) \end{cases} \quad (5)$$

根据 Kirchhoff 平板理论, 可得到振子上任意点的位移函数为

$$u_s(r, \theta, z, t) = L_1(z) X_{sm}(r, \theta) q(t) = \Phi_{sm}(r, \theta, z) q(t) \quad (6)$$

其中 $\Phi_{sm}(r, \theta, z)$ 为整个定子的振型函数, L_1 为仅与 z 有关的符号运算, 在柱坐标系下, 应变和位移的关系为

$$S(r, \theta, z, t) = L_{sm} \Phi_{sm}(r, \theta, z) q(t) = N_{sm}(r, \theta, z) q(t) \quad (7)$$

其中 $N_{sm}(r, \theta, z)$ 为应变矩阵, 它表示应变向量与模态坐标间的关系

$$N_{sm}(r, \theta, z) = L_{sm} \Phi_{sm}(r, \theta, z) \quad (8)$$

L_{sm} 为单纯的符号运算矩阵.

3 基于振型假定的压电振子动力学模型

3.1 压电陶瓷的本构关系与机电耦合效应

采用第二类压电方程^[4]来描述压电陶瓷内的机电耦合效应

$$\begin{bmatrix} D \\ T_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon^S & e \\ -e^T & c_p^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ S_p \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, T_p, S_p 分别为压电陶瓷内的应力和应变向量, c_p^E 为压电陶瓷在等电场条件下的刚度矩阵, E 为电场向量, D 为电位移向量, e 为压电应力常数矩阵, ϵ^S 为恒应变条件下的介电常数矩阵.

旋转行波超声电机采用压电陶瓷 d_{31} 的激振模式, 由于只考虑平面内的应力, 加之电位移 D 和电场强度 E 只在 z 方向上不为零, 故压电方程可简化为

$$\begin{bmatrix} D_3 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_3^S & e_{31} & e_{31} & 0 \\ -e_{31} & c_{11}^E & c_{12}^E & 0 \\ -e_{31} & c_{12}^E & c_{22}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_6 \end{bmatrix} \quad (10)$$

粘于振子定子弹性体上的压电陶瓷环的布局及极化方式如图 1 所示, 当通以两相电压 $v_A(t), v_B(t)$ 时, 压电陶瓷环自由表面(非粘贴面)上的电势符号函数可定义为

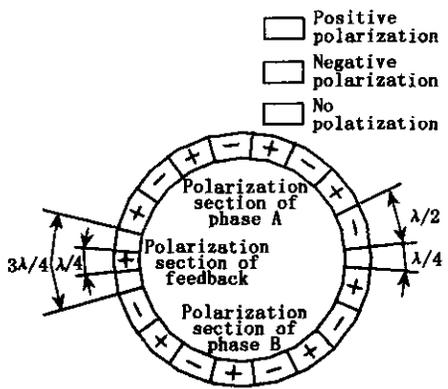


图 1 压电陶瓷的极化和配置方式

Fig. 1 The polarization and configuration styles of piezoelectric material

$$\varphi_A(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \text{ 位于 } A \text{ 相正极化区} \\ 0 & \theta \text{ 位于未极化区或 } B \text{ 相极化区} \\ -1 & \theta \text{ 位于 } A \text{ 相负极化区} \end{cases}$$

$$\varphi_B(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \text{ 位于 } B \text{ 相正极化区} \\ 0 & \theta \text{ 位于未极化区或 } A \text{ 相极化区} \\ -1 & \theta \text{ 位于 } B \text{ 相负极化区} \end{cases}$$

由此可得压电陶瓷环上的电势函数为

$$\varpi(\theta, t) = \Phi_{se}(\theta)\varpi(t) = [\varphi_A(\theta) \quad \varphi_B(\theta)] \times \begin{bmatrix} v_A(t) \\ v_B(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

边界条件为

$$1) \text{ 粘贴面(接地): } \varpi(r, \theta, -h_0, t) = 0$$

$$2) \text{ 非粘贴面: } \varpi(r, \theta, -(h_0 + h_p), t) = \Phi_{se}(\theta)\varpi(t)$$

压电陶瓷内的电场只沿厚度方向存在并且

$$E = -\text{grad}\varpi(t) = L_e\varpi(t) \quad (12)$$

假设电场沿厚度方向为恒定值, 则 $L_e = 1/h_p$

这样

$$E = L_e\Phi_{se}(\theta)\varpi(t) = N_{sme}\varpi(t) \quad (13)$$

其中 $N_{sme} = L_e\Phi_{se}(\theta)$ 为电压到电场的映射算子。

3.2 Lagrange 函数的模态参量表述

(1) 体系的动能

体系的动能由两部分组成, 即振子弹簧体的动能与压电陶瓷的动能之和, 即

$$T_s = T_{s/p} + T_p = \frac{1}{2}\rho_s \int_{V_{s/p}} \dot{u}_s^T \ddot{u}_s dV + \frac{1}{2}\rho_p \int_{V_p} \dot{u}_p^T \ddot{u}_p dV = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left(\rho_s \int_{V_{s/p}} \Phi_{sm}^T \Phi_{sm} dV \right) \dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \left(\rho_p \int_{V_p} \Phi_{sm}^T \Phi_{sm} dV \right) \dot{q}$$

令

$$M_{s/p} = \rho_p \int_{V_{s/p}} \Phi_{sm}^T \Phi_{sm} dV,$$

$$M_p = \rho_p \int_{V_p} \Phi_{sm}^T \Phi_{sm} dV$$

则

$$T_s = \frac{1}{2}\dot{q}^T M_{s/p} \dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T M_p \dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^T M_s \dot{q} \quad (14)$$

由此式可看出 $M_s = M_{s/p} + M_p$ 即为振子对应模态

坐标 $q(t)$ 的模态质量, 其中 $M_{s/p}$ 为定子弹簧体的模态质量(不含压电陶瓷层), M_p 为压电陶瓷层的模态质量。

(2) 体系的势能

体系的势能由三部分组成, 即振子弹簧体内的势能, 压电陶瓷体内的纯机械势能及由于机电耦合产生的势能之和, 于是:

$$V_s = V_{s/p} + V_{pp} + V_{pcp} = \frac{1}{2} \int_{V_{s/p}} T^T S dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} T^T S dV$$

将弹性体与压电陶瓷的本构关系(9)式以及应变函数(8)式代入

$$V_s = \frac{1}{2} \int_{V_{s/p}} (C_{s/p} S)^T S dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} (-e^t E + c^E S)^T S dV = \frac{1}{2} \int_{V_{s/p}} q^T N_{sm}^T C_{s/p} N_{sm} q dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} q^T N_{sm}^T c^E N_{sm} q dV - \frac{1}{2} \int_{V_p} q^T N_{sm}^T e^t N = \frac{1}{2} q^T K_{s/p} q + \frac{1}{2} q^T K_p q - \frac{1}{2} q^T \Pi v \quad (15)$$

其中, 振子弹簧体的模态刚度 $K_{s/p} = \int_{V_{s/p}} N_{sm}^T C_{s/p} N_{sm} dV$; 压电陶瓷的模态刚度 $K_p = \int_{V_p} N_{sm}^T c^E N_{sm} dV$; 机电耦合模态矩阵 $\Pi = \int_{V_p} N_{sm}^T e^t N_{sme} dV$; 令整个定子的模态刚度 $K_s = K_{s/p} + K_p$, 于是, 体系的总势能为

$$V_s = \frac{1}{2} q^T K_s q - \frac{1}{2} q^T \Pi v \quad (16)$$

(3) 压电陶瓷内存储的电能

压电陶瓷内的总电能也有两部分组成, 即压电陶瓷内的纯电能和由机电耦合产生的电能之和, 将压电陶瓷的本构关系代入

$$E_e = \frac{1}{2} \int_{V_p} E^T D dV = \frac{1}{2} \int_{V_p} E^T (\epsilon_s E + e S) dV = \frac{1}{2} \int_{V_p} v^T N_{sme}^T \epsilon^S N_{sme} v dV + \frac{1}{2} \int_{V_p} v^T N_{sme}^T e^t N_{sm} q dV =$$

$$\frac{1}{2} v^T C_p v + \frac{1}{2} v^T \Pi q \tag{17}$$

其中, 模态电容 $C_p = \int_{V_p} N_{sme}^T \epsilon^S N_{sme} dV$

(4) Lagrange 函数的变分形式

将以上分析得到的体系动能、势能以及压电陶瓷内的电能带入拉格朗日函数

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_s \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}^T K_s q + \frac{1}{2} q^T \Pi v + \frac{1}{2} v^T C_p v + \frac{1}{2} v^T \Pi q$$

由于

$$v^T \Pi q = q^T \Pi v$$

于是

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T M_s \dot{q} - \frac{1}{2} q^T K_s q + \frac{1}{2} q^T \Pi v + \frac{1}{2} v^T C_p v + \frac{1}{2} v^T \Pi q$$

对 Lagrange 函数取变分得到

$$\delta L = \dot{q}^T M_s \delta \dot{q} - \delta q^T K_s q + \delta q^T \Pi v + q^T \Pi \delta v + v^T C_p \delta v$$

由于

$$\dot{q}^T M_s \delta \dot{q} = \delta q^T K_s \dot{q} = \frac{d}{dt} (\delta q^T M_s \dot{q}) - q^T M_s \ddot{q}$$

所以, 最后得到 Lagrange 的变分形式

$$\delta L = \frac{d}{dt} (\delta q^T M_s \dot{q}) - \delta q^T M_s \ddot{q} - \delta q^T K_s q + q^T \Pi \delta v + v^T C_p \delta v = \frac{d}{dt} (\delta q^T M_s \dot{q}) - \delta q^T (M_s \ddot{q} + K_s q - \Pi v) + (q^T \Pi + v^T C_p) \delta v \tag{18}$$

3.3 定子所受模态力的虚功

定子所受模态力所做的虚功主要有三部分组成, 即定 / 转子接触界面的模态力与电极面的电荷 Q 所作的虚功之和. 作用在超声电机压电振子上的模态力主要有两部分包括定 / 转子接触界面法向作用力(即预压力) F_{cn} 和切向作用力 F_{ct} (即摩擦力)^{3]}.

设对应定子模态坐标 $q(t)$ 的法向模态力为 F_{cn} , 切向模态力为 F_{ct} , 则其做功的功率为

$$P_c = P_{cn} + P_{ct} = F_{cn}^T \dot{q} + F_{ct}^T \dot{q} = \int_{A_c} (-p_c \dot{w}_s) dA + \int_{A_c} (-\tau_c \dot{v}_s) dA \tag{19}$$

其中 p_c, τ_c 分别为接触界面上的正应力(压应力)和剪应力. 故得定 / 转子接触界面法向作用力 F_{cn} 和切向作用力 F_{ct} 分别为

$$F_{cn}(p_c) = - \int_{A_c} \Phi_{sv}^T p_c dA$$

$$F_{ct}(\tau_c) = - \int_{A_c} (\Phi_{sv}^T - \frac{h_c}{r} \frac{\partial \Phi_{sv}^T}{\partial \theta}) \tau_c dA \tag{20}$$

于是非有势力所作的虚功之和为

$$\delta W = \delta q^T F_{cn} + \delta q^T F_{ct} - Q^t \delta v \tag{21}$$

3.4 复合压电振子的机电耦合动力学方程

将以上推导得到的 Lagrange 函数以及非有势力所作的虚功代入(1)式, 整理后得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} (\delta q^T M_s \dot{q}) - \delta q^T (M_s \ddot{q} + K_s q - \Pi v - F_{cn} - F_{ct}) + (q^T \Pi + v^T C_p - Q^t) \delta v \right] dt = 0 \tag{22}$$

由于 δx 和 δv 是相互独立的, 由变分的性质要满足上式须有

$$M_s \ddot{q} + C_s \dot{q} + K_s q = \Pi v + F_{cn} + F_{ct}$$

$$\Pi^T q + C_p v = Q \tag{23}$$

式(23)标明压电振子在利用逆压电效应的同时, 还存在压电效应, 既是制动器, 又是传感器^[5], 这样就将压电振子这样一个复杂的连续质量系统的振动在模态域内简化为单自由度振动, 通过模态质量、模态刚度、力系数等的计算, 将压电陶瓷诱发应变的激振效果等效成单自由度弹簧-质量系统在外力作用下的强迫振动, 可以方便的计算出固有频率, 便于进行动态特性和仿真分析.

4 压电振子频率计算的实验验证

我们以日本新生公司出品的 $\Phi 60$ 型行波超声电机压电振子为例对模型进行验证, 振子的部分材质参数见表 1.

通过对动力学方程(23)中模态参数的计算, 有限元软件 ansys 模态分析(考虑压电效应)和扫频实验得到了 B0n 阶弯曲振动的固有频率, 相关的结果比较见图 2.

由本文计算结果与实验结果以及商业化有限元分析软件 ANSYS 的计算结果的对比可看出, 本

文的计算结果还是较为准确的.

表 1 Φ60 电机压电振子的材质参数

Table 1 Material parameters of the resonator of Φ60 type motor

Material parameters	Elastic stato(bronze)	PZT-4
Elastic modules E	112 GPa	anisotropic
Density ρ	8760 kg/m ³	7600 kg/m ³
Parameter matrixes of piezoelectric material	$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4.1 \\ 0 & 0 & -4.1 \\ 0 & 0 & 14.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10.5 & 0 \\ 10.5 & 0 & 0 \end{bmatrix} C/m^2$	$[c] = \begin{bmatrix} 13.2 & 7.1 & 7.3 & 0 & 0 & 0 \\ & 13.2 & 7.3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 11.5 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 26 & 0 \\ & & & & & 26 \end{bmatrix} \times 10^{10} Pa$
	$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 7.124 & 0 & 0 \\ 0 & 7.124 & 0 \\ 0 & 0 & 5.841 \end{bmatrix} \times 10^{-9} F/m$	

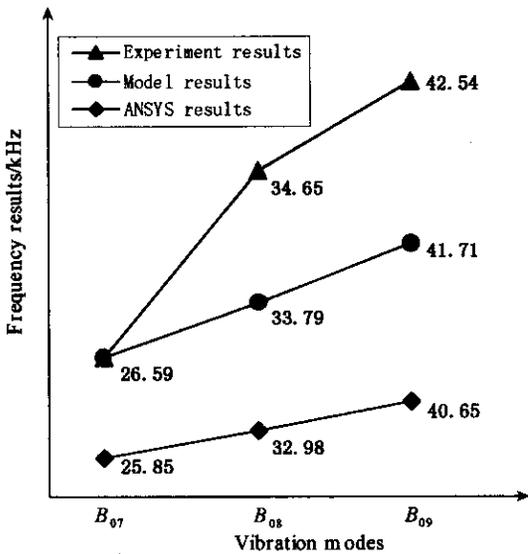


图 2 Φ60 超声电机的各阶固有频率

Fig. 2 Various inherent frequencies of Φ60 type motor

5 结论

超声电机的压电振子结构设计实际上是一个结构动力特性优化的问题,是相对于动力学特性分析的反问题或称为逆问题,即由给定的频率、振型要求来决定结构参数.有限元法的优点在于能适应较为复杂的情况,包括压电振子所受的力和约束的边界条件,结构阻尼和不同材料、复杂形状组成的结构等,但是在作结构优化时,单纯使用有限元法进行试凑的办法则费时费力,不适于做参数分析.本文方法特别适用于进行参数分析,研究当某一参

数(如模态阶次、压电振子材质及某些几何尺寸、压电陶瓷参数等等)变化时,振子的动态特性随之变化的情况及敏感程度.尤其在超声电机的初步设计阶段可替代有限元分析来确定电机的结构及材质参数,并选定合适的工作频率.而且大大节约了时间,对压电陶瓷激振响应时表现出的时间上的优势更加明显.

参 考 文 献

- 1 赵淳生,李志荣,赵向东.超声电机机电耦合系统建模方法综述.微电机,2003,36(4):43~46(Zhao Chunsheng, Li Zhirong, Zhao Xiangdong. The Review on Modeling Methods of the Ultrasonic Motor Electromechanical Coupling System. Micromotors 2003, 36(4):43~46 (in Chinese))
- 2 王光远.应用分析动力学.北京:人民教育出版社,1981(Wang Guangyuan. Applied analytical dynamic mechanics. People Education Press, 1981 (in Chinese))
- 3 赵向东.旋转型行波超声电机动力学模型及性能仿真的研究.南京:南京航空航天大学博士学位论文,2000(Zhao Xiangdong. Study on the Dynamic Modelling and Simulation of the Traveling-Wave Type Ultrasonic Motor [Ph D Thesis]. Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2000 (in Chinese))
- 4 张沛霖,钟继烈,等.压电材料与器件物理.济南:山东科学技术出版社,1997(Zhang Peilin, Zhong Weilie. Piezoelectric material and instrument physics. Shandong Science

- and Technology Press ,1997(in Chinese))
- 5 Nesbitt W. Hagood IV and Andrew J. McFarland ,Modeling of a Piezoelectric Rotary Ultrasonic Motor. *IEEE Transactions on ultrasonics , ferroelectrics and frequency control* ,1995 *42* (2) 210~224
- 6 王育平,赵增辉,陈波,袁义坤. 超声电机定子的动力学特性仿真. *动力学与控制学报*,2005 *33* (3):78~82 (Wang Yuping , Zhao Zenghui , Chen Bo , Yuan Yikun. Simulation on dynamic characteristics of the stator of ultrasonic motor. *Journal of Dynamics and Control* , 2005 ,33 (3) :78~82 (in Chinese))

ANALYSIS ON THE COUPLING DYNAMIC MODEL OF PIEZOELECTRIC RESONATOR OF ULTRASONIC MOTOR BASED ON ENERGY METHOD

Zhao Zenghui Wang Yuping Yuan Yikun Zhao Xiangdong

(College of Science of Shan Dong University of Science and Technology ,Qingdao 266510 ,China)

Abstract Based on Hamilton principle and modal assumption , the complicated vibration of the piezoelectric resonator is simplified as a simple vibration of a single degree of freedom system , and its electro-mechanical dynamic model is established force described by a force factor. The model is proved to be accurate by calculation and experiment analysis through an example , and can be used to the earlier design , the proper working frequency 's choice , and parametric analysis for ultrasonic motor as well as the simulation model 's establishment and the optimization of dynamic characteristic further more.

Key words piezoelectric resonator , dynamic model , vibrating modality