

非经典阻尼系统的精确解*

秦金旗 唐驾时

(湖南大学工程力学系,长沙 410082)

摘要 提出了一种求解非经典阻尼系统的通用的解析方法,分别给出了多自由度非比例阻尼系统的自由振动和强迫振动的实数解的表达式.自由振动归结为求解一个线性代数方程组,把系统分为亚临界阻尼情况、退化阻尼情况和部分退化阻尼情况分别进行了讨论.对于强迫振动,研究了系统的稳态解和瞬态解,求解过程也归结为求解代数方程组.在几个算例中,把得到的精确解和数值计算结果进行了比较,两者吻合得很好.该方法为非比例阻尼系统的求解提供了一条有效的途径.

关键词 非比例阻尼 精确解 自由振动 瞬态振动 稳态振动

引言

在许多线性动力学模型分析中,例如高层建筑、桥梁以及机械振动系统,都归结为一个多自由度的系统的振动问题.阻尼使系统的能量耗散,线性振动系统常采用粘性阻尼理论,即假设阻尼力与速度的大小成正比,方向相反.多自由度非比例阻尼系统自由振动方程可以写为

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

初始条件为

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (2)$$

这里 M 、 C 和 K 分别是系统的 $n \times n$ 阶质量、非比例阻尼和刚度矩阵.一般地,它们是对称正定的. x 是动力系统响应的 $n \times 1$ 列矢量.

在方程(1)中,阻尼矩阵可以分为如下三种形式^[1]:①忽略阻尼,即 $C = 0$;②经典阻尼情形: $CM^{-1}K = KM^{-1}C$;③以及不能满足上面两种情况的非比例阻尼系统.而通常我们所说的比例阻尼定义为 $C = aM + bK$,这里 a 、 b 是实常数,此时的阻尼 C 是经典阻尼的一种特殊情况.无阻尼或经典阻尼的多自由度线性系统,即满足上面所说的前两种情况的多自由度系统,总可以通过实模态分析,将系统的响应问题化为 n 个独立的单自由度系统的实模态响应问题,从而使问题大为简化了.但是,有很多实际的动力系统或结构并不满足经典阻尼的情形,例如消能减震结构和传统抗震结构相

比,主要区别在于加大了阻尼比,附加阻尼器往往引发非比例阻尼问题.事实上,比例阻尼(又叫 Rayleigh 阻尼)也是为了计算方便,人为地将非比例阻尼在数学上进行近似.严格地说,并不存在真正的比例阻尼系统^[2].对于非比例阻尼系统,许多文献^[3~7]中都采用复模态理论求解.

像实模态理论分析多自由系统一样^[8,9],这里也引进正则变换

$$x = By \quad (3)$$

这里 B 是正则变换矩阵,可以由无阻尼自由振动方程得到^[3].将式(3)代入方程组(1)和初始条件(2),并在方程组(1)的两边同时左乘矩阵,可得

$$\ddot{y} + \hat{C}\dot{y} + \hat{K}y = 0 \quad (4)$$

以及变换后的初始条件

$$y(0) = B^{-1}x(0), \dot{y}(0) = B^{-1}\dot{x}(0) \quad (5)$$

其中

$$\hat{C} = B^T C B, \hat{K} = B^T K B = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (6)$$

右上标 -1 和 T 分别表示矩阵的逆和矩阵的转置.这里刚度矩阵 \hat{K} 是对角矩阵.对于非经典阻尼系统而言,阻尼矩阵 \hat{C} 不是对角矩阵.因此方程组(4)仍然耦合,不能化为 n 个单自由度方程从而分别求解.下面我们讨论“标准”方程(4)在初始条件(5)作用下的自由振动问题.

1 自由振动理论分析

假设方程(4)的解^[4]有如下的形式

2006-01-05 收到第1稿,2006-03-28 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10472029)

$$y = \Phi \exp(\lambda t) \quad (7)$$

其中

$$\Phi = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_n]^T \quad (8)$$

λ 和 Φ 分别是系统的特征根和特征矢量,它们一般是复数.

将式(7)代入方程(4)得

$$(\lambda^2 I + \lambda \hat{C} + \hat{K})\Phi = 0 \quad (9)$$

I 是单位矩阵. 要保证系统存在非零解,则 Φ 的系数行列式必须等于零,则

$$|\lambda^2 I + \lambda \hat{C} + \hat{K}| = 0 \quad (10)$$

在式(9)中,对于不同的特征根 λ_j ,有不同的复模态 $\Phi^{(j)}$,可以写为

$$(\lambda_j^2 I + \lambda_j \hat{C} + \hat{K})\Phi^{(j)} = 0 \quad (11)$$

方程(4)的最终解析表达式为

$$y_j = \Phi_j^{(1)} \exp(\lambda_1 t) + \Phi_j^{(2)} \exp(\lambda_2 t) + \dots + \Phi_j^{(2n)} \exp(\lambda_{2n} t) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (12)$$

其中 $\Phi_j^{(1)}, \Phi_j^{(2)}, \dots, \Phi_j^{(2n)}$ 一般是复数,其具体数值依赖于式(11)和初始条件(5). 因为系数是复数,求解比较麻烦,因此,下面把求解过程化为实数计算.

对于系统的参数都是实数的情况,若是出现复的特征根,则一定是成对共轭出现. 假设有 $m(1 \leq m \leq n)$ 对共轭特征根

$$\lambda_j = \xi_j + i\eta_j, \lambda_{j+m} = \xi_j - i\eta_j, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (13)$$

$i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位. 而另外还有 $(2n - 2m)$ 个实特征根. 由于复特征根成对的出现,则相对应的复模态也是成对共轭的出现,假设

$$\begin{aligned} \Phi^{(j)} &= \frac{u^{(j)}}{2} + i \frac{v^{(j)}}{2}, \\ \Phi^{(j+m)} &= \frac{u^{(j)}}{2} - i \frac{v^{(j)}}{2}, \end{aligned} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (14)$$

将式(13)和(14)代入到解的表达式(12),经过整理可得

$$\begin{aligned} y_j &= \exp(\xi_1 t) [u_j^{(1)} \cos \eta_1 t - v_j^{(1)} \sin \eta_1 t] + \\ &\exp(\xi_2 t) [u_j^{(2)} \cos \eta_2 t - v_j^{(2)} \sin \eta_2 t] + \dots + \\ &\exp(\xi_m t) [u_j^{(m)} \cos \eta_m t - v_j^{(m)} \sin \eta_m t] + \\ &\Phi_j^{(2m+1)} \exp(\lambda_{2m+1} t) + \Phi_j^{(2m+2)} \times \\ &\exp(\lambda_{2m+2} t) + \dots + \Phi_j^{(2n)} \exp(\lambda_{2n} t), \end{aligned} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (15)$$

这里 y_j 的表达式是实的解析表达式,从而,得到了方程组(4)的解. 再由方程(3),可以得到原始系统

(1)的解析解.

为了下面书写方便,将解的表达式(15)写为矩阵的形式

$$y = U\alpha - V\beta + W\gamma \quad (16)$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \vdots & u_1^{(m)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \dots & u_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \dots & u_n^{(m)} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & \vdots & v_1^{(m)} \\ v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & \dots & v_2^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n^{(1)} & v_n^{(2)} & \dots & v_n^{(m)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$W = [\Phi^{(2m+1)}, \Phi^{(2m+2)}, \dots, \Phi^{(2n)}] = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(2m+1)} & \Phi_1^{(2m+2)} & \vdots & \Phi_1^{(2n)} \\ \Phi_2^{(2m+1)} & \Phi_2^{(2m+2)} & \dots & \Phi_2^{(2n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_n^{(2m+1)} & \Phi_n^{(2m+2)} & \dots & \Phi_n^{(2n)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\alpha = [\exp(\xi_1 t) \cos \eta_1 t \quad \exp(\xi_2 t) \cos \eta_2 t \quad \dots \quad \exp(\xi_m t) \cos \eta_m t]^T \quad (19)$$

$$\beta = [\exp(\xi_1 t) \sin \eta_1 t \quad \exp(\xi_2 t) \sin \eta_2 t \quad \dots \quad \exp(\xi_m t) \sin \eta_m t]^T \quad (20)$$

$$\gamma = [\exp(\lambda_{2m+1} t) \quad \exp(\lambda_{2m+2} t) \quad \dots \quad \exp(\lambda_{2n} t)]^T \quad (21)$$

由于每个解 y_j 的表达式中有 $2n$ 个未知数,则 n 个解中有 $2n \times n$ 个未知数. 它们依赖于初始条件(5)和式(11). 由于未知数很多,不便于求解,我们可以先由式(11)得到各个相关系数的比值,然后就只有 $2n$ 个未知量了,再由初始条件(5)确定.

为了避免混淆,重写式(11)为

$$(\lambda_j^2 I + \lambda_j \hat{C} + \hat{K})\Psi^{(j)} = 0 \quad (22)$$

这里再假设

$$\Psi^{(j)} = p^{(j)} + iq^{(j)}, \Psi^{(j+m)} = p^{(j)} - iq^{(j)}, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (23)$$

将式(13)和(23)代入方程(22),并令其实部和虚部分别等于零,得

$$\begin{cases} E^{(j)} p^{(j)} - F^{(j)} q^{(j)} = 0 \\ F^{(j)} p^{(j)} + E^{(j)} q^{(j)} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$E^{(j)} = (\xi_j^2 - \eta_j^2)I + \xi_j C + K,$$

$$F^{(j)} = (2\xi_j\eta_j)I + \eta_j C, \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (25)$$

式(24)中两式合并为矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} E^{(j)} & -F^{(j)} \\ F^{(j)} & E^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p^{(j)} \\ q^{(j)} \end{Bmatrix} = 0 \quad (26)$$

由于代数方程组(26)中有两个式子是不独立的,不能求出方程组(26)的具体解,若令

$$p_1^{(j)} = q_1^{(j)} = 1 \quad (27)$$

则方程组(26)就变为(2n-2)阶线性代数方程组,可以得到其它的 $p_k^{(j)}, q_k^{(j)}$ ($k = 2, 3, 4, \dots, 2n$). 对于每一对特征根 λ_j, λ_{j+m} ($j = 1, 2, \dots, m$) 总可以求出一对特征矢量 $p^{(j)}, q^{(j)}$. 组合这些特征矢量可以得到如下 $n \times m$ 阶矩阵

$$P = [p^{(1)} \quad p^{(2)} \quad \dots \quad p^{(m)}], \\ Q = [q^{(1)} \quad q^{(2)} \quad \dots \quad q^{(m)}] \quad (28)$$

对于实的特征根 λ_j ($j = 2m+1, 2m+2, \dots, 2n$), 直接由(22)式求出特征矢量 $\Psi^{(j)}$. 则可以得到 $n \times (2n-2m)$ 阶矩阵

$$R = [\Psi^{(2m+1)} \quad \Psi^{(2m+2)} \quad \dots \quad \Psi^{(2n)}] \quad (29)$$

对于解(16), 利用初始条件(5)可得

$$\begin{cases} U + W = y(0) \\ U\xi - V\eta + W\lambda = \dot{y}(0) \end{cases} \quad (30)$$

定义

$$\xi = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_m]^T, \\ \eta = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_m]^T \quad (31)$$

$$\lambda = [\lambda_{2m+1} \quad \lambda_{2m+2} \quad \dots \quad \lambda_{2n}]^T \quad (32)$$

在方程(30)中, 有如下关系式

$$\begin{cases} U = A_1 a_1 + A_2 a_2 \\ V = -A_2 a_1 + A_1 a_2 \\ W = R a_3 \end{cases} \quad (33)$$

这里规定

$$A_1 = P + Q, A_2 = P - Q, A_3 = R \quad (34)$$

$$\alpha_1 = [u_1^{(1)} \quad u_1^{(2)} \quad \dots \quad u_1^{(m)}]^T$$

$$\alpha_2 = [v_1^{(1)} \quad v_1^{(2)} \quad \dots \quad v_1^{(m)}]^T$$

$$\alpha_3 = [\phi_1^{(2m+1)} \quad \phi_1^{(2m+2)} \quad \dots \quad \phi_1^{(2n)}]^T \quad (35)$$

由(34)和(35)可知, A_1, A_2 是有复特征根对应的特征向量的实数部分和虚数部分合成的, 而 A_3 是实特征根对应的特征向量组成的矩阵. α_1, α_2 和 α_3 解 y_1 中待求的相关系数. 这样做的目的是把所有解 y_j ($j = 1, 2, \dots, 2n$) 中的待定系数都用 $\alpha_1,$

α_2 和 α_3 来表示, 就可以根据初始条件确定和, 那么所有的解都将得到.

将式(33)代入方程组(30), 可得

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hat{A}_1 + \bar{A}_2 & \hat{A}_2 - \bar{A}_1 & \hat{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \end{bmatrix} \quad (36)$$

这里

$$\hat{A}_j = [\xi_1 A_j^{(1)} \quad \xi_2 A_j^{(2)} \quad \dots \quad \xi_m A_j^{(m)}],$$

$$\bar{A}_j = [\eta_1 A_j^{(1)} \quad \eta_2 A_j^{(2)} \quad \dots \quad \eta_m A_j^{(m)}],$$

$$(j = 1, 2, \dots)$$

$$\hat{A}_3 = [\lambda_{2m+1} A^{(1)} \quad \lambda_{2m+2} A^{(2)} \quad \dots$$

$$\lambda_{2n} A^{(2n-2m)}]$$

方程(36)可以简记为

$$A\alpha = b \quad (37)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \hat{A}_1 + \bar{A}_2 & \hat{A}_2 - \bar{A}_1 & \hat{A}_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\alpha = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T,$$

$$b = [y(0) \quad \dot{y}(0)]^T \quad (39)$$

求解方程(4)在初始条件(5)下的解, 就归结为求解一个线性代数方程组(37)的解. 得出 α , 就可以通过(33)得到 U, V, W . 代入解的表达式(16), 从而得到方程(4)的实解析解. 再由变换式(3)得到原系统(1)的解析解. 这种求解过程非常简单, 在组成矩阵 A 时, 以及求解方程组(37)都可以借助计算机完成.

根据动力系统特征根的不同[4], 可以把系统分为: 亚临界阻尼系统、退化系统和部分退化系统. 下面分别进行讨论:

① 亚临界阻尼情况

此时, 系统的特征根全部是复根, 即 $m = n$, 此时系统(5)的解简化为

$$y = U\alpha - V\beta$$

这时, 系统有 n 个振动频率. 系统作衰减振动, 直至停止运动.

② 退化阻尼情况

系统的特征根不是复数, 全部是负实数, 即 $m = 0$, 此时系统的解简化为

$$y = W\gamma$$

这种情况, 系统没有振动频率, 作指数衰减直至停

止.

③ 部分退化情况

系统的特征根有实数根,也有虚数根,即 $1 \leq m \leq n$,解的形式是式子(16).

若 $m = 2n - 1$,这时有两个负实数根,称为一个自由度退化情况;

$m = 2n - 2$,这时有两个负实数根,称为二个自由度退化情况;

$m = 2n - s$,这时有个负实数根,称为个自由度退化情况;

其它依次类推.这时,系统有 m 个振动频率.系统仍做振幅衰减的振动,只是振动频率的个数少于系统自由度的个数.

2 自由振动算例

算例 1 作为第一个例子,研究最简单的非比例阻尼系统,即只有两个自由度的非比例阻尼系统的自由振动,其控制方程如下

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (40)$$

以及初始条件

$$\mathbf{x}(0) = \{1 \ 0\}^T, \dot{\mathbf{x}}(0) = \{0 \ 1\}^T$$

① 若取质量系数 $m_1 = 2, m_2 = 3$,阻尼系数 $c_1 = 0.2, c_2 = 0.3, c_3 = 0.3$,以及刚度系数 $k_1 = 8, k_2 = 7, k_3 = 7$,可以求得系统的特征根为

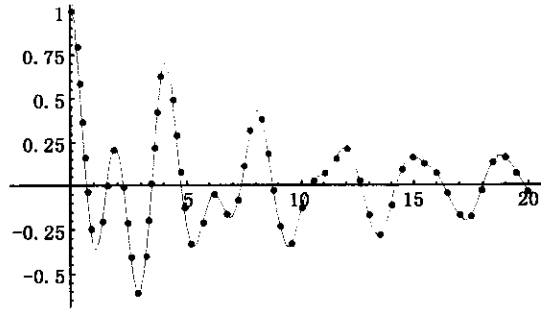
$$\begin{aligned} \lambda_{1,3} &= -0.172918 \pm 3.03999i = \xi_1 \pm \eta_1 i \\ \lambda_{2,4} &= -0.052082 \pm 1.70043i = \xi_2 \pm \eta_2 i \end{aligned} \quad (41)$$

用本文的方法得到的解析表达式为

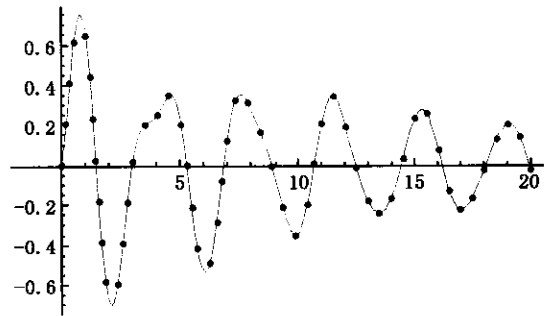
$$\begin{aligned} x_1 &= \exp(\xi_1 t) [0.718465 \cos \eta_1 t + 0.130676 \sin \eta_1 t] + \\ &\exp(\xi_2 t) [0.281535 \cos \eta_2 t + 0.315301 \sin \eta_2 t] \\ x_2 &= \exp(\xi_1 t) [0.362296 \cos \eta_1 t + 0.0787061 \sin \eta_1 t] + \\ &\exp(\xi_2 t) [0.362296 \cos \eta_2 t + 0.421631 \sin \eta_2 t] \end{aligned} \quad (42)$$

这里 $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ 的具体数值见式(41),此时系统有两个振动频率,作振幅衰减的自由振动,直至停

止运动.精确解(42)和数值结果(用龙格—库塔法得到)比较如图 1.



(a) $x_1 - t$



(b) $x_2 - t$

图 1 精确解和数值解的比较(曲线为精确解,间断点是数值解)
Fig. 1 The comparison of the exact solution and numerical solution
(The curve is the solution; the dot is numerical solution)

由图 1 可知,本文的结果和数值解完全吻合,从而可知理论分析正确.

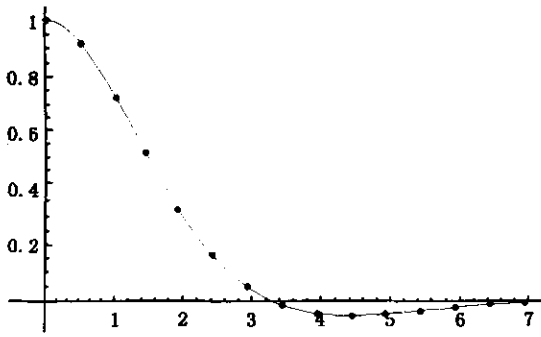
② 若取质量系数 $m_1 = 2, m_2 = 2$,阻尼系数 $c_1 = 1.5, c_2 = 1.5, c_3 = 5$,以及刚度系数 $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$,系统的特征根为

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -0.680697 \pm 0.753026i = \xi_1 \pm \eta_1 i, \\ \lambda_3 &= -2.14351, \lambda_4 = -1.24508 \end{aligned}$$

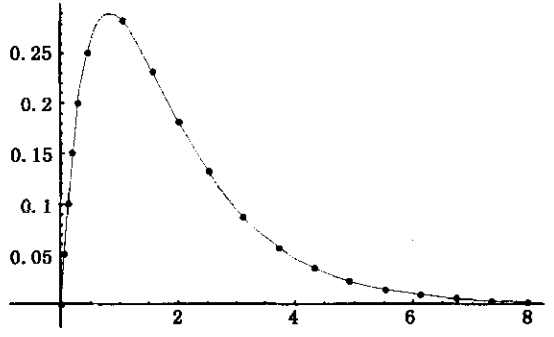
在这种情况下,系统的解为

$$\begin{aligned} x_1 &= \exp(\xi_1 t) [0.881623 \cos \eta_1 t + 1.10768 \sin \eta_1 t] + 0.0963958 \exp(\lambda_3 t) + 0.0219811 \exp(\lambda_4 t) \\ x_2 &= \exp(\xi_1 t) [0.0639875 \cos \eta_1 t + 0.735034 \sin \eta_1 t] - 0.456788 \exp(\lambda_3 t) + 0.39280 \exp(\lambda_4 t) \end{aligned}$$

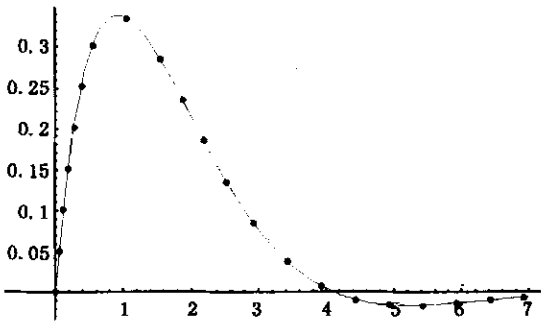
这时,系统的振动频率只有一个,振动频率少于自由度的个数,是部分退化的情况,系统作一个振动频率的衰减振动,位移时间响应曲线见图 2.



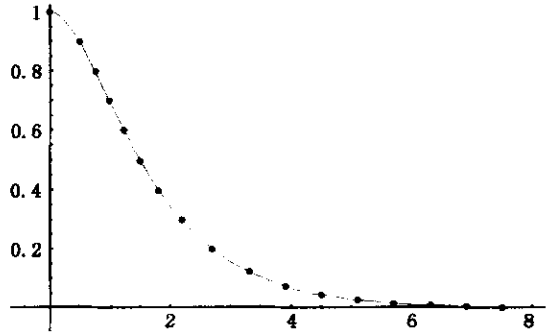
(a) $x_1 - t$



(a) $x_1 - t$



(b) $x_2 - t$



(b) $x_2 - t$

图2 精确解和数值解的比较(曲线为精确解,间断点是数值解)
 Fig.2 The comparison of the exact solution and numerical solution
 (The curve is the solution; the dot is numerical solution)

图3 精确解和数值解的比较(曲线为精确解,间断点是数值解)
 Fig.3 The comparison of the exact solution and numerical solution
 (The curve is the solution; the dot is numerical solution)

③ 若取质量系数 $m_1 = 1, m_2 = 2$, 阻尼系数

$c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = 5.5$, 以及刚度系数 $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$, 同样的方法得到系统的特征根为

$$\lambda_1 = -4.32946, \lambda_2 = -1.65117,$$

$$\lambda_3 = -1.0, \lambda_4 = -0.769376$$

这时非比例阻尼系统的解为

$$x_1 = 0.0519802\exp(\lambda_1 t) - 1.47469\exp(\lambda_2 t) + 1.5\exp(\lambda_3 t) + 0.922709\exp(\lambda_4 t)$$

$$x_2 = -0.0345528\exp(\lambda_1 t) - 0.994556\exp(\lambda_2 t) + 2.93099 \times 10^{-14}\exp(\lambda_3 t) + 1.02911\exp(\lambda_4 t)$$

可发现特征根都是负实数,系统的运动不具有振动的特性,系统作衰减运动到静止.此时系统的位移时间响应曲线为图3.

上面分析了一个两自由度非比例阻尼系统的自由振动问题,分别讨论了两自由度系统所能出现的所有的三种情况:两对共轭复数特征根,两个负实数根和一对共轭复数根,四个负实数根的情况.理论分析所得到的结果和数值解完全吻合.

3 强迫振动理论分析

3.1 求非比例阻尼系统的稳态解

对于多自由度系统的强迫振动,其控制方程为如下的形式

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f \tag{43}$$

这里 f 是受迫力列矢量,只考虑简谐激励,不妨设为

$$f = f_0 \exp(i\omega t) \tag{44}$$

ω 是激励频率,激励向量 f 的实部和虚部分别代表余弦和正弦激励.

经过正则变换(3)变换后,方程(43)变为

$$\ddot{y} + \hat{C}\dot{y} + \hat{K}y = \hat{f} \tag{45}$$

变换后的阻尼矩阵 \hat{C} 和刚度矩阵 \hat{K} 还是(6)式,而受迫力矢量变为

$$\hat{f} = B^T f \tag{46}$$

方程(45)的瞬态解可以看作三部分:一是由初始条件引起的自由振动;二是强迫激励引起的自由振动;三是由强迫激励引起的稳态振动.第一部分自由振动的解我们已经在前面求出了,就是式(16).现在再考虑方程(45)的稳态解:

先考虑余弦激励,即假设

$$f = f_0 \cos \omega t \quad (47)$$

相应的(46)式变为

$$\hat{f} = \mathbf{B}^T f_0 \cos \omega t = \hat{f}_0 \cos \omega t \quad (48)$$

则系统的稳态解可以表示为

$$\tilde{y} = g \cos \omega t + h \sin \omega t \quad (49)$$

将式(48)和(49)代入方程(45),得

$$-\omega^2 \mathbf{I}(g \cos \omega t + h \sin \omega t) + \omega \hat{\mathbf{C}}(-g \sin \omega t + h \cos \omega t) + \hat{\mathbf{K}}(g \cos \omega t + h \sin \omega t) = \hat{f}_0 \cos \omega t \quad (50)$$

令方程两边余弦和正弦的系数相等,可得

$$\begin{cases} (-\omega^2 \mathbf{I} + \hat{\mathbf{K}})g + \omega \hat{\mathbf{C}}h = \hat{f}_0 \\ -\omega \hat{\mathbf{C}}g + (-\omega^2 \mathbf{I} + \hat{\mathbf{K}})h = 0 \end{cases} \quad (51)$$

把上式改写为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} (-\omega^2 \mathbf{I} + \hat{\mathbf{K}}) & \omega \hat{\mathbf{C}} \\ -\omega \hat{\mathbf{C}} & (-\omega^2 \mathbf{I} + \hat{\mathbf{K}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

求解上面的 $2n$ 维线性代数方程组,就可以求出向量 g 和 h ,从而得到了稳态解(49)的具体解析表达式.

3.2 求系统的瞬态解

系统方程(45)的通解为自由振动和稳态解的叠加,利用(16)和(49),解的形式可以表示为

$$y = \mathbf{U}\alpha - \mathbf{V}\beta + \mathbf{W}\gamma + g \cos \omega t + h \sin \omega t \quad (53)$$

利用初始条件(5),可得

$$\begin{cases} \mathbf{U}\alpha + \mathbf{W}\gamma + g = y(0) \\ \mathbf{U}\xi - \mathbf{V}\eta + \mathbf{W}\lambda + \omega h = \dot{y}(0) \end{cases} \quad (54)$$

利用式(35)相应的式(37)变为

$$\mathbf{A}\alpha = b - \hat{b} \quad (55)$$

这里定义

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} g \\ \omega h \end{bmatrix} \quad (56)$$

所以求解方程(45)自由振动的解就归结于求代数方程组(55)的解.式(55)中的向量 b 是由初始条件对自由振动部分的影响,向量 \hat{b} 是强迫激励对自由振动部分的影响,它调整了自由振动解的系数.

同理,对于正弦激励,令

$$f = f_0 \sin \omega t \quad (57)$$

求解过程和上面的相同,只是方程组(52)修改为

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 (\mathbf{I} + \hat{\mathbf{K}}) & \omega \hat{\mathbf{C}} \\ -\omega \hat{\mathbf{C}} & -\omega^2 (\mathbf{I} + \mathbf{K}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

其它的求解方程和表达式保持不变.

在这一部分理论分析中,分别求得了强迫振动系统的稳态解和瞬态解,求解过程也是归结为求代数方程组(52)和(55).

4 强迫振动算例

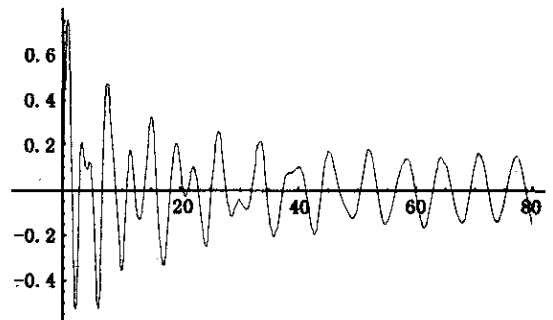
算例 2 在方程组(40)中,若有激励力对系统作用,则相应的控制方程改写为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{x} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \dot{x} + \begin{bmatrix} k + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \sin \omega t \quad (59)$$

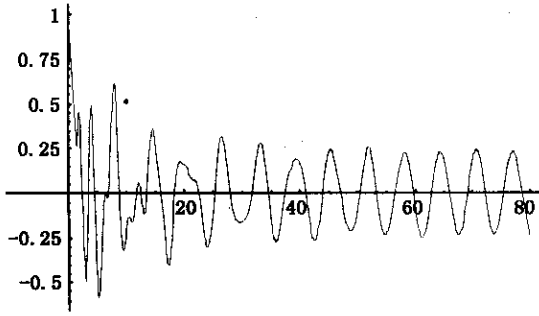
初始条件不变,取质量,阻尼,以及刚度系数还是算例 1 中的第①种情况,而激励力的幅值和频率为 $f_1 = 2, f_2 = 0, \omega = 1$.因为系统自由运动的参数没有改变,此时系统的特征根还是式(42),所以用本文的方法得到的解为

$$\begin{aligned} x_1 &= \exp(\xi_1 t) \{ 0.722643 \cos \eta_1 t - 0.159033 \sin \eta_1 t \} + \\ &\exp(\xi_2 t) \{ 0.287229 \cos \eta_2 t + 0.229216 \sin \eta_2 t \} - 0.00987142 \cos t + \\ &0.2233609 \sin t \\ x_2 &= \exp(\xi_1 t) \{ -0.363927 \cos \eta_1 t + 0.0931671 \sin \eta_1 t \} + \\ &\exp(\xi_2 t) \{ 0.371937 \cos \eta_2 t + 0.308581 \sin \eta_2 t \} - 0.00801025 \cos t + \\ &0.148492 \sin t \end{aligned} \quad (60)$$

解(60)和自由振动的解(43)比较,多了稳态振动部分,并且自由振动部分的解也发生了变化,原因是强迫振动也引起了自由振动.方程(59)的位移响应曲线见图 4,系统最终将做稳态振动见图 5.



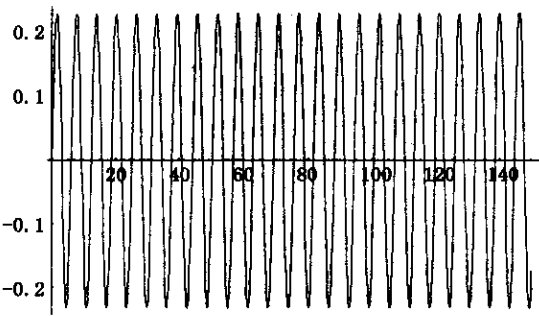
(a) $x_1 - t$



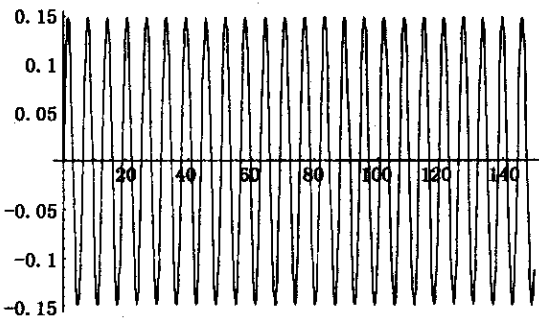
(b) $x_2 - t$

图4 方程(59)瞬态响应曲线

Fig.4 The transient resonance curve of the equation(59)



(a) $x_1 - t$



(b) $x_2 - t$

图5 方程(59)稳态响应曲线

Fig.5 The steady-state resonance curve of the equation(59)

算例3 作为第三个算例,考虑一个10自由度的非比例阻尼系统强迫振动的例子.其控制方程仍为方程(43)其中的质量,阻尼,刚度矩阵如下

$$M = [m_{ij}], K = [k_{ij}], C = [c_{ij}] \quad (61)$$

其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 3 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \begin{cases} c_{i,i+1} = -0.3 & (i = 1, 2, \dots, 9) \\ k_{ii} = 0.6 & (i = 1, 2, \dots, 10) \\ c_{i,i-1} = -0.3 & (i = 2, 3, \dots, 10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{i,i+1} = -4 & (i = 1, 2, \dots, 9) \\ k_{ii} = 8 & (i = 1, 2, \dots, 10) \\ k_{i,i-1} = -4 & (i = 2, 3, \dots, 10) \end{cases}$$

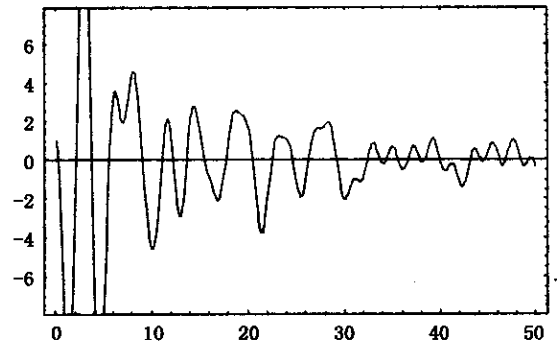
对于上面没有注明的系数为零.以及激励力为

$$f_i = \begin{cases} 10 & i = 1 \\ 0 & (i = 2, 3, \dots, 10) \end{cases} \text{ 和激励频率 } \omega = 3 \quad (62)$$

若初始条件取为

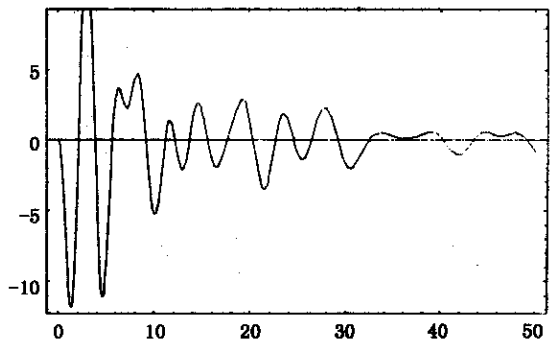
$$x_i(0) = 1, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, 10) \quad (63)$$

用本文的方法得到的解见图6,限于篇幅,这里只给出了 x_1 和 x_{10} 时间响应曲线.系统开始做振幅衰减振动,最终自由振动消失,只有稳态振动见图6中的(c)和(d).



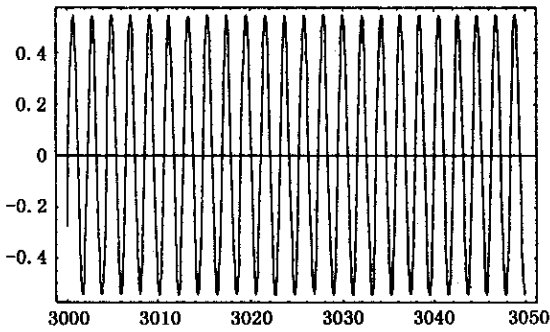
(a) 瞬态响应曲线

(a) The transient resonance curve



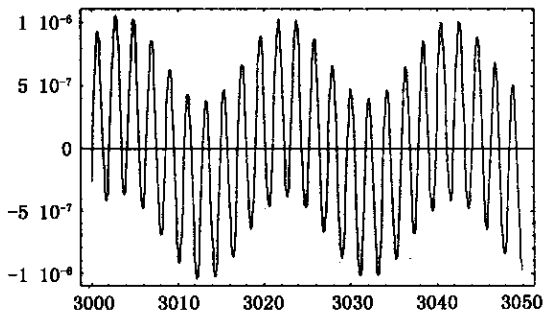
(b) 瞬态响应曲线

(b) The transient resonance curve



(c) 稳态响应曲线

(c) The steady-state resonance curve



(d) 稳态响应曲线

(d) The steady-state resonance curve

图 6 10 个自由度系统(算例 3)的部分位移时间响应曲线

Fig. 6 The part displacement-time resonance curves of the systems with 10 degrees of freedom(Example 3)

5 结论

在复数模态的基础上,提出了一种求解多自由度非比例阻尼系统的通用方法,计算过程中没有涉及复数,求解过程可完全借助计算机完成,给出了非比例阻尼系统自由振动、稳态振动和瞬态振动的求解公式.稳态振动的求解可以直接由对应的线性代数方程组求得,不要利用复模态理论.得到的解析解类似于比例阻尼系统的解析解的形式,只不过各个“模态”并不互相对立.考虑到系统可能出现实数特征根,像分析单自由度阻尼振动系统一样,分析了非比例阻尼的退化和部分退化的情况,并给出

了这些情况下系统的解析解.通过几个数值例子,把得到的解析解和数值解进行了比较,两者完全吻合,验证了该方法的正确性.该方法为非比例阻尼系统的求解提供了一条有效的途径.

参 考 文 献

- 1 Tong M, Liang Z and Lee GC. An Index of Damping Non-proportionality for Discrete Vibrating Systems. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 174 (1) 37~55
- 2 Adhikari S and Woodhouse J. Identification of Damping: Part 1, Viscous Damping. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 243 (1) 43~61
- 3 刘延柱, 陈文良, 陈立群. 振动力学. 北京: 高等教育出版社, 1998 (Liu Yanzhu, Chen Wenliang, Chen Liqun. *Vibration mechanics*. Beijing: Higher education press, 1998 (in Chinese))
- 4 SUN CT, BAI JM. Vibration of Multi-Degree-of-Freedom Systems with Non-proportional Viscous Damping. *Int. J. Mech. Sci.*, 1995, 37(4) 441~455
- 5 Balmes E. New Results on the Identification of Normal Modes from Experimental Complex Modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1997, 11(2) 229~243
- 6 SUN CT, BAI JM. Vibration of Multi-Degree-of-Freedom Systems with Non-proportional Viscous Damping. *Int. J. Mech. Sci.*, 1995, 37(4) 441~455
- 7 Sondipon Adhikari. Calculation of Derivative of Complex Modes Using Classical Normal Modes. *Computers & Structures*, 2000, 77 625~633
- 8 王洪礼, 乔宇, 张锋, 张伯俊. 汽车四轮转向动力系统的 Hybrid 控制研究. *动力学与控制学报*, 2003, 1(1): 53~58 (Wang Hongli, Qian Yu, Zhang Feng, Zhang Bojun. Research of Hybrid control for vehicle 4WS dynamic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2003, 1(1) 53~58 (in Chinese))
- 9 陈祎, 张伟. 六维非线性动力系统三阶规范形的计算. *动力学与控制学报*, 2004, 2(3): 31~35 (Chen Yi, Zhang Wei. Computation of the third order normal form for six-dimensional nonlinear dynamical systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3) 31~35 (in Chinese))

EXACT SOLUTION OF NON-CLASSICAL DAMPING SYSTEMS^{*}

Qin Jinqi Tang Jiashi

(*Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, China*)

Abstract An analytical method to solve the non-classical damping system is presented. Real exact solutions of the free vibration and forced vibration of multi-degree-of-freedom systems with non-proportional viscous damping are given respectively. In virtue of solving simple linear algebraic equations, the solutions of the free vibration in sub-critical damping, entirely and partially degenerate damping may be obtained. For the forced vibration, the problem of solving the steady-state and transient vibration can be turned into solving the linear algebraic equations too. The examples show that the analytical solutions obtained by this method agree well with the solutions obtained by the numerical method. Thus, this method is very effective to analyze the non-proportional damping system.

Key words non-proportional damping, exact solution, free vibration, transient vibration, steady-state vibration