

# Lorenz 系统的分数阶控制算法\*

严 艳 张隆阁

(华北电力大学应用数学系,保定 071000)

**摘要** 引入了分数阶微积分理论及其在控制和混沌系统研究中的应用. 基于此种理论, 针对参数未知的 Lorenz 系统利用 backstepping 的方法, 设计出了作用在第三个状态上的分数阶控制器, 此种控制算法能够避免奇异点出现并且使得整个闭环系统稳定. 它还可以通过分数阶阶次的选择得到不同的控制效果来满足控制工程中的各种需要. 仿真试验验证了此算法的有效性.

**关键词** 分数维微积分, 自适应 backstepping 控制, Lorenz 系统

## 引言

近年来, 混沌系统控制研究在非线性动力学系统中是一个十分活跃的领域, 特别是著名的 Lorenz 系统的控制得到更多的重视. Luce 和 Kernevez 利用最优控制的方法研究了 Lorenz 系统的可控性<sup>[1]</sup>; Russell 利用启发式的方法, 得到一个切换控制律, 控制 Lorenz 系统达到稳定状态<sup>[2]</sup>; Year 和 Ahmed 利用多层前馈神经网络方法得到了次最优控制<sup>[3]</sup>; 陈保颖等通过引入一待定控制项, 将两系统的混沌同步问题转化为讨论与其对应的线性系统的零解渐近稳定性问题, 有效的实现了两个混沌系统的同步<sup>[4]</sup>; Fuh 和 Tung 利用微分几何知识, 得到了一个控制 Lorenz 系统的有效的方法, 该方法不仅能控制混沌运动达到稳定状态, 而且还能使状态到达任意的周期轨道<sup>[5]</sup>.

分数阶微积分(Fractional Calculus, 简记为 FC)的研究已有很长的历史, 近年来已经在物理学和控制科学中得到越来越多的应用<sup>[6]</sup>. 特别是最近几年, FC 在混沌和控制科学中应用研究成为一个新的热点问题: 文献[7]利用 FC 来研究系统的鲁棒性; 文献[6] (Chapter 9), 推广了传统的控制, 提出了  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  控制器; 文献[8], 利用 FC 来设计 MRAC. 本文把 Lorenz 系统的参数变化量看作是分数维的时变量, 设计出了一种分数维积分型 Lyapunov 函数, 得到了稳定的镇定方法. 此种方法通过参数的选择, 可以得到不同的控制效果来

满足各种控制工程的需要. 仿真实验验证了这一方法的有效性.

## 1 FC 的数学基础

分数维微积分有两种常用的定义<sup>[6]</sup>, 即 Riemann-Liouville(R-L)定义(1840年)和 Caputo 定义(1970年), 在纯数学领域中多用 R-L 定义. Caputo 定义有传统的易于物理上实现和解释的初始条件, 并且对常数的微分为 0, 所以在实际的应用中多用 Caputo 定义. 本文采用 Caputo 定义.

**定义 1** 一元函数  $f(t)$  的  $\alpha$  阶积分定义为<sup>[6]</sup>:

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx, \quad (t > a, \alpha > 0)$$

其中  $a, t$  分别为积分的下限和上限,  $f(t)$  为被积函数,  $\alpha$  为积分次数,  $\Gamma(\alpha)$  是欧拉  $\Gamma$  函数.

分数维微分是利用分数维积分来定义的, 其定义如下:

**定义 2** 一元函数  $f(t)$  的  $\alpha$  阶维微分定义为<sup>[6]</sup>:

$${}_a D_t^{\alpha} f(t) = {}_a D_t^{-(m-\alpha)} {}_a D_t^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(x)}{(t-x)^{\alpha-m+1}} dx$$

其中  $m-1 \leq \alpha < m, m \in N$ .

**定义 3** 一元函数  $f(t)$  分数维微积分  ${}_a D_t^{\alpha} f(t)$  的拉普拉斯变换定义为<sup>[6]</sup>:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} {}_a D_t^{\alpha} f(t) dt =$$

$$s^\alpha \tilde{F}(s) - \sum_{k=0}^m s^{\alpha-k-1} f^k(0)$$

其中  $\tilde{F}(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ,  $\alpha$  为任意实数.

当初始条件为 0 时,有

$$\mathcal{L}[{}_a D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha \tilde{F}(s)$$

## 2 分数阶的自适应控制器的设计

考察 Lorenz 系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_1 x_2 - p_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + p_2 x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - p_3 x_3 + u \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $x_1, x_2$  和  $x_3$  表示系统的状态,  $p_1, p_2$  和  $p_3$  是未知正参数,  $u$  是加在第三个方程上的控制量. 本文把系统的未知参数的误差看作是可用简单分数阶微分方程描述的具有分数阶变化律的时变量, 利用 backstepping 的方法设计出了一类新的分数维的控制器, 作用在第三个方程上来控制 Lorenz 系统.

分三步来设计分数维的控制器.

第一步 定义  $z_1 = x_1$ , 它的一阶微分为

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = p_1 x_2 - p_1 x_1 = p_1 z_2 + p_1 \beta_1 - p_1 x_1 \quad (2)$$

这里  $z_2 = x_2 - \beta_1$ ,  $\beta_1$  是后面将要被定义虚拟的控制量. 选辅助的 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (3)$$

它的一阶微分为

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1 (p_1 x_2 - p_1 x_1) = p_1 z_1 z_2 + z_1 p_1 (\beta_1 - x_1) \quad (4)$$

注意到  $p_1 > 0$  且  $x_1 = z_1$ , 选

$$\beta_1 = -c_0 z_1, c_0 > -1 \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -c_1 z_1^2 + p_1 z_1 z_2, \\ c_1 &= c_0 p_1 + p_1 > 0 \end{aligned} \quad (6)$$

将式(5)代入式(2)得

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + p_1 z_2 \quad (7)$$

第二步 对  $z_2$  求一阶导数得

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\beta}_1 &= -x_1 x_3 - x_2 + p_2 x_1 + \\ & c_0 (p_1 x_2 - p_1 x_1) = -x_1 z_3 - \\ & x_1 \beta_2 + \hat{p}_2 x_1 - c_0 \hat{p}_1 x_1 - \\ & (1 - c_0 \hat{p}_1) \beta_1 - (1 - c_0 p_1) z_2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\hat{p}_2 - p_2) x_1 + c_0 (\hat{p}_1 - p_1) x_1 - \\ & c_0 (\hat{p}_1 - p_1) \beta_1 \end{aligned} \quad (8)$$

这里  $z_3 = x_3 - \beta_2$ ,  $\beta_2$  是待定的虚拟的控制量. 利用  $\beta_2$  去稳定由式(7)(8)定义的子系统 ( $z_1, z_2$ ), 在这里, 假设 Lorenz 系统的可调参数误差的辨识模型是分数维的, 不妨设  $\hat{p}_i - p_i = {}_0 D_t^{\alpha_i-1} \tilde{p}_i$ . 选辅助的 Lyapunov 函数

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2r} [{}_0 D_t^{\alpha_1-1} \tilde{p}_1]^2 + \\ & \frac{1}{2r} [{}_0 D_t^{\alpha_2-1} \tilde{p}_2]^2 \end{aligned} \quad (9)$$

对  $V_2$  求一阶导数得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 + p_1 z_1 z_2 + z_2 [-x_1 z_3 - x_1 \beta_2 + \\ & \hat{p}_2 x_1 - c_0 \hat{p}_1 x_1 - (1 - c_0 \hat{p}_1) \beta_1 - \\ & (1 - c_0 p_1) z_2] + {}_0 D_t^{\alpha_1-1} (\tilde{p}_1) \gamma^{-1} \times \\ & [{}_0 D_t^{\alpha_1} (\tilde{p}_1) + \chi (c_0 x_1 - c_0 \beta_1) z_2] + \\ & {}_0 D_t^{\alpha_2-1} (\tilde{p}_2) \gamma^{-1} [{}_0 D_t^{\alpha_2} (\tilde{p}_2) - \chi x_1 z_2] \end{aligned} \quad (10)$$

选择控制律

$${}_0 D_t^{\alpha_1} (\tilde{p}_1) = -\chi (c_0 x_1 - c_0 \beta_1) z_2$$

$${}_0 D_t^{\alpha_2} (\tilde{p}_2) = \chi x_1 z_2$$

将  $\alpha_1 = -c_0 z_1$  和  $z_1 = x_1$  代入式(10)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 - x_1 z_2 z_3 + z_2 [x_1 (p_1 + \hat{p}_1 + \\ & \hat{p}_2 + c_0 (1 - \hat{p}_1 - c_0 \hat{p}_1)) - \\ & x_1 \beta_2 - (1 - c_0 p_1) z_2] \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)又可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 - x_1 z_2 z_3 + z_2 x_1 [(p_1 + \\ & \hat{p}_1 + \hat{p}_2 - c_0 \hat{p}_1 + (1 - \\ & c_0 \hat{p}_1) c_0 - \beta_2] - (1 - c_0 p_1) z_2^2 \end{aligned} \quad (12)$$

选

$$\beta_2 = p_1 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 - c_0 \hat{p}_1 + (1 - c_0 \hat{p}_1) c_0 \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)得

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - x_1 z_2 z_3 \quad (14)$$

其中  $c_2 = 1 - c_0 p_1$ .

将式(13)代入式(8), 得到式(8)的闭环形式

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -x_1 z_3 - p_1 x_1 - \hat{p}_1 x_1 - (1 - \\ & c_0 p_1) z_2 - (\hat{p}_2 - p_2) x_1 + c_0 (\hat{p}_1 - \\ & p_1) x_1 - c_0 (\hat{p}_1 - p_1) \beta_1 \end{aligned} \quad (15)$$

第三步  $z_3$  的一阶微分为

$$z_3 = \dot{x}_3 - \dot{\beta}_2 = u + x_1 x_2 - p_3 x_3 -$$

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{p}_1} \dot{\hat{p}}_1 - \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{p}_2} \dot{\hat{p}}_2 - \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{p}_1} \dot{\hat{p}}_1 \quad (16)$$

利用控制量  $u$  去控制由式(7)(15)(16)组成的子系统  $(z_1, z_2, z_3)$ . 选择

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2 + \frac{1}{2r} ({}_0 D_t^{\alpha_3-1} \tilde{p}_3)^2 \quad (17)$$

对式(17)的两边求一阶导数得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_3 (-x_1 z_2 + u + \\ & x_1 x_2 - \hat{p}_3 x_3 - \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{p}_1} \dot{\hat{p}}_1 - \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{p}_2} \dot{\hat{p}}_2 - \\ & \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{p}_1} \dot{\hat{p}}_1) + {}_0 D_t^{\alpha_3-1} (\tilde{p}_3) - \gamma^{-1} [{}_0 D_t^{\alpha_3} (\tilde{p}_3) + \\ & \gamma x_3 z_3] \end{aligned} \quad (18)$$

选择控制律

$${}_0 D_t^{\alpha_3} \tilde{p}_3 = -\gamma x_3 z_3 \quad (19)$$

为了保证整个系统的稳定性,选择控制

$$\begin{aligned} u = & -c_3 z_3 + x_1 z_2 - x_1 x_2 + \hat{p}_3 x_3 + \\ & \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{p}_1} \dot{\hat{p}}_1 - \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{p}_2} \dot{\hat{p}}_2 - \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{p}_1} \dot{\hat{p}}_1 \end{aligned} \quad (20)$$

将式(20)代入式(18)得

$$\dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 \quad (21)$$

由于  $\dot{V}_3$  是负定的,由 LaSalle-Yoshizawa 定理[9]知:子系统  $(z_1, z_2, z_3)$  在平衡点  $(0, 0, 0)$  是全局渐近稳定的,且  $\hat{p}_1(t), \hat{p}_2(t), \hat{p}_3(t)$  是全局一致有界的. 考虑到  $z_1 = x_1, z_2 = x_2 - \beta_1$  和  $\beta_1 = -c_0 z_1$ , 所以  $x_1$  和  $x_2$  渐近趋向于 0. 由  $z_3 = x_3 - \beta_2$  和式(13)知:当  $t \rightarrow \infty$  时,有  $x_3 \rightarrow \hat{p}_1 + \hat{p}_2 - c_0 \hat{p}_1 + (1 - c_0 \hat{p}_1) c_0$ , 即  $x_3$  有界. 再由式(20)知,控制  $u$  也是有界的. 后面的仿真结果验证了此结论.

### 3 仿真结果

假设 Lorenz 系统(1)的参数为:  $p_1 = 10, p_2 = 28$  和  $p_3 = 8/3$  且控制  $u$  的初始值为 0, 本文的目标是控制 Lorenz 系统, 使它的第一个状态稳定于平衡点  $x_1^e = 0$ .

在下面的仿真中, 取  $c_0 = -0.1, c_3 = 50, \gamma = 0.006$ , Lorenz 系统的初始值选为:  $x_1 = x_2 = x_3 = 10$ , 再利用文献[10]中的对分数维微分的数值算法, 求解本文给出的分数维自适应控制律, 总可得到稳定的仿真结果.

在仿真中, 在  $t = 5$  加入控制器, 当  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1.2$  和  $\alpha_1 = 1.2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1.2$  时, 系

统的状态  $x_1$  的轨迹分别如图 1 和图 2.

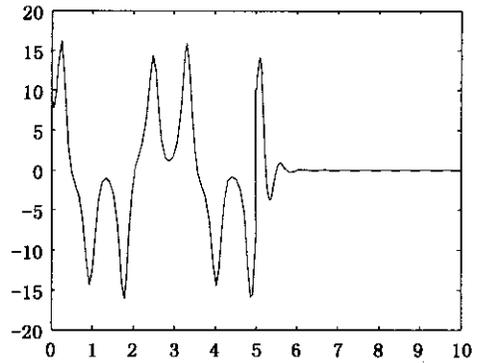


图1 当  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1.2$  时  $x_1$

Fig.1  $x_1$  for  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1.2$

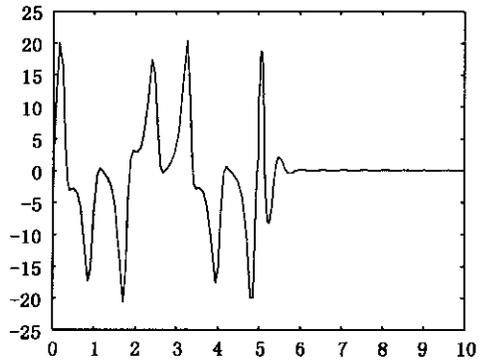


图2 当  $\alpha_1 = 1.2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1.2$  时  $x_1$

Fig.2  $x_1$  for  $\alpha_1 = 1.2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1.2$

### 4 结论

本文利用分数维微积分的知识, 利用 Backstepping 方法, 设计出了一种新的分数维控制算法, 并且证明了所设计的闭环系统是全局稳定的. 通过适当的参数选择, 可取得较好的控制效果. 怎样选择控制律中的阶数使控制效果达到最优是进一步所要研究的问题.

### 参考文献

- Luce R, Kernevez JP. Controllability of Lorenz equation. *Int'l Series on Numerical Mathematics*, 1991, 97: 257~261
- Russell DW. Using the boxes methodology as a possible stabilizer of Lorenz chaos. Singapore: World Scientific, 1994: 97~114

- 3 Yeap TH Ahmed NU. Feedback control of chaotic systems. *Dynamics Control* ,1994 ,4 :97~114
- 4 陈保颖,包芳勋. 连续混沌系统的混沌同步控制. *动力学与控制学报*,2004 ,2(4):14~18(Chen baoying ,Bao fangxun. Chaos synchronization control of continuous chaos system. *Journal of dynamics and control* ,2004 ,2(4):14~18(in Chinese))
- 5 Fuh CC ,Tung PC. Controlling chaos using differential geometric method. *Physical Review Letters* ,1995 ,75 :2952~2955
- 6 Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. San Diego , CA :Academic Press ,1999
- 7 Oustaloup A ,Moreau X and Nouillant M. The CRONE Suspension. *Control Engineering Practice* ,1996 ,4(8):1101~1108
- 8 张隆阁,李俊民,陈国培. 稳定的分数维模型参考自适应系统的设计. *西安电子科技大学学报*,2005 ,32(5):768~771(Zhang longge ,Li junmin ,Chen guopei. The design of stable model reference adaptive control system. *Journal of Xidian University* ,2005 ,32(5):768~771(in Chinese))
- 9 Krstic M ,Kanellakopoulos I and Lolotovi ? D. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. John Wiley :Sons ,1995
- 10 Chen YQ ,Moore KL. Discretization Schemes for Fractional-Order Differentiators and Integrators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* ,March 2002 ,49(3):363~367

## FRACTIONAL CONTROL ALGORITHM OF LORENZ SYSTEM\*

Yan Yan Zhang Longge

(The applied mathematics department of North China Electric Power University ,Baoding 071003 ,China)

**Abstract** Fractional calculus theory and its application in control and chaos system research are introduced. Based on this theory and by using backstepping method , a kind of fractional order controller affecting on the third state is designed for Lorenz system with unknown parameters. It is singularity free , and the closed-looped system is stable globally. All kinds of control effect can be obtained to meet various control project needs. The simulation experiment shows the algorithm 's effectiveness.

**Key words** fractional calculus , adaptive backstepping control , Lorenz system