

激光脉冲作用引起的梁形微谐振器的振动

方岱宁 孙玉鑫

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要 在激光脉冲作用下,有两个因素需要考虑:一个是热传导的非傅立叶效应,另一个是温度场与应变场的耦合导致能量耗散,使物体的机械能转化为热能,并且这是不可逆的.本文综合考虑上面两个因素,研究了激光脉冲作用下微米尺度梁谐振器的热弹性耦合问题.采用 Fourier 变换与 Laplace 变换相结合的方法求解梁的横向振动,并分析不同环境温度与能量吸收深度的影响.

关键词 热弹性耦合,微米梁谐振器,积分变换

引言

激光脉冲会在固体中产生热应力^[1,2],由于激光脉冲技术在材料加工和无损检测中的应用日益发展,这种激发机制越来越引起科研工作者的重视.当在固体上作用激光脉冲时,固体吸收激光能量,导致局部温度升高,从而引起热膨胀,产生热应力.

在快速激光加热过程中,有两个效应变得十分重要.一个是热传导的非傅立叶效应,这是对傅立叶热传导效应的修正.在传统的工程应用中,用于加热的激光能流密度低,脉冲持续时间长,因此用傅立叶热传导方程可以成功的描述.然而,在快速激光加热过程中,能流密度高,持续时间短,固体中产生了热梯度很大的区域,或者在边界上可以有超高的加热速度.正如许多作者指出的,在这种情况下,经典傅立叶模型不再适应^[3].傅立叶热传导理论中假定热的传播速度为无穷大,这在实际过程中是不成立的.而非傅立叶效应考虑到能量载子的碰撞过程所需的平均自由时间(即热松弛时间),可以消除这种矛盾.另一个是温度场与应变场的耦合导致应力波的耗散,这种耗散导致物体的机械能转化为热能,这种过程是不可逆的.

现有文献对梁的研究大多采用傅立叶热传导理论,对非傅立叶热传导模型应用比较少.而且对热冲击作用下微米尺度梁的热弹性耦合振动的讨论比较少. Tang^[4]采用 Green 函数方法研究了空间

有限介质受到激光脉冲作用后温度的分布情况. Kidawa^[5]研究了调和移动的热源作用下的梁的横向振动,应用 Green 函数方法得到解析解.但没有考虑热弹性耦合,即只考虑温度场对振动的影响,而没有考虑振动对温度场的影响. Boley^[6]研究了两端简支的矩形梁突然加热所产生的振动. Huniti 等^[7]研究了杆中热作用产生的位移与应力,文中采用了 Laplace 变换技术.

本文采用 Lord 和 Shulman^[8]提出的包含单松弛时间的广义热弹性理论研究了激光脉冲作用下微米尺度梁谐振器的热弹性耦合问题,分析了不同环境温度以及不同能量吸收深度对梁的振动特性的影响.

1 问题的数学描述

本文中考虑两端简支的均质弹性薄梁的小挠度振动.梁长为 $L(0 \leq x \leq L)$,宽为 $b(-b/2 \leq y \leq b/2)$,厚为 $h(-h/2 \leq z \leq h/2)$.本文定义 x 轴沿梁的长度方向, y 和 z 轴分别对应宽度和厚度方向.平衡态时,梁内部没有初应力和初应变,并且各处温度与室温相同,为 T_0 .

本文采用 Euler-Bernoulli 梁假设,即梁的横截面在弯曲后仍然保持为平面,并且绕 y 轴旋转一个小角度.按照这个假设,梁的位移分量分别为

$$u = -z \frac{dw}{dx}, v = 0, w(x, y, z, t) = w(x, t) \quad (1)$$

这样,梁的热激横向振动可以用如下的偏微分方程进行描述

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + bh^2 \beta \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

式中 E 是杨氏模量, $I = bh^3/12$ 是截面惯性矩, ρ 是梁的密度, w 是横向挠度, x 是沿梁轴向的长度, t 代表时间, $\beta = E\alpha_T K(1-2\nu)$, α_T 是热膨胀系数, ν 是泊松比.

式(2)中 K 为热矩, 定义为

$$K = \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \theta(x, z, t) z dz \quad (3)$$

其中, $\theta = T - T_0$ 为谐振器与环境的温差, $T(x, z, t)$ 是梁中的温度场分布, T_0 为环境温度.

化简(2)式可得

$$\frac{Eh^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta h \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

设梁的初始温度分布为 $T(x, z, 0) = T_0$, 即 $\theta(x, z, 0) = 0$. 在 $t = 0$ 时刻在上表面($z = h/2$)施加均匀分布的激光脉冲, 脉冲的时间轮廓为非高斯形式

$$I(t) = \frac{I_0 t}{t_p^2} \exp\left(-\frac{t}{t_p}\right) \quad (5)$$

其中, t_p 是激光脉冲的持续时间, I_0 是激光的能量密度, 定义为单位面积激光束携带的能量. 图1所示为不同持续时间的脉冲的时间轮廓.

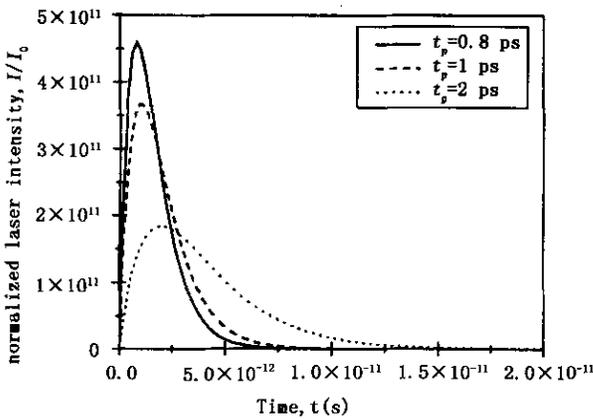


图1 激光脉冲的时间轮廓图

Fig.1 Temporal profile of the laser pulse

根据文献[4]热源 $Q(z, t)$ 可以如下描述

$$Q(z, t) = \frac{R}{\delta} \exp\left(\frac{z - h/2}{\delta}\right) I(t) \quad (6)$$

其中 δ 是热能的吸收深度, R 是表面的吸收率.

考虑热弹性耦合问题以及热传导的非傅立叶效应, 梁中的温度场分布用如下偏微分方程描述

$$k \nabla^2 \theta + Q(z, t) = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta T_0 \frac{\partial e}{\partial t} + \tau_0 \rho c_v \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \tau_0 \beta T_0 \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad (7)$$

其中, k 是热传导率, c_v 是比热, τ_0 是松弛时间, $e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ 是体积应变.

把(1)式和(6)式代入(7)式, 得到

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{R}{\delta} \exp\left(\frac{z - h/2}{\delta}\right) I(t) = \rho c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} - T_0 \beta z \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \tau_0 \rho c_v \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \tau_0 T_0 \beta z \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (8)$$

上下表面的边界条件为绝热, 即

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=\pm h/2} = 0 \quad (9)$$

对于薄梁, 当其厚度比较小时, 可以假定 θ 沿厚度方向成正弦 $\sin(pz)$ 分布, 则

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} z dz = -p^2 K \quad (10)$$

其中, $p = \pi/h$.

把(8)式 z/h^2 对 z 在区间 $[-h/2, h/2]$ 内积分得

$$k \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - kp^2 K - \rho c_v \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{T_0 \beta h}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \tau_0 \rho c_v \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + \frac{\tau_0 T_0 \beta h}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{Ra_\delta}{2h} I(t) = 0 \quad (11)$$

其中 $a_\delta = \frac{(1+2a) + (1-2a)e^{(1/a)}}{e^{(1/a)}}$, $a = \frac{\delta}{h}$.

这样可以得到考虑热弹性耦合问题的控制方程组为

$$\begin{cases} \frac{Eh^2}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta h \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = 0 \\ k \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - kp^2 K - \rho c_v \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{T_0 \beta h}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - \tau_0 \rho c_v \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + \frac{\tau_0 T_0 \beta h}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{Ra_\delta}{2h} I(t) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

2 方程式的求解

本文考虑两端简支等温的梁, 采用有限 Fourier 正弦变换与 Laplace 变换相结合的方法来求

解方程组(12). 对于两端简支等温的梁, 其边界条件为

$$\begin{cases} w|_{x=0} = w|_{x=L} = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \\ K|_{x=0} = K|_{x=L} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

初始条件为

$$\begin{cases} w|_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \\ K|_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial K}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

对方程(12)进行有限傅立叶正弦变换, 得

$$\begin{cases} \tau w_m(m, t) = \int_0^L w(x, t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ K_m(m, \tau) = \int_0^L K(x, \tau) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \end{cases} \quad (15)$$

其逆变换公式为

$$\begin{cases} w(x, t) = 2 \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} \tau w_m(m, t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ K(x, t) = 2 \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} K_m(m, t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \end{cases} \quad (16)$$

则边界条件(13)自动满足.

方程(12)及初始条件(14)变换后得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau w_m}{\partial t^2} + A_1 \tau w_m - A_2 K_m = 0 \\ A_3 K_m + A_4 \frac{\partial K_m}{\partial t} + A_5 \frac{\partial \tau w_m}{\partial t} + A_6 \frac{\partial^2 K_m}{\partial t^2} + \\ A_7 \frac{\partial^2 \tau w_m}{\partial t^2} + A_8 t e^{(-t/t_p)} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \tau w_m|_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial \tau w_m}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \\ K_m|_{t=0} = 0, \left. \frac{\partial K_m}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

其中 $r = m\pi/L$, $m = 1, 3, 5, \dots$.

式中各系数为

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{Eh^2}{12\rho}, A_2 = \frac{r^2 \beta h}{\rho}, A_3 = k(r^2 + \rho^2), \\ A_4 &= \rho c_v, A_5 = \frac{T_0 \beta h r^2}{12}, A_6 = \tau_0 \rho c_v, \\ A_7 &= \frac{\tau_0 T_0 \beta h r^2}{12}, A_8 = \frac{RI_0 a \delta}{rt_p^2 h} \end{aligned} \quad (19)$$

再对(17)式进行关于 τ 的 Laplace 变换和逆变

换, 求得 $w_m(m, t)$ 的解为

$$w_m(m, t) = \sum_{\alpha} \frac{b_0 e^{at}}{c_{\alpha}} \quad (20)$$

式中 α 是方程 $\sum_{n=0}^6 c_n \alpha^n = 0$ 的解, $c_{\alpha} = \sum_{n=1}^6 n c_n \alpha^{i-1}$, $b_0 = -A_2 A_8 t_p^2$, $c_0 = A_1 A_3$, $c_1 = 2A_1 A_3 t_p + B_1$, $c_2 = A_1 A_3 t_p^2 + 2B_1 t_p + B_2$, $c_3 = B_1 t_p^2 + 2B_2 t_p + A_4$, $c_4 = B_2 t_p^2 + 2A_4 t_p + A_6$, $c_5 = A_4 t_p^2 + 2A_6 t_p$, $c_6 = A_6 t_p^2$, $B_1 = A_1 A_4 + A_2 A_5$, $B_2 = A_3 + A_1 A_6 + A_2 A_7$.

最后由(16)式可以得到梁的横向振动位移为

$$w(x, t) = 2 \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} \sum_{\alpha} \frac{b_0 e^{at}}{c_{\alpha}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (21)$$

3 计算结果分析

本文中分析温度对热弹性耦合的影响, 根据文献[9~11], 不同温度下, 硅的材料参数不同, 如表1所示.

表 1 不同温度下硅的材料参数

Table 1 Material parameters of silicon in different temperature

T_i (K)	293	500
E (GPa)	165.9	163.3
ρ (kg/m ³)	2330	2325
k (W/(m·K))	156	80
c_v (J/(kg·K))	713	832
α ($\times 10^{-6}$ K ⁻¹)	2.59	3.614

计算中梁的尺寸保持不变, 即固定 $L/h = 10$, $b/h = 1/2$, $h = 10 \mu\text{m}$. 松弛时间为 $\tau_0 = 1 \text{ ps}$, 能量密度为 $I_0 = 1000 \text{ J/m}^2$. 对于激光脉冲, 持续时间为 $t_p = \tau_0 = 1 \text{ ps}$, 令 a 取不同的值, 则梁吸收的能量不同, 其激发的振动也有所不同. 下面计算中将予以分析.

图2和图3描述了 $a = \delta/h$ 取不同的值时位移与热矩的振动状态, 其中环境温度为室温 $T_0 = 293 \text{ K}$.

从图2和图3中可以明显看出非傅立叶效应, 振动曲线成准周期性, a 越大, 最大振幅越小. 这是因为 a 反映了热能的吸收深度, a 越大, 能量集中度越小, 能量分布越趋于均匀. 此外 a 取不同值时, 振幅不同, 但频率是相同的, 这说明激光作用不会改变梁的固有频率.

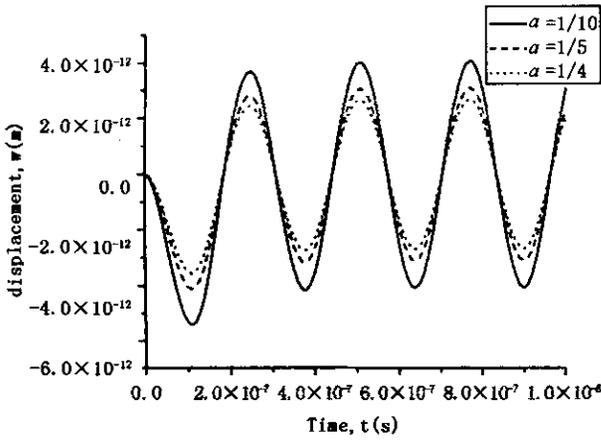


图2 a取不同值时位移的振动状态比较

Fig.2 Displacements for different values of a

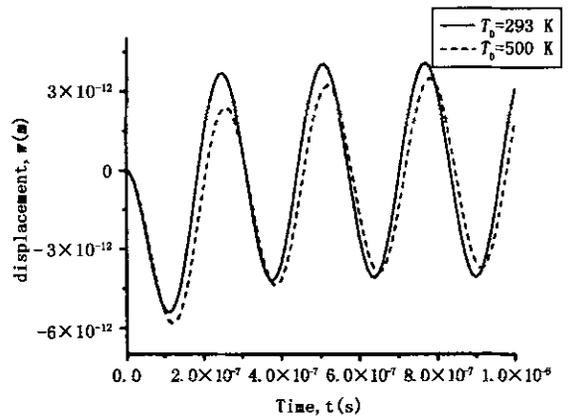


图5 环境温度 T_0 取不同值时温度增量的比较

Fig.5 Thermal moments for different values of environment temperature T_0

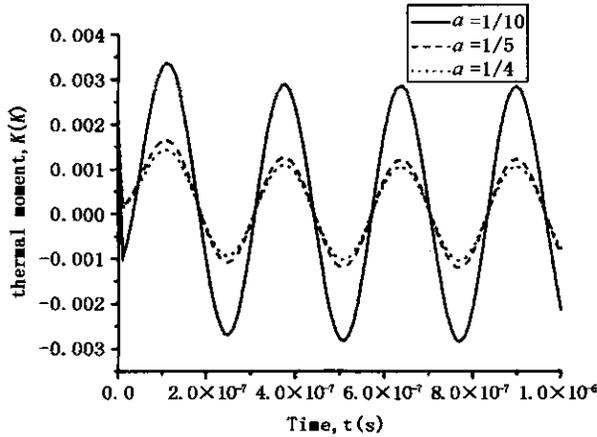


图3 a取不同值时热矩的振动状态比较

Fig.3 Thermal moments for different values of a

图4和图5描述了环境温度 T_0 取不同的值时位移与热矩的振动状态,其中能量吸收深度为 a = 1/10.

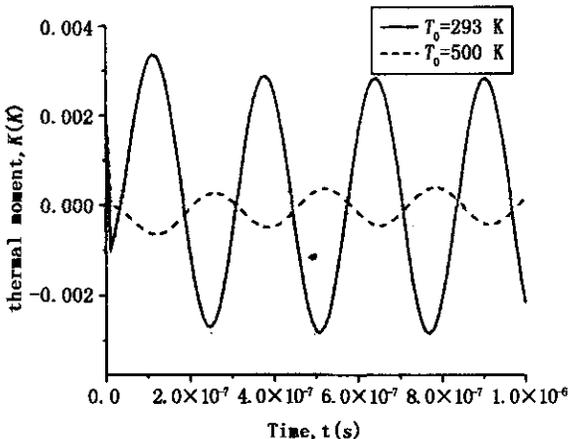


图4 环境温度 T_0 取不同值时位移的比较

Fig.4 Displacements for different values of environment temperature T_0

从图4和图5可以看出,温度不同时,振动曲线达到平衡位置的时间也不同,温度越高,所需时间越长,因而周期越大,频率越小.而不考虑应变场与温度场的耦合时,振动频率与温度无关.这是因为考虑热弹性耦合对梁的振动的影响具有热阻尼的性质,这种热阻尼使梁的振动频率增加.

4 结论

本文研究了两端简支的 Euler-Bernoulli 梁受到非高斯形式分布的激光脉冲的作用后产生的振动.由于激光作用,梁内的温度分布发生变化,由于热弹性耦合作用,梁产生横向振动.本文用傅立叶正弦变换与拉普拉斯变换相结合的方法得到梁内的位移与热矩横向振动的表达式.

文中考虑非傅立叶效应,采用热传导的波动方程,分析了热能吸收深度以及不同环境温度对振动状态的影响.结果明显反映了非傅立叶效应.

参考文献

- 1 Wang X and Xu X. Thermoelastic wave induced by pulsed laser heating. *Appl. Phys. A*. 2001, 73 :107~114
- 2 Wang X and Xu X. Thermoelastic wave in metal induced by ultrafast laser pulses. *J. Thermal Stresses*. 2002, 25 : 457~473
- 3 Tzou DY. Macro- to Micro-scale Heat Transfer : the Lagging Behavior. Bristol : Taylor & Francis , 1997
- 4 Tang DW and Araki N. Non-Fourier heat conduction be-

- havior in finite mediums under pulse surface heating. *Materials Science and Engineering A*. 2000 , 292 :173~178
- 5 Kidawa KJ. Application of the Green functions to the problem of the thermally induced vibration of a beam. *J. Sound and Vibration*. 2003 , 262 :865~876
- 6 Boley BA. Approximate analyses of thermally induced vibrations of beams and plates. *J. Appl. Mech.* 1972 , 39 : 212~216
- 7 Huniti NS , Nimr MA and Najj M. Dynamic response of a rod due to a moving heat source under the hyperbolic heat conduction model. *J. Sound and Vibration*. 2001 , 242 : 629~640
- 8 Lord HW and Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *J. Mech. Phys. Solids*. 1967 , 15 : 299~309
- 9 Duwel A , Gorman J , Weinstein M , et al. Experimental study of thermoelastic damping in MEMS gyros. *Sensors and Actuators A*. 2003 , 103 :70~75
- 10 The Institution of Electrical Engineers. Properties of Silicon. London and New York : INSPEC , 1988
- 11 Gysin U , Rast S , Ruff P , et al. Temperature dependence of the force sensitivity of silicon cantilevers. *Phys. Rev. B*. 2004 , 69 :045403

VIBRATION OF MICROSCALE BEAM RESONATOR INDUCED BY LASER PULSE

Fang Daining Sun Yuxin

(Department of Engineering Mechanics , Tsinghua University , Beijing 100084 , China)

Abstract In ultrashort-pulsed laser heating , two effects become important. One is the non-Fourier effect in heat conduction. The other is the coupling between temperature and strain rate , which causes transform of mechanical energy associated with the stress wave to thermal energy of the material. In this work , a generalized solution for the coupled thermoelastic vibration of a microscale beam resonator induced by pulsed laser heating is developed. The solution takes into account the above two effects. The finite sine Fourier transformation combined with Laplace transformation is used to obtain the lateral vibration of the beam. And the paper analyzes the effect of different laser pulse energy absorptive depth and environment temperature.

Key words thermoelastic coupling , microscale beam resonator , integral transformation