

圆弧拱的面内非线性动力学分析

赵跃宇¹ 劳文全² 冯 锐²

(1. 湖南大学土木工程学院, 长沙 410082) (2. 湖南大学工程力学系, 长沙 410082)

摘要 对圆弧拱面内自由振动的频率和非线性内共振现象进行了研究. 通过假设满足位移边界条件的振型函数对圆弧拱的面内非线性方程进行 Galerkin 一阶模态截断, 先对衍生系统的线性频率进行求解, 就不同参数对频率的影响进行分析, 然后利用多尺度法对离散模型进行求解. 结果表明, 截面高度对径向振动频率有显著影响, 但是对切向振动频率影响很小; 另外, 就本文方程而言, 可能存在三种内共振形式, 但内共振现象的产生与否还决定于圆弧拱的边界条件.

关键词 圆弧拱, 频率, 内共振, 派生系统, 多尺度法

引言

随着大跨度桥梁的不断出现, 桥梁的非线性问题也越来越受到重视. 对于大跨度钢管混凝土拱桥, 施工阶段的非线性动力学特性的研究对整个施工过程有着重要意义, 尤其是施工达到最大悬臂状态时, 拱肋处于最不利状态, 非线性因素影响明显增大, 因此对拱桥进行非线性动力学分析是十分必须的. 对于拱型结构, 应用曲梁模型进行分析大多都是基于线性分析的层次上, 李国豪^[1]和 Kawakami^[2]都是对拱桥线性振动进行了分析, 并且分为面内和面外两种情况, 由于初始曲率的影响, 面内和面外运动方程都是两个位移分量的耦合方程, 求解固有频率的解析解通常都很困难. 拱型结构以其曲线几何形状和复杂的轴向应变为特征, 即使变形在弹性范围内, 复杂的轴向应变使其表现强烈的非线性^[3]. 在文献[4]中只考虑空间曲梁的轴向应变, 不考虑剪切应变和转动惯量以及翘曲的影响, 通过 Hamilton 变分原理, 建立空间曲梁的非线性动力学方程.

本文是运用弹性力学理论和非线性动力学观点重新考虑圆弧拱的非线性动力学特性, 对已有的空间曲线梁非线性动力学方程进行简化, 研究圆弧拱面内自由振动的频率特征和内共振现象, 讨论了圆弧拱几何参数对频率的影响以及内共振现象与边界条件之间的关系.

1 基本方程

考虑如图 1 所示的平面内两端固支的圆弧拱, S 为主拱轴线, 曲率半径为 R , 圆心角为 α , L 是拱肋的计算跨径, h 是拱肋的计算矢高. 不考虑剪切变形, 转动惯量以及翘曲的影响, 利用曲梁模型可以得到圆弧拱的面内非线性动力学方程组^[4], 并且只考虑到方程的平方非线性项, 即下面的两个耦合的偏微分方程组

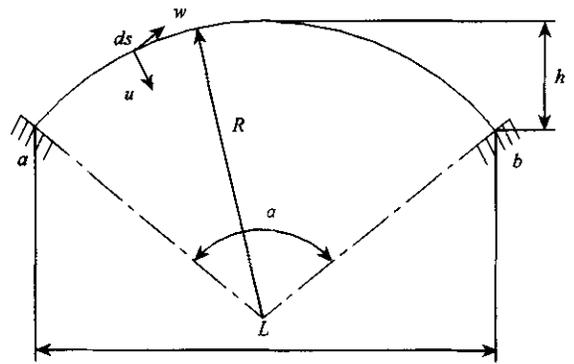


图 1 圆弧拱几何模型

Fig. 1 Circular arch model

$$EA \left\{ \frac{1}{R} u' w' - \frac{1}{R^2} u u' - w'' + \frac{1}{R} u' - u' u'' - \frac{1}{R^2} u' w' - \frac{1}{R} w u'' - \frac{1}{R^3} u w \right\} - EI \left\{ \frac{1}{R} u''' + \frac{1}{R^2} w'' \right\} + m \ddot{w} + c \dot{w} = 0 \quad (1)$$

$$EA \left\{ u' \dot{w}' - \frac{1}{R} u'^2 - u'' \dot{w}' - \frac{1}{R} u u'' - u' \right. \\ \left. \frac{w}{R^2} - \frac{1}{R^2} u w' + \frac{1}{R} \dot{w}' - \frac{u}{R^2} + \right. \\ \left. \frac{1}{2R} u'^2 + \frac{1}{R^2} u' \dot{w}' \right\} - EI \{ u^{(4)} + \\ \frac{1}{R} w'' \} - m \ddot{u} - c \dot{u} = 0 \quad (2)$$

在(1)式和(2)式中的 m 是单位长度质量, $w(s, t)$ 是切向位移, $u(s, t)$ 是径向位移, c 是弹性阻尼系数, 上标“ \cdot ”表示对弧长 s 求导, 上标“ $\dot{\cdot}$ ”表示对时间 t 求导. 以上是一组偏微分方程, 为了进行动力学行为分析, 需将其转化成为常微分方程组, 因此采用 Galerkin 方法进行一阶模态截断, 设

$$\begin{cases} w(s, t) = \varphi_1(s) q_1(t) \\ u(s, t) = \varphi_2(s) q_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

这里的 $\varphi_1(s), \varphi_2(s)$ 为振型函数, 利用它们可以很好地描述无限小运动^[5], $q_1(t), q_2(t)$ 为振动函数. 将(3)代入(1)和(2)中, 并对(1)两边同时乘以 $\varphi_1(s)$ 对(2)两边同时乘以 $\varphi_2(s)$, 并在 $[0, L]$ 范围内积分, 由此可以将偏微分方程组化为常微分方程组, 以下就是常微分方程表示的动力学方程

$$\begin{cases} a_1 \ddot{q}_1 + a_2 q_1 + a_3 q_2 + a_4 q_2^2 + \\ a_5 q_1 q_2 + a_6 \dot{q}_1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} b_1 \ddot{q}_2 + b_2 q_2 + b_3 q_1 + b_4 q_2^2 + \\ b_5 q_1 q_2 + b_6 \dot{q}_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

假设满足边界条件的振型函数^[6]为

$$\varphi_1(s) = \cos \frac{(4i-2)\pi(s - \frac{L}{2})}{L} + \\ \cos \frac{(8i-4)\pi(s - \frac{L}{2})}{L} \quad (6)$$

$$\varphi_2(s) = \cos \frac{(4i-2)\pi(s - \frac{L}{2})}{L} + \\ \cos \frac{(8i-4)\pi(s - \frac{L}{2})}{L} \quad (7)$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4$, 则通过计算可知 $a_3 = 0$ 和 $b_3 = 0$, 因此当去掉非线性项之后, 方程就成为两个不耦合的线性方程, 也就是原非线性方程的派生方程, 其线性频率为 $\omega_1 = \sqrt{a_2/a_1}, \omega_2 = \sqrt{b_2/b_1}$. 取 $E = 3 \times 10^{10} \text{ Pa}, \rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, 这里定义 $\lambda = H/R, H$ 为拱肋截面高度. 图 2 和图 3 分别是 $H =$

1 m, $H = 5 \text{ m}$ 时, 圆心角为 $\alpha = 120^\circ$, 变化半径 R 从 50 m 到 200 m, 分析几何参数对圆弧拱固有频率的影响.

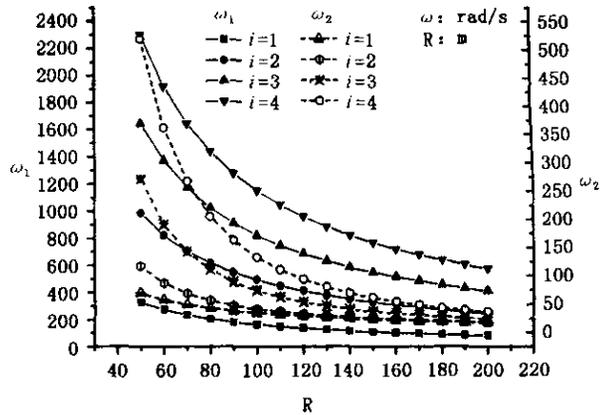


图 2 半径对频率的影响 $\lambda = 0.02$

Fig. 2 The effect of radius on frequencies $\lambda = 0.02$

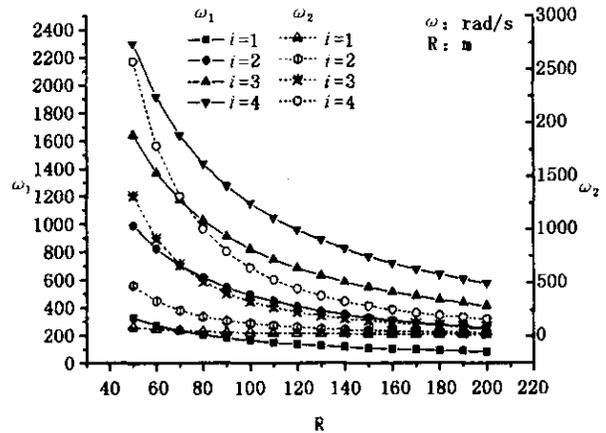


图 3 半径对频率的影响 $\lambda = 0.1$

Fig. 3 The effect of radius on frequencies $\lambda = 0.1$

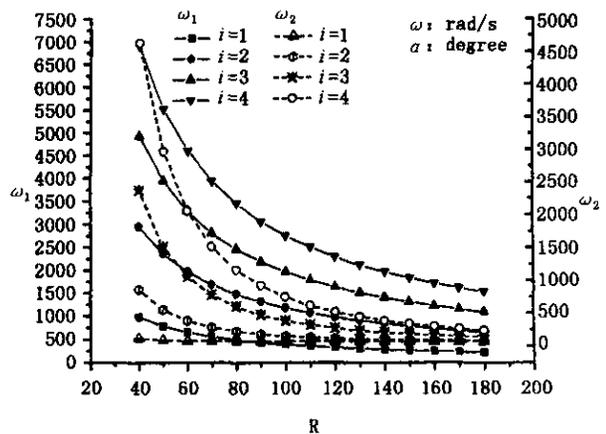


图 4 角度对频率的影响 $\lambda = 0.02$

Fig. 4 The effect of angle on frequencies $\lambda = 0.02$

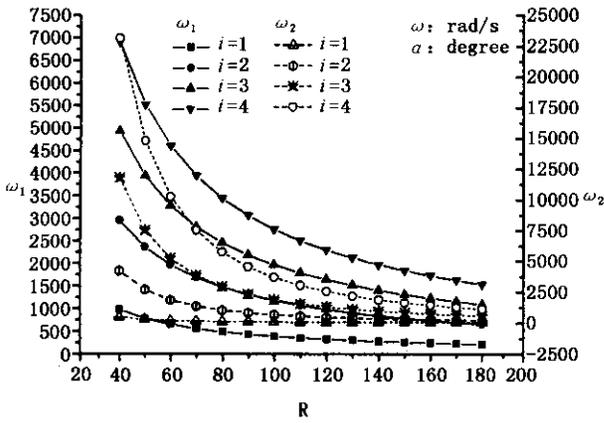


图5 角度对频率的影响 $\lambda = 0.1$

Fig.5 The effect of angle on frequencies $\lambda = 0.1$

从图2和图3中可以看出,不论 ω_1 还是 ω_2 都随着半径 R 的增大而减小,而且半径越小,频率随半径变化的曲率越大。 λ 由 0.02 变化到 0.1 时, ω_2 变化十分明显, ω_1 却基本保持不变,说明在同等半径的情况下截面高度对 ω_2 的影响很大。图4,图5分别是在半径 $R = 50 \text{ m}$, $\lambda = 0.02$ 和 $\lambda = 0.1$ 两种情况下,圆心角变化对频率的影响。从图中可以看出, ω_1 和 ω_2 都随着圆心角的减小而增大,圆心角越小,频率随圆心角变化的曲率也越大, λ 也只对 ω_2 有较大的影响,而对 ω_1 的影响非常小。

2 摄动分析

借助摄动方法求解(4)式和(5)式,这里采用多尺度法。对式(4)两边同时除以 a_1 ,式(5)同时除以 b_1 ,可以得到

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \epsilon \mu_1 \dot{q}_1 + \epsilon \alpha_1 q_2 + \epsilon \beta_1 q_2^2 + \epsilon \beta_2 q_1 q_2 = 0 \quad (8)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \epsilon \mu_2 \dot{q}_2 + \epsilon \alpha_2 q_1 + \epsilon \beta_3 q_2^2 + \epsilon \beta_4 q_1 q_2 = 0 \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= a_2/a_1 & \omega_2^2 &= b_2/b_1 \\ \epsilon \cdot \mu_1 &= a_6/a_1 & \epsilon \cdot \mu_2 &= b_6/b_1 \\ \epsilon \cdot \alpha_1 &= a_3/a_1 & \epsilon \cdot \alpha_2 &= b_3/b_1 \\ \epsilon \cdot \beta_1 &= a_4/a_1 & \epsilon \cdot \beta_2 &= a_5/a_1 \\ \epsilon \cdot \beta_3 &= b_4/b_1 & \epsilon \cdot \beta_4 &= b_5/b_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

上式中的参数 $\epsilon \ll 1$,并引入快变时间尺度 $T_0 = t$ 以及慢变时间尺度 $T_1 = \epsilon t$,则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} &= D_0 + \epsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

因此可以设

$$q_1 = \epsilon q_{11}(T_0, T_1) + \epsilon^2 q_{12}(T_0, T_1) + \dots \quad (12)$$

$$q_2 = \epsilon q_{21}(T_0, T_1) + \epsilon^2 q_{22}(T_0, T_1) + \dots \quad (13)$$

将(12)(13)式代入(8)(9)式,并按 ϵ 的幂次进行整理,可以得到

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 q_{11} + \omega_1^2 q_{11} &= 0 \\ D_0^2 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

二次幂 ϵ^2

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 q_{12} + \omega_1^2 q_{12} &= -(2D_0 D_1 q_{11} + \mu_1 D_0 q_{11} + \alpha_1 q_{21} + \beta_1 q_{21}^2 + \beta_2 q_{11} q_{21}) \\ D_0^2 q_{22} + \omega_2^2 q_{22} &= -(2D_0 D_1 q_{21} + \mu_2 D_0 q_{21} + \alpha_2 q_{11} + \beta_3 q_{21}^2 + \beta_4 q_{11} q_{21}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(14)的通解可以写成

$$\left. \begin{aligned} q_{11} &= A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + cc \\ q_{21} &= B(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + cc \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 cc 表示共轭项,把(16)代入(15)中有

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{12} + \omega_1^2 q_{12} &= -\{2i\omega_1 A'(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + i\omega_1 \mu_1 A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \alpha_1 B(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + \beta_2 A(T_1) B(T_1) e^{(\omega_1 + \omega_2) T_0} + \beta_2 A(T_1) \bar{B}(T_1) e^{(\omega_1 - \omega_2) T_0} + \beta_1 B^2(T_1) e^{2i\omega_2 T_0} + \beta_1 B \bar{B}\} + cc \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{22} + \omega_2^2 q_{22} &= -\{2i\omega_2 B'(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + i\omega_2 \mu_2 B(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + \alpha_2 A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + \beta_3 B^2(T_1) e^{2i\omega_2 T_0} + \beta_3 B(T_1) \bar{B}(T_1) + \beta_4 A(T_1) B(T_1) e^{(\omega_1 + \omega_2) T_0} + \beta_4 A(T_1) \bar{B}(T_1) e^{(\omega_1 - \omega_2) T_0}\} + cc \quad (18) \end{aligned}$$

从(17)和(18)两式可以看出系统可能存在 1:1 和 1:2 以及 2:1 三种内共振形式。给定 $m = 5000 \text{ kg/m}$, $R = 50 \text{ m}$, $EI = 5 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, $EA = 6 \times 10^{10} \text{ N}$, $\alpha = 120^\circ$,通过计算方程的系数,得到 $\omega_1 = 103 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 36 \text{ rad/s}$, $a_3/a_1 = 0$, $a_4/a_1 = 0$, $a_5/a_1 = 1224.08$, $a_6/a_1 = 0.4$, $b_3/b_1 = 0$, $b_4/b_1 = 486.029$, $b_5/b_1 = 0$, $b_6/b_1 = 0.4$ 。根据这些系数可以看出属于远离内共振的情况,其可解性条件(消去长期项的条件)为

$$\left. \begin{aligned} 2A'(T_1) + \mu_1 A(T_1) &= 0 \\ 2B'(T_1) + \mu_2 B(T_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由 (19) 式可以解得

$$\left. \begin{aligned} A &= \bar{a} e^{(-\frac{\mu_1}{2} T_1)} \\ B &= \bar{b} e^{(-\frac{\mu_2}{2} T_1)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中 \bar{a}, \bar{b} 是复常数, 所以可得

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \varepsilon e^{(-\frac{\mu_1}{2} t)} [\bar{a} e^{(i\omega_1 t)} + cc] + \alpha(\varepsilon^2) \\ q_2 &= \varepsilon e^{(-\frac{\mu_2}{2} t)} [\bar{b} e^{(i\omega_2 t)} + cc] + \alpha(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

两个解的模式都在衰减, 则稳态解为 $q_1 = q_2 = 0$, 一次近似解与线性系统的自由振动规律相同, 假设初始条件为

$$q_1(0) = 0.02, q_2(0) = 0.1 \quad (22)$$

令 $\varepsilon = 1$ 解得

$$\bar{a} = 0.01, \bar{b} = 0.05 \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= 2\bar{a} e^{(-\frac{\mu_1}{2} t)} \cos(\omega_1 t) \\ q_2 &= 2\bar{b} e^{(-\frac{\mu_2}{2} t)} \cos(\omega_2 t) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

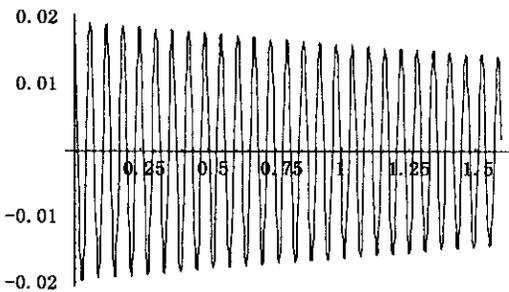


图 6 q_1 时间历程响应

Fig. 6 Amplitude histogram of q_1

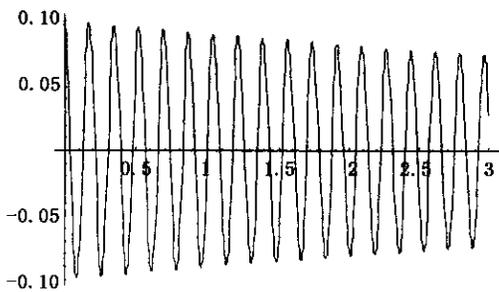


图 7 q_2 时间历程响应

Fig. 7 Amplitude histogram of q_2

图 6 和图 7 是非内共振下的时间历程曲线图, 可见在阻尼和没有内共振作用下, 系统的运动最终将停止. 前面提到可能产生三种不同的内共振形式, 但是因为方程中某些系数为零, 导致引起内共振的耦合系数也为零, 因此就不会产生内共振现象. 假设改变边界条件为两端简支, 则可以取满足

边界条件的振型函数为

$$\varphi_1(s) = \cos \frac{(4i-2)\pi(s - \frac{L}{2})}{L} + \cos \frac{(8i-4)\pi(s - \frac{L}{2})}{L} \quad (25)$$

$$\varphi_2(s) = \sin \frac{i\pi s}{L} \quad (26)$$

则通过计算方程中系数可以得知 $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0$, 因此方程的内共振耦合系数不等于零, 满足产生以上三种情况内共振的条件. 再假设改变边界条件为 左边固支, 右边简支, 取满足边界条件的振型函数为

$$\varphi_1(s) = \cos \frac{(4i-2)\pi(s - \frac{L}{2})}{L} + \cos \frac{(8i-4)\pi(s - \frac{L}{2})}{L} \quad (27)$$

$$\varphi_2(s) = \sin is - \sinh is + \frac{\sinh iL - \sin iL}{\cos iL - \cosh iL} \times (\cos is - \cosh is) \quad (28)$$

同样通过计算方程系数, 可以得到各个系数都不等于零, 因此内共振的耦合系数不会等于零, 仍然可能产生以上三种内共振形式. 因此可以得知在使用 Galerkin 对方程截断时, 方程组的各个系数取决于假设的振型函数, 而振型函数又是随着边界条件来选取. 在给定满足边界条件的振型函数下, 方程的系数就给定了, 因此内共振是否会产生取决于振型函数的假设, 也就是取决于边界条件.

3 结论

圆弧拱的两个方向的线性频率 ω_1 和 ω_2 都随着参数半径 R 、圆心角 α 的减小而增大, 而且半径、圆心角越小, 频率随这两个参数变化的速率越大. 截面几何参数 λ 只对 ω_2 有较大的影响, 而对 ω_1 的影响非常小, 说明在半径一定的条件下, 截面高度对径向振动频率有显著影响, 但是对切向振动频率影响很小. 通过摄动分析, 发现系统可能存在 1:1 和 1:2 以及 2:1 三种内共振形式, 但是由于采用满足不同边界条件的位移振型函数, 会导致不同的内共振耦合系数, 所以圆弧拱的内共振现象是否会发还取决于边界条件.

参 考 文 献

- 1 李国豪. 桥梁结构稳定与振动. 北京:中国铁道出版社,1996(LI Guohao. Stability and Vibration of Bridge Structures. Beijing: China Railway Publishing House, 1996(in Chinese))
- 2 Kawakami M, Sakiyama T, et al. In-plan and Out-of-plane Vibrations of Curved Beams with Variable Sections. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 187(3), 381~401
- 3 段海娟, 周益云, 苏国韶. 拱结构空间几何非线性分析的曲梁单元. *四川建筑科学研究*, 2002, 28(2):10~11 (Duan Haijuan, Zhou Yiyun, Su Guoshao. 3D Curved-beam Element for Geometrically Nonlinear Analysis of Arch structure. *Building Science Research of Sichuan*, 2002, 28(2):10~11(in Chinese))
- 4 赵跃宇, 冯锐, 劳文全, 王连华. 空间曲梁非线性动力学方程. *动力学与控制学报*, 2005, 3(4):34~38(Zhao Yueyu, Feng Rui, Lao Wenquan, Wang Lianhua. Nonlinear Kinematic Equation of Spatial Curved Beam. *Journal of dynamics and control*, 2005, 3(4):34~38(in Chinese))
- 5 Nayfeh AH, Mook DT. *Nonlinear Oscillations*. New York: Wiley Interscience, 1979
- 6 蒋志刚. 圆弧拱对称基频和振型的实用计算. *重庆交通大学学报* 2000, 19(1):29~30(Jiang Zhigang, Simplified Calculation for the Lowest Symmetrical Vibration Natural Frequency of Arch. *Journal of Chongqing Jiaotong Institute*, 2000, 19(1) 29~30(in Chinese))

IN-PLANE NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS OF CIRCULAR ARCHES

Zhao Yueyu¹ Lao Wenquan² Feng Rui²

(1. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

(2. Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract The in-plane free vibration frequencies and nonlinear internal resonance of circular arches were studied. Based on the assumptive vibration function, the nonlinear equations were discretized by the Galerkin method. First, the frequencies of derived system were obtained, thus the effect of different parameters on frequencies were studied. Then, the method of multiple scales was applied to solve the equations. The results showed that the radial frequency was greatly affected by the height of the cross-section, but the tangential frequency wasn't. Three types of internal resonance form may be activated. The further studies of the equations in this paper pointed out that internal resonance was determined by the boundary conditions.

Key words circular arches, frequency, internal resonance, derived system, the method of multiple scales