

# 作平面运动的二维平板的热耦合动力学问题\*

李智勇 刘锦阳 洪嘉振

(上海交通大学工程力学系, 上海 200030)

**摘要** 研究受到热冲击的作平面运动的二维平板的温度场和动力学响应. 考虑温度场和应变场的耦合, 通过计算熵密度, 建立了平板的热传导变分方程, 此外, 在本构关系式中考虑热应变, 基于平面应力假设建立了作平面运动的二维平板的动力学变分方程. 用有限元方法分别对温度场和变形场进行离散. 最后, 计算了作直线平动的平板的温度场和变形场, 揭示了温度和变形的相互耦合特征, 体现了板运动对温度和变形的影响.

**关键词** 热耦合动力学, 二维平板, 平面运动

## 引言

在工程实际中, 尤其是在机械制造、航空、冶金以及材料工业中, 一些装置处在高温环境中工作, 这些设备所产生的热变形非常显著. 在核工业、陶瓷和冶金等领域中, 剧烈的变温现象普遍存在, 在这种情况下变形对温度场的影响变得不可忽略. 由于大多数高温环境下工作的设备并不是静止的, 因此, 考虑大范围运动的热耦合问题越来越受到工程界的重视.

传统的热动力学分析<sup>[1, 2]</sup>是在假定温度变化是缓慢的情况下, 将动力学问题近似当作准静态问题处理, 从而忽视了惯性力的影响. 吴恒安<sup>[3]</sup>等人计算了在温度变化已知的情况下弹性体的变形和热应力, 认为温度快速变化而产生热冲击时, 必须在动力学方程中考虑惯性力的影响. 对于温度剧变引起的高速变形问题, 根据热力学基本定律、材料本构关系和 Helmholtz 自由能公式导出的热传导方程中将含有应变率, 表明温度场受到弹性应变率的影响. 为了研究温度和弹性变形的耦合规律, 钱伟长<sup>[4]</sup>通过对自由能密度和熵密度的分析, 建立了弹性薄板的耦合热弹性理论的变分原理. P. Hosseini-Tehrani, M. R. Eslam<sup>[5]</sup>通过对热耦合动力学方程的无量纲化和拉普拉斯变换的方法, 以薄板为研究对象对考虑温度和弹性变形耦合的热冲击问题作了进一步的研究. 但是, 对于作平面运动的柔

性体耦合热弹性动力学问题, 前期工作很少涉及. D. C. D. Oguamanam, J. S. Hansen 和 G. R. Heppler<sup>[6]</sup>对受热载荷且存在平面运动的柔性体进行了研究, 但未考虑温度和变形的耦合.

本文首先通过自由能密度计算熵密度, 建立了二维平板的热传导变分方程, 同时考虑热应变, 在平面应力假设下建立了作平面运动的二维平板的动力学变分方程. 然后对方程进行有限元离散. 最后计算了作直线平动的二维平板的温度场和变形场, 通过与文献<sup>[5]</sup>的数值对比验证了温度和变形的结果正确性, 在此基础上对三种情况下的温度场和变形场进行分析, 揭示了温度和变形的相互耦合特征, 体现了板运动对温度、变形和应力的影响.

## 1 二维平板的热耦合动力学变分方程

在三维情况下, 温度场变量在笛卡尔坐标系中满足的热传导变分方程<sup>[4]</sup>为

$$\begin{aligned} \delta W_1 = & \int_V \left[ \frac{d\eta}{dt} T_0 \delta T + \delta \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \right. \\ & \left. \delta \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \delta \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \right. \\ & \left. \delta T \rho Q \right] dV - \int_{S_2} \delta T \bar{q} dS - \\ & \int_{S_3} \delta T h (T_c - T) dS = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\eta$  是熵密度, 可由自由能密度求得;  $Q$  是物体

内部的热源密度,  $T$  是即时温度,  $\bar{q}$  是边界上的给定热流量, 对应于第二类边界条件;  $h$  是对流换热系数,  $T_c$  所在的项对应于第三类边界条件, 在自然对流条件下,  $T_c$  是外界环境温度, 在强迫对流条件下,  $T_c$  是边界层的绝热壁温度,  $T_0$  是无热变形时的参考温度. 三维柔性体的动力学变分方程为<sup>[7]</sup>

$$\delta W_2 = \int_V (-\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \mathbf{r}^T \mathbf{f} - \rho \delta \mathbf{r}^T \ddot{\mathbf{r}}) dV + \int_S \delta \mathbf{r}^T \bar{\mathbf{F}} dS = 0 \quad (2)$$

其中,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  分别为应变和应力列阵,  $\mathbf{r}$  为柔性体上任意一点的绝对位移在惯性坐标系下的坐标列阵,  $\mathbf{f}$  为体力阵,  $\bar{\mathbf{F}}$  为面力阵.

下面在三维热传导变分方程和动力学变分方程的基础上, 根据平面应力假设, 建立作平面运动的二维平板的热传导变分方程和动力学变分方程. 图 1 为作平面运动的二维平板,  $X_0 Y_0$  和  $X_b Y_b$  分别是惯性参考系和建立在未变形二维平板上的浮动坐标系 ( $x, y$ ) 是平面柔性体上任意一点在浮动坐标系  $X_b Y_b$  下的坐标.

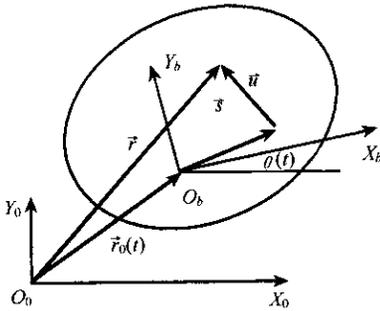


图 1 作平面运动的二维平板

Fig. 1 A two-dimensional plate undergoing planar motion

为了求熵密度  $\eta$ , 先求自由能密度. 在三维问题中, 自由能密度  $\Phi$  的表达式<sup>[4]</sup> 为

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 + G(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + 2\epsilon_{xy}^2 + 2\epsilon_{xz}^2 + 2\epsilon_{yz}^2) - \rho \alpha (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \Delta T - \frac{\rho c}{2} \left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 \quad (3)$$

其中  $\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}$ ,  $G = \frac{F}{2(1 + \mu)}$ ,  $\varphi = 3\lambda + 2G = \frac{E}{(1 - 2\mu)}$ ,  $E$  是弹性模量,  $\mu$  是泊松比,  $c$  是材料的比热容,  $\alpha$  为物体的线膨胀系数,  $\Delta T$  为无热变形时的参考温度  $T_0$  和即时温度  $T$  之间的温度差. 根据平面应力假设

$$\sigma_z = 0, \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0, \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0 \quad (4)$$

得到

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0), \quad \mathbf{D} = \frac{E}{(1 - \mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mu)/2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad 2\epsilon_{xy}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\epsilon_{x0} \quad \epsilon_{y0} \quad 0]^T \quad (6)$$

$\epsilon_{x0} = \epsilon_{y0} = \alpha \Delta T$ . 将  $\sigma_z = 0$ ,  $\epsilon_{z0} = \alpha \Delta T$  和 (5) 式代入关系式

$$\epsilon_z - \epsilon_{z0} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (7)$$

得到应变  $\epsilon_z$  的表达式为

$$\epsilon_z = -\frac{\lambda}{\gamma} (\epsilon_x + \epsilon_y) + \frac{\varphi}{\gamma} \alpha \Delta T \quad (8)$$

其中,  $\gamma = \frac{E(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} = \lambda + 2G$ . 将 (8) 式代入 (3), 可求得二维情况下的  $\Phi$  的表达式

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \lambda (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 + G(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + 2\epsilon_{xy}^2) - \rho \alpha (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \Delta T - \\ & \frac{\rho c}{2} \left( \frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 = \frac{E}{2(1 - \mu^2)} (\epsilon_x + \epsilon_y)^2 + \\ & \frac{E}{(1 + \mu)} (\epsilon_{xy}^2 - \epsilon_x \epsilon_y) - \frac{E}{(1 - \mu)} \times \\ & \alpha \Delta T (\epsilon_x + \epsilon_y) - \frac{E(1 + \mu)}{2(1 - 2\mu)(1 - \mu)} \times \\ & (\alpha \Delta T)^2 - \frac{\rho c}{2T_0} (\Delta T)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

相应地, 二维情况下熵密度<sup>[4]</sup> 为

$$\eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \left( \rho c + \frac{\alpha^2 E (1 + \mu) T_0}{(1 - 2\mu)(1 - \mu)} \right) \times \frac{\Delta T}{T_0} + \frac{\alpha E}{(1 - \mu)} (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (10)$$

将上式代入  $\delta W_1$ , 二维情况下的热传导变分方程为

$$\begin{aligned} \delta W_1 = & \int_V \left[ \left( \frac{\alpha^2 E (1 + \mu) T_0}{(1 - 2\mu)(1 - \mu)} + \rho c \right) \frac{dT}{dt} \delta T + \right. \\ & \delta \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \delta \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \\ & \delta T \rho Q \left. \right] dV + \int_V \left[ \frac{\alpha E T_0}{1 - \mu} \left( \frac{d\epsilon_x}{dt} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{d\epsilon_y}{dt} \right) \delta T \right] dV - \int_{S_2} \delta T \bar{q} dS - \\ & \int_{S_3} \delta T h (T_c - T) dS = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

其中第二个积分项即温度与弹性变形的耦合项,它表明待定温度场不仅与热源、热力学物性常数及换热边界条件有关,还受到弹性变形应变率的影响,它将在一定程度上改变物体内热量的传递。

设二维平板的平面运动规律为已知,即  $r_0 = r_0(t) = [x_0(t) \ y_0(t)]^T$ ,  $\theta = \theta(t)$ , 于是  $\delta r_0 = \mathbf{0}$ ,  $\delta \theta = 0$ . 板上任意一点的绝对位移  $\vec{r}$  在惯性坐标系  $X_0 Y_0$  下的坐标列阵为

$$r = r_0 + A(s + u) \tag{12}$$

其中  $s = [x \ y]^T$ ,  $u = [u_1 \ u_2]^T$ ,  $A = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix}$ . 令  $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 对  $r$  求变分得到

$$\delta r = \delta r_0 + \delta \theta \tilde{A}(s + u) + A \delta u = A \delta u \tag{13}$$

对  $r$  关于时间求两阶导数得到

$$\ddot{r} = \ddot{r}_0 + \dot{\theta} \tilde{A}(\dot{s} + \dot{u}) - \theta^2 A(s + u) + 2\dot{\theta} \tilde{A} \dot{u} + \ddot{u} \tag{14}$$

根据应变与变形的关系式

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = L u,$$

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \tag{15}$$

得到应力列阵与应变列阵的关系

$$\sigma = D\varepsilon - D\varepsilon_0 = DLu - D\varepsilon_0 \tag{16}$$

将上式代入动力学变分方程,有

$$\begin{aligned} \delta W_2 = & \int_V (-\delta u^T L^T DLu + \delta u^T A^T f) dV + \\ & \int_V \delta u^T L^T D\varepsilon_0 dV + \int_S \delta \bar{u}^T A^T \bar{F} dS - \\ & \int_V \rho \delta u^T (A^T \ddot{r}_0 + \dot{\theta} \tilde{I}(s + u) - \theta^2 (s + u) + 2\dot{\theta} \tilde{I} \dot{u} + \ddot{u}) dV = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

其中  $\varepsilon$  为物体任一点的应变坐标阵  $\varepsilon = (T - T_0) \mathbf{I} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix}^T$  而为该点不受约束自由热膨胀所产生的应变坐标阵. 其中分离出的第二个积分项即耦合项,它表明变形受到温度变化的影响。

### 2 有限元离散的热耦合动力学方程

用有限元法分别对温度场和变形场进行离散. 将平板分为个单元,板上任意一点的温度和变形

分量可表示为  $T = T_0 + N_0 p_0$ ,  $u = Np$ , 其中  $p_0$  表示节点温度变化的坐标列阵,  $p$  表示节点变形的坐标列阵,将上式代入(11)和(17),可以得到二维平板有限元离散的热传导方程和动力学方程如下

$$M_1 \dot{p}_0 + K_1 p_0 + H_1 \dot{p} = F_1 \tag{18}$$

$$M_2 \ddot{p} + G_2 \dot{p} + K_2 p + K_d p + H_2 p_0 = F_2 \tag{19}$$

以上两式中各系数矩阵分别定义为

$$M_1 = \int_V (\rho c + \frac{E(1+\mu)}{(1-2\mu)(1-\mu)} \alpha^2 T_0) \times N_0^T N_0 dV \tag{20}$$

$$K_1 = \int_V \left( k \frac{\partial N_0^T}{\partial x} \frac{\partial N_0}{\partial x} + k \frac{\partial N_0^T}{\partial y} \frac{\partial N_0}{\partial y} \right) dV + \int_{S_3} h N_0^T N_0 dS \tag{21}$$

$$H_1 = \frac{\alpha E T_0}{1-\mu} \int_V N_0^T (L_1 + L_2) N dV,$$

$$F_1 = \int_V \rho Q N_0^T dV + \int_{S_2} \bar{q} N_0^T dS + \int_{S_3} h T_c N_0^T dS \tag{22}$$

$$M_2 = \int_V \rho N^T N dV, G_2 = 2\dot{\theta} \int_V \rho N^T \tilde{I} N dV \tag{23}$$

$$K_2 = \int_V N^T L^T D L N dV,$$

$$K_d = \int_V \rho N^T (\dot{\theta} \tilde{I} - \theta^2 I) N dV \tag{24}$$

$$H_2 = - \int_V N^T L^T D \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 0 \end{bmatrix}^T N_0 dV \tag{25}$$

$$F_2 = \int_V N^T (-\rho A^T \ddot{r}_0 - \rho \ddot{\theta}^2 s + \rho \theta^2 s + A^T f) dV + \int_S (\bar{N}^T A^T \bar{F}) dS \tag{26}$$

### 3 热耦合动力学仿真计算

考虑图2所示的模型. 弹性平板一端自由,一端与作直线平动的刚体固接. 设  $O_b$  为建立在未变形的平动刚体上的连体坐标系  $X_b Y_b$  的原点,其关于绝对坐标系  $X_0 Y_0$  的坐标阵为

$$r_b(t) = \begin{bmatrix} x_b(t) \\ y_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cos \Omega t \\ 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

引入如下无量纲变量

$$\xi = \frac{x}{\phi}, \eta = \frac{y}{\phi}, \hat{t} = \frac{t C_1}{\phi}, \hat{\omega} = \frac{\phi \Omega}{C_1}, \hat{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\beta T_0} \tag{28}$$

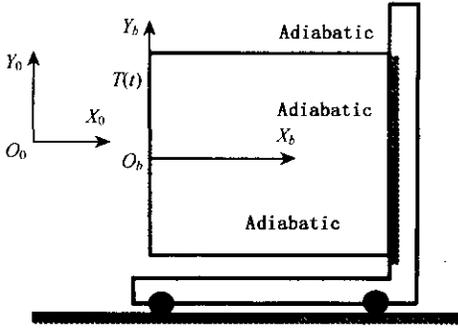


图 2 作直线平动的二维平板

Fig.2 A two-dimensional plate undergoing translational motion

$$\hat{u}_i = \frac{(\lambda + 2G)u_i}{\phi\beta T_0} \quad (i = 1, 2);$$

$$\hat{R} = \frac{(\lambda + 2G)R}{\phi\beta T_0}; \hat{T} = \frac{T - T_0}{T_0} \quad (29)$$

其中  $\phi = k\mathcal{K}(\rho C_1)$  是长度的无量纲化系数,  $C_1$  定义为  $C_1 = \sqrt{(\lambda + 2G)\mathcal{Y}\rho}$ ,  $\xi, \eta, \hat{t}, \hat{\omega}, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{u}_i, \hat{R}, \hat{T}$  分别为对应于  $x, y$ , 时间  $t$ , 圆频率  $\Omega$ , 应力  $\sigma_{ij}$ , 变形  $u_i, R$  和温度  $T$  的无量纲变量.  $\beta = \alpha E\mathcal{K}(1 - \mu)$

为温度应力模数, 引入  $C = \frac{T_0\beta^2}{\rho(\lambda + 2G)}$  作为衡量耦合程度的量, 可见无热变形时的参考温度  $T_0$  与  $C$  之间是正比例关系, 可以通过调节  $T_0$  的大小来调节  $C$  的大小, 一般情况下  $T_0$  取室温  $20^\circ\text{C}$ . 对于作直线平动的二维平板,  $\mathcal{K}(t) = 0$ . 考虑平板的绝热和无对流的边界条件, 且无内热源, 方程 (18) 和 (19) 中,  $Q = 0, q = 0, h = 0$ , 于是,  $F_1 = 0$ . 设  $\hat{p} = p_0/T_0, \hat{p} = \frac{(\lambda + 2G)}{\phi\beta T_0} p$ , 无量纲的有限元离散的热传导方程和动力学方程为

$$\hat{M}_1 \hat{\dot{p}}_0 + \hat{K}_1 \hat{p}_0 + \hat{H}_1 \hat{p} = 0 \quad (30)$$

$$\hat{M}_2 \hat{\dot{p}} + \hat{K}_2 \hat{p} + \hat{H}_2 \hat{p}_0 = \hat{F}_2 \quad (31)$$

其中

$$\hat{M}_1 = \int_A (1 + \kappa C) N_0^T N_0 d\xi d\eta,$$

$$\kappa = (1 - \mu)^2 \mathcal{K}(1 - 2\mu)^2 \quad (32)$$

$$\hat{K}_1 = \int_A \left( \frac{\partial N_0^T}{\partial \xi} \frac{\partial N_0}{\partial \xi} + \frac{\partial N_0^T}{\partial \eta} \frac{\partial N_0}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (33)$$

$$\hat{H}_1 = C \int_A N_0^T (\hat{L}_1 + \hat{L}_2) N d\xi d\eta,$$

$$\hat{L}_1 = [\partial/\partial \xi \quad 0], \hat{L}_2 = [0 \quad \partial/\partial \eta] \quad (34)$$

$$\hat{M}_2 = \int_A N^T N d\xi d\eta, \hat{K}_2 = \int_A N^T \hat{L}^T \hat{D} \hat{L} N d\xi d\eta \quad (35)$$

$$\hat{D} = D/(\lambda + 2G), \hat{L} = [\hat{L}_1^T \quad \hat{L}_2^T \quad \hat{L}_3^T]^T,$$

$$\hat{L}_3 = [\partial/\partial \eta \quad \partial/\partial \xi] \quad (36)$$

$$H_2 = -\zeta \int_V N^T \hat{L}^T \hat{D} [1 \quad 1 \quad 0]^T N_0 d\xi d\eta,$$

$$\zeta = \frac{(1 - \mu)^2}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \quad (37)$$

$$F_2 = \int_A N^T (A^T \hat{r}_0) d\xi d\eta, \hat{r}_0 = \hat{R}\omega^2 \cos \hat{\omega}t \quad (38)$$

平板的无量纲长和宽均为 10, 材料泊松比为 0.3. 自由端的无量纲温度为已知函数  $\hat{T}(\hat{t}) = 5\hat{t}e^{-2\hat{t}}$ , 而且没有其他形式的热交换, 则可以通过如下方法处理自由端的第一类边界条件: 令  $\hat{p} = [\hat{p}_{01} \quad \hat{p}_{02}]^T, \hat{M}_1 = [\hat{M}_{11} \quad \hat{M}_{12}], \hat{K} = [\hat{K}_{11} \quad \hat{K}_{12}]$  其中,  $\hat{p}_{01} = \hat{p}_{01}(\hat{t})$  为已知的自由端的温度列阵,  $\hat{p}_{02}$  为其它节点的温度列阵; 式 (31) 可写成

$$\hat{M}_{12} \hat{\dot{p}}_{02} + \hat{K}_{12} \hat{p}_{02} + \hat{H}_1 \hat{p} = -\hat{M}_{11} \hat{\dot{p}}_{01} - \hat{K}_{11} \hat{p}_{01} \quad (39)$$

为验证本文工作的正确性, 先不考虑板运动以及热耦合影响, 即取  $\hat{R} = 0, C = 0$ , 将温度和位移曲线与 P. Hosseini-Tehrani 和 M. R. Eslami<sup>[5]</sup> 算得的结果进行比较, 如图 3 和图 4 所示, mw 表示本文工作, ref 为 P. Hosseini-Tehrani 和 M. R. Eslami 的计算结果. 图 3 为平板中线上各点 ( $y = 0$ ) 在  $\hat{t} = 3$  和  $\hat{t} = 6$  时的无量纲温度沿  $\xi$  的分布规律, 图 4 为平板在中线上各点在  $\hat{t} = 3$  和  $\hat{t} = 6$  时的无量纲纵向变形  $\hat{u}_1$  沿  $\xi$  的分布规律. 可见, 本文与文献 [5] 的计算结果吻合, 从而验证了本文模型的正确性.

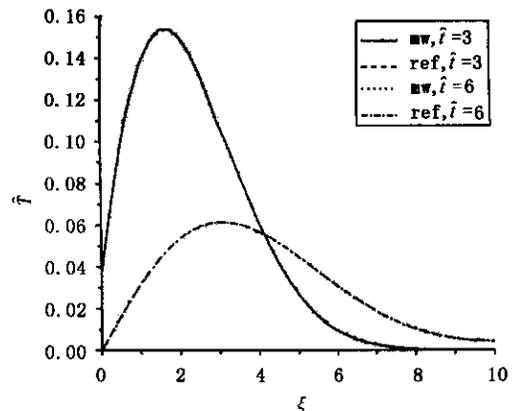


图 3 不考虑热耦合时温度分布

Fig. 3 Comparison of the dimensionless temperature at the middle of the plate

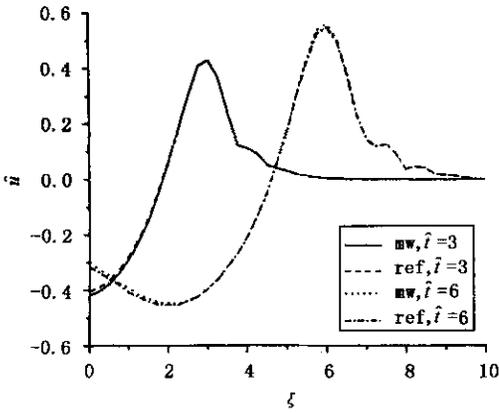


图4 不考虑热耦合时变形位移分布

Fig.4 Comparison of the dimensionless axial displacement at the middle of the plate

为了分别考察热耦合和板运动对温度场和位移场的影响,我们分三种情况讨论:

1) 无运动条件下热耦合分析

在这种情况下,  $\hat{R} = 0, C = 0.1$ . 图5和图6分别是无量纲温度场和位移场的分布情况. 由图5可见  $\hat{t} = 3$  时, 温度的峰值较大, 峰值点位于  $\xi = 1.4$ . 当  $\hat{t}$  增大到  $\hat{t} = 6$  时, 此时自由端的温度已经降为0, 温度曲线相对平缓, 峰值减小, 峰值点向前移动到  $\xi = 2.8$ , 从而体现了热传导效应. 由图6可见, 由于弹性波的传播, 变形位移曲线的峰值点也随着  $\hat{t}$  增大向前移动, 变形位移在固定端  $\xi = 10$  处为零. 此外可以发现, 当  $\hat{t} = 3$  时, 温度的峰值点位于  $\xi = 1.4$ , 由于位于  $\xi < 2.8$  的节点的温度较高, 热膨胀效应使位于  $\xi = 2.8$  的节点的变形位移为正, 当  $\hat{t}$  增大到  $\hat{t} = 6$  时, 温度的峰值点到达  $\xi = 2.8$ , 由于位于  $\xi > 2.8$  的节点的温度升高, 热膨胀效应使位于  $\xi = 2.8$  的节点的变形位移为负.

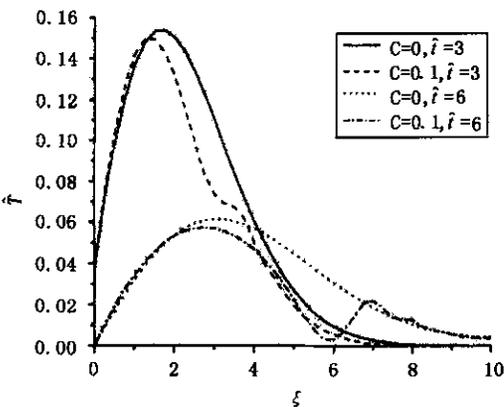


图5 热耦合效应对温度分布的影响

Fig.5 Comparison of the dimensionless temperature at the middle of the plate

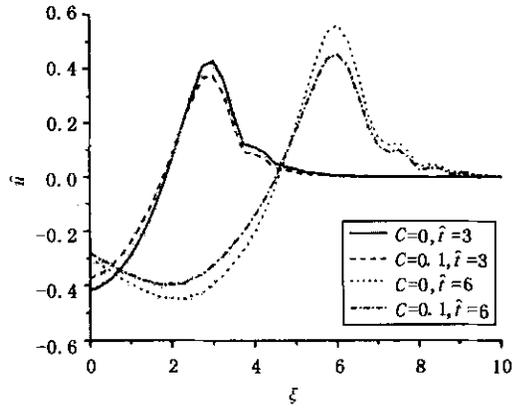


图6 热耦合效应对变形位移分布的影响

Fig.6 Comparison of the dimensionless axial displacement at the middle of the plate

比较  $C = 0.1$  和  $C = 0$  的温度和变形位移结果发现, 无论是  $\hat{t} = 3$  还是  $\hat{t} = 6$ , 耦合曲线的峰值都低于不耦合的曲线. 由于一部分热能转化为变形能, 因此, 在考虑温度和变形耦合的情况下 ( $C = 0.1$ ), 实际的温度值较  $C = 0$  时小, 此外, 变形对温度的影响引起温度曲线的波动, 变形越大, 波动越明显. 图6表明, 变形也受到温度的影响, 在考虑温度和变形耦合的情况下, 由于温度变化比较平缓, 变形位移曲线也趋于平缓, 且峰值较小.

2) 无热耦合条件下板运动的影响

取  $\hat{R} = M = 96.53, \hat{\omega} = 2, C = 0$ , 图7是考虑和不考虑板运动时板中线的无量纲温度沿  $\xi$  分布的比较, 图中可见, 板运动对温度场的分布没有产生影响, 这是因为在不考虑热耦合的情况下, 板运动所引起的变形不会对温度场产生影响. 图8是考虑和不考虑板运动时板中线的无量纲变形位移沿  $\xi$  分布的比较, 由图可见, 板运动对位移场的影响是明显的, 因为与板运动平动加速度有关的惯性力引起了变形位移场的波动, 而在固支端由于受到挤压, 效果尤为明显.

3) 板运动和热耦合的影响

取  $\hat{R} = M = 96.53, \hat{\omega} = 2, C = 0.1$ , 图9和图10是考虑和不考虑板运动时板中线的无量纲温度和变形位移沿  $\xi$  分布的比较. 由图中可见, 由于考虑了温度和变形的耦合, 板运动不仅影响变形位移的分布, 也影响了温度的分布. 比较图7和图9, 图8和图10可以发现, 热耦合效应对变形的影响较小, 而对温度的影响比较明显, 当  $\hat{t} = 3$  时, 板运动对温度的影响主要体现在固支端附近, 这与板运动

对变形的影响主要集中在固支端附近相一致,此外,可以由图 9 可以看出,随着  $\hat{t}$  增大到  $\hat{t} = 6$ , 板运动对温度的影响逐渐向自由端扩展。

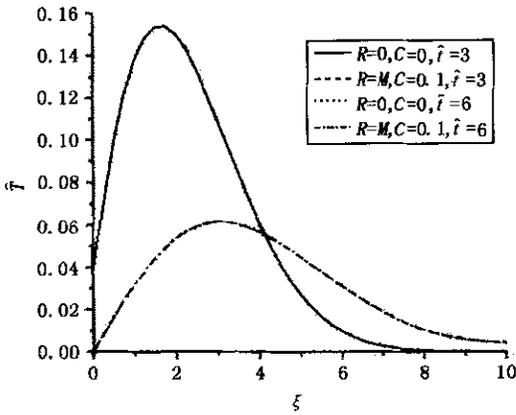


图 7 平均加速度对温度分布的影响 ( $C = 0$ )

Fig. 7 Comparison of the dimensionless temperature at the middle of the plate ( $C = 0$ )

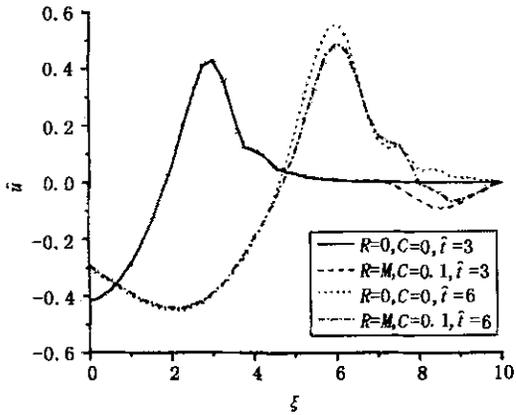


图 8 平均加速度对变形位移分布的影响 ( $C = 0$ )

Fig. 8 Comparison of the dimensionless axial displacement at the middle of the plate ( $C = 0$ )

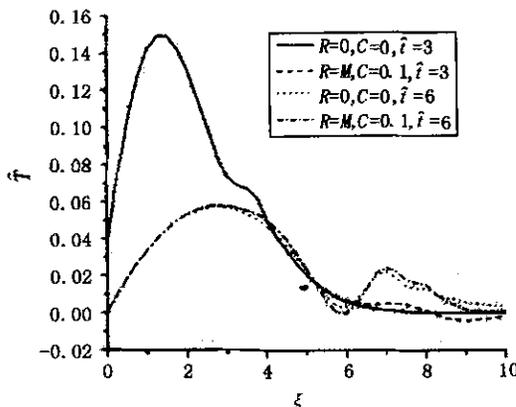


图 9 平均加速度对温度分布的影响 ( $C = 0.1$ )

Fig. 9 Comparison of the dimensionless temperature at the middle of the plate ( $C = 0.1$ )

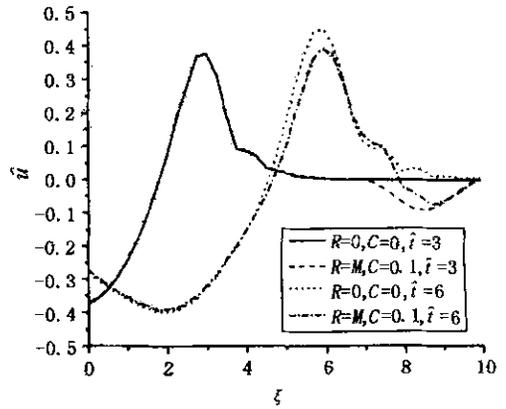


图 10 平均加速度对变形位移分布的影响 ( $C = 0.1$ )

Fig. 10 Comparison of the dimensionless axial displacement at the middle of the plate ( $C = 0.1$ )

图 11 和图 12 所示,比较  $\xi = 3$  处在  $\hat{t} = 0 \sim 10$  时间历程中,分别考虑耦合项和板运动以及同时考虑两者影响时,板中线的无量纲温度和变形位移的分布。由图可见,耦合项对温度分布的影响在  $\hat{t} = 3 \sim 6$  表现得最明显,这是因为这段时间受温度变化影响明显,而由于远离固支端而受板运动的影响较小,与之前对  $\hat{t} = 3$  和  $\hat{t} = 6$  的分析相符合。板运动对温度的影响则在  $\hat{t} = 6 \sim 10$  表现得比较明显,而对变形位移的影响则在整个过程有体现,影响的程度和形式取决于板运动的强度和形式。

#### 4) 应力分析

图 13 和图 14 是  $\hat{t} = 3$  和  $\hat{t} = 6$  时分别考虑耦合项和板运动以及同时考虑两者影响时板中线的无量纲应力沿  $\xi$  分布的比较。由图中可见,由于耦合项和运动影响变形位移的分布,因此也影响了应

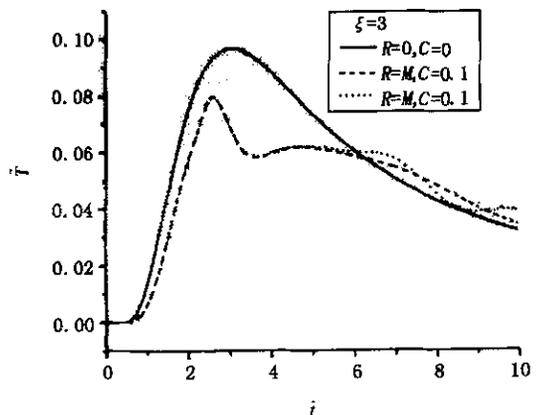


图 11  $\hat{t} = 0 \sim 10$  耦合项和板运动对温度分布的影响 ( $\xi = 3$ )

Fig. 11 Comparison of the dimensionless temperature at  $\hat{t} = 0 \sim 10$  ( $\xi = 3$ )

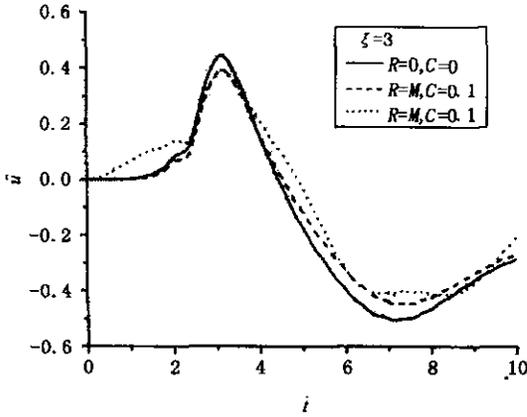


图 12  $\hat{t} = 0 \sim 10$  耦合项和板运动对变形位移分布的影响 ( $\xi = 3$ )

Fig. 12 Comparison of the dimensionless axial displacement at  $\hat{t} = 0 \sim 10$  ( $\xi = 3$ )

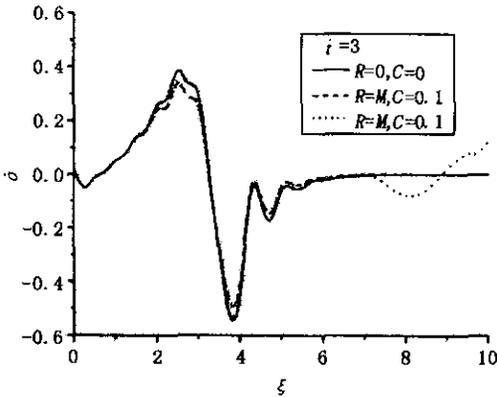


图 13 耦合项和板运动对温度分布的影响 ( $\hat{t} = 3$ )

Fig. 13 Comparison of the dimensionless axial stress at the middle of the plate ( $\hat{t} = 3$ )

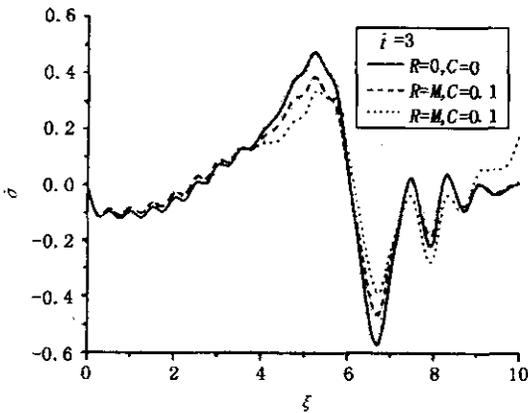


图 14 耦合项和板运动对变形位移分布的影响 ( $\hat{t} = 6$ )

Fig. 14 Comparison of the dimensionless stress at the middle of the plate ( $\hat{t} = 6$ )

应的偏小. 由图可见, 板运动对应力的影响同对位移的影响相一致, 在图 13 中, 在固支端处, 板的运动对应力的干扰比较明显, 而在图 14 中, 随着  $\hat{t}$  增大到  $\hat{t} = 6$  板运动对应力的影响逐渐向自由端扩展. 由于弹性波的作用, 以及未考虑阻尼, 应力曲线呈现了一定的微幅振动.

### 4 结论

本文提出了作平面运动的二维平板在动态热载荷作用下求解响应的有限元方法, 在建模过程中考虑了弹性变形和温度的耦合, 计算了三种情况下的平动二维平板的温度场和变形位移场和应力场, 得到了以下结论:

(1) 在不考虑温度和变形位移耦合的情况下, 板运动的影响仅限于变形位移, 对温度不产生任何影响.

(2) 在考虑温度和变形位移耦合的情况下, 温度曲线变化比较平缓, 峰值较小, 符合部分热能转化为变形能的实际情况. 此外, 变形对温度的影响表现为温度的明显波动.

(3) 在考虑温度和变形位移耦合的情况下, 板运动不仅对变形位移, 也对温度产生影响, 引起温度曲线的波动.

(4) 由于耦合项和板运动影响变形的分布, 因此也影响了应力的分布. 考虑耦合项的应力分布曲线的峰值偏小, 在固支端处, 板运动对应力的干扰比较明显.

### 参 考 文 献

- 1 孔祥谦. 热应力有限单元法分析. 上海: 上海交通大学出版社, 1999 (Kong Xiangqian. Finite element method analysis of Thermal Stress. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1999 (in Chinese))
- 2 王勳成. 有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2003 (Wang Xucheng. Finite element method. Beijing: Tsinghua University Press, 2003 (in Chinese))
- 3 吴恒安, 梁海弋, 王秀喜. 结构热动力响应分析有限元方法. 航空动力学报, 2000, 15(3), 325~327 (Wu Hengan, Liang Haiyi, Wang Xiuxi. A Finite Element Method for Thermal Transient Response of Structure. *Journal of Aerospace Power*, 2000, 15(3) 325~327 (in Chinese))
- 4 钱伟长. 变分法及有限元(上册). 北京: 科学出版社,

力的分布. 由于耦合项的影响使得位移变形的峰值变小, 因此考虑耦合项的应力分布曲线的峰值也相

- 1980, 542~563 (Chien WZ. Calculus of Variations and Finite Elements. Vol. I. Beijing : Science Press, 1980 (in Chinese))
- 5 Hosseini-Tehrani P, Eslami MR. BEM analysis of thermal and mechanical shock in a two-dimensional finite domain considering coupled thermoelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, 24: 249~257
- 6 Oguamanam DCD, Hansen JS, Heppler GR. Nonlinear Transient Response of Thermally Loaded Laminated Panels. *Journal of Applied Mechanics*, 2004, 71: 49~56
- 7 洪嘉振, 计算多体系统动力学. 北京 : 高等教育出版社, 1999 (Hong Jiazhen. Computational Dynamics of Multi-body Systems. Beijing : Higher Education Press, 1999 (in Chinese))

## COUPLED THERMOELASTIC DYNAMICS OF A TWO-DIMENSIONAL PLATE UNDERGOING PLANAR MOTION\*

Li Zhiyong Liu Jinyang Hong Jiazhen

(Department of engineering mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

**Abstract** Temperature field and dynamic performance of a two-dimensional plate with planar motion is investigated. Considering the coupling influence of the temperature and elastic deformation, the entropy density is calculated, and the thermal conductive variational equations are derived. Furthermore, considering the thermal strain, dynamic variational equations of the plate are obtained in the status of planar stress. Finite element method is employed for discretization of temperature and deformation fields in the plate. Finally, the temperature and deformation fields are calculated. Coupling characteristics of the heat, deformation and motion of the plate is revealed, and significant effect of the motion on the temperature and deformation fields is shown.

**Key words** coupled thermoelastic dynamics, two-dimensional plate, planar motion