

具有奇异位置的多体系统动力学方程的改进算法*

许永生 齐朝晖

(大连理工大学工程力学系,大连 116024)

摘要 多体系统进行数值仿真时,很多选择了微分-代数混合方程作为多体系统动力学数学模型.本文在现有的约束稳定化理论基础上,提出了针对具有奇异位置的多体系统动力学方程的改进算法.算法通过修正速度违约和控制稳定项,讨论了具有奇异位置的微分-代数混合方程的数值仿真问题并给出了稳定项中相关系数的建议值,从而有效克服了求解混合方程时因为构型奇异给计算造成的困难.算例分别采用改进算法与 ADAMS 软件进行仿真,计算结果的比较表明了改进算法的有效性.本文给出的基于能量守恒的能量差曲线也证明了改进算法的有效性.

关键词 奇异,多体系统动力学,微分-代数混合方程

引言

微分-代数混合方程作为多体系统动力学数学模型^[1,2],其一般形式可简写为

$$M(q, t)\ddot{q} + \Phi_q^T(q, t)\lambda = \zeta \quad (1)$$

$$\Phi(q, t) = 0 \quad (2)$$

其中 $M(q, t) \in R^{n \times n}$ 为系统广义质量阵, $q \in R^{n \times 1}$ 为系统广义位移列阵, m 个系统独立约束方程构成 $\Phi(q, t) = 0$, $\Phi(q, t) \in R^{m \times n}$ 为系统雅可比矩阵, $\lambda \in R^{m \times 1}$ 为拉格朗日乘子列阵, $\zeta \in R^{n \times 1}$ 为系统广义力列阵.式(2)对应的速度约束方程和加速度约束方程分别为

$$\dot{\Phi}(q, \dot{q}, t) = \Phi_q(q, t)\dot{q} + \Phi_t(q, t) = 0 \quad (3)$$

$$\ddot{\Phi}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = \Phi_q(q, t)\ddot{q} - \eta(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (4)$$

其中 $\eta(q, \dot{q}, t) = -(\Phi_{q\dot{q}})_q \dot{q} - 2\Phi_{q\dot{q}}\dot{q} - \Phi_{tt}$. 式(1)为第一类拉格朗日方程,和式(4)构成封闭的微分-代数混合方程组.

一些多体系统,常常由于系统本身的几何构型在运动中出现奇异位置,系统自由度发生突变,对应系统出现分叉点.利用微分-代数混合方程对其进行动力学仿真时,系统在经过奇异位置时由于约束方程(2)的雅可比 $\Phi_q = \partial\Phi/\partial q$ 的秩 $rank(\Phi_q) < m$ 给计算造成很大困难,仿真结果与实际情况

出现较大偏差,甚至为严重的失真^[3].J. Baumgarte 提出约束稳定化理论^[1,2,4-7],认为 $\dot{\Phi} = 0$ 是不稳定的,积分过程中位移约束方程 $\Phi(q, t) = \delta$ 和速度约束方程 $\Phi(q, \dot{q}, t) = \varepsilon$ 出现的违约无法消除,造成数值解 $\Phi = 0$ 发散. J. Baumgarte 在加速度 $\ddot{\Phi} = 0$ 约束方程中引入稳定项 $2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi$ 将式(4)重新定义为

$$\ddot{\Phi}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + 2c_1\dot{\Phi}(q, \dot{q}, t) + c_2^2\Phi(q, t) = 0 \quad (5)$$

即

$$\Phi_q(q, t)\ddot{q} - \eta(q, \dot{q}, t) + 2c_1\dot{\Phi}(q, \dot{q}, t) + c_2^2\Phi(q, t) = 0 \quad (6)$$

其中 c_1, c_2 为常数,满足 $c_1 > 0$,并建议 $c_2 = c_1$. 稳定项的引入使式(5)逐渐稳定,一定程度上控制了数值解的发散,适用于违约较小的多体系统.将此理论应用于带有奇异位置的多体系统,发现

1) c_1, c_2 取值很难设定,受到多体系统和积分时间 t 的影响,对于不同多体系统,文献[2,6]中建议值 5 ~ 50 不可取.

2) c_1, c_2 取值太小,一些约束方程得不到很好的控制,系统仿真很容易在较短的积分时间 t 内就失真. t 较长时,因为违约累积增大, c_1, c_2 的取值应相应增大.

3) c_1, c_2 取值过大,在一定积分时间 t 内,因为

2005-11-02 收到第1稿,2006-03-09 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10472017)

加速度约束方程(5)违约严重,积分很慢仿真消耗时间很长.

鉴于上述问题,本文在约束稳定化理论的基础上通过修正速度违约和控制稳定项 $2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi$, 讨论了具有奇异位置的微分-代数混合方程的数值计算问题并给出了相关系数的建议值.在速度高精度满足速度约束方程的条件下,算法对系统的动力学仿真结果与 ADAMS 计算结果进行比较.另外,通过输入能量与系统获得能量之间的比较,验证算法的有效性.

1 速度违约修正公式的推导

具有奇异位置的多体系统在判断雅可比 Φ_q 的秩以便剔除失去约束效应的约束方程 $\Phi_j, j = 1, 2, \dots$ 时,因为计算机精度问题 Φ_j 在还没有到达奇异位置已经被剔除,此时系统对 Φ_q 特别敏感造成 \ddot{q} 发生突变.在利用预估-校正法求解时, \ddot{q} 的突变使 \dot{q}, q 相应发生突变,造成后续仿真失真.试想,如果发生突变前,首先对速度 \dot{q} 进行修正,在 \dot{q} 高精度地满足了 $\dot{\Phi}(q, \dot{q}, t) = 0$ 的条件下计算 \ddot{q} .这样即使 \ddot{q} 在接近奇异位置时发生突变,下一个计算步也会因为 \dot{q} 要满足 $\dot{\Phi}(q, \dot{q}, t) = 0$ 而得到调整.速度违约修正的推导过程如下:

首先,在一典型时刻 $t = t_i$,由预估-校正得到的广义位移和广义速度分别为 q^*, \dot{q}^* .给定速度允许误差为 err_{vc} .将 \dot{q}^* 代入速度约束方程(3),假设其范数

$$\|\Phi_q \dot{q}^* - \Phi_t\|_{+\infty} > err_{vc} \quad (7)$$

则需对 \dot{q}^* 进行修正.令

$$\Delta \dot{q} = \Phi_q^T \mu + T^T \mu' \quad (8)$$

其中 Φ_q, T 我们可分别称为广义速度场的切向阵和法向阵,它们满足 $\Phi_q T^T = 0$,修正后广义速度可以写为

$$\dot{q} = \dot{q}^* + \Delta \dot{q} \quad (9)$$

将式(9)代入式(3),得到

$$\Phi_q \dot{q}^* + \Phi_t = -\Phi_q \Delta \dot{q} \quad (10)$$

把式(8)代入式(10),得到

$$\Phi_q \dot{q}^* + \Phi_t = -\Phi_q \Phi_q^T \mu \quad (11)$$

从式(11)可以看出式(8)等号右端项 $T^T \mu'$ 被消去,只有 $\Phi_q^T \mu$ 项对广义速度起修正作用.所以我们在计算 $\Delta \dot{q}$ 时,可以认为

$$\Delta \dot{q} = \Phi_q^T \mu \quad (12)$$

综合式(11)和式(12),得到

$$\Delta \dot{q} = -\Phi_q^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} (\Phi_q \dot{q}^* + \Phi_t) \quad (13)$$

此时得到修正后的广义速度

$$\dot{q} = \dot{q}^* - \Phi_q^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} (\Phi_q \dot{q}^* + \Phi_t) \quad (14)$$

将 \dot{q} 赋于 \dot{q}^* ,重新判断式(7)是否成立.显然,对速度违约的修正需要一个迭代过程.对于 $t = t_i$ 时刻,这个迭代过程可描述如下:

(1)由预估-校正法得到此时刻的广义位移 q^* 和广义速度 \dot{q}^* .

(2)将 \dot{q}^* 代入式(7)并判别是否成立.如果成立,即认为 \dot{q}^* 就是理论广义速度,计算对应加速度,然后进入下一步长的求解;否则,按照式(13)和(14)分别计算 $\Delta \dot{q}$ 和修正后广义速度 \dot{q} ,并转到(3).

(3)把 \dot{q} 赋给 \dot{q}^* ,重新转回到(2).

2 稳定项的控制

约束稳定化理论没有直接考虑位移和速度的违约问题,式(5)中引入稳定项 $2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi$ 破坏了系统本应满足的加速度约束方程(4).带有奇异位置的多体系统在接近奇异点时, \ddot{q} 变得对违约很敏感,很小的违约量可能引起加速度很大的变化,约束稳定化理论的相关文献并没有对雅可比 Φ_q 奇异和 \ddot{q} 在奇异点处对违约的敏感性进行分析.可以考虑引入控制系数 k 适当控制稳定项,减小违约对加速度 \ddot{q} 的影响.将式(5)重新改写为

$$\ddot{\Phi}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + k[2c_1\dot{\Phi}(q, \dot{q}, t) + c_2^2\Phi(q, t)] = 0 \quad (15)$$

或

$$\Phi_q(q, t)\ddot{q} - \eta(q, \dot{q}, t) + k[2c_1\dot{\Phi}(q, \dot{q}, t) + c_2^2\Phi(q, t)] = 0 \quad (16)$$

综合式(1)和式(16),得到改进算法对应的带有奇异位置的多体系统动力学方程

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta - k(2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi) \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中,控制系数 k 调节违约对加速度的影响,因此可以在位移、速度违约决定的稳定项 $2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi$ 与加速度违约 $\ddot{\Phi}$ 之间寻找一种关系来定义 k 的取值.本文从两者各自范数 $\|\cdot\|_{+\infty}$ 的比例关系给出了 k 值,即

$$k = \begin{cases} \frac{c \|\ddot{\Phi}\|_{+\infty}}{\|2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi\|_{+\infty}}, \\ \text{当 } \frac{\|2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi\|_{+\infty}}{\|\ddot{\Phi}\|_{+\infty}} > c, \\ c \text{ 为人为设定值} \\ 1, \text{当 } \frac{\|2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi\|_{+\infty}}{\|\ddot{\Phi}\|_{+\infty}} < c \end{cases} \quad (18)$$

式(18)中,关系式 $\|2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi\|_{+\infty}/\|\ddot{\Phi}\|_{+\infty}$ 反映了稳定项对加速度违约的贡献程度,为让式(17)与约束稳定化理论统一起来,人为设定常数 c 来判断 k 值.注意到 $\|2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi\|_{+\infty}/\|\ddot{\Phi}\|_{+\infty}$ 不太可能过大,赋予 c 过大的值意味着式(17)趋于约束稳定化理论的数学模型, c 可初选取值在 $10^{-4} \sim 10^4$ 之间.

改进算法直接对速度 \dot{q} 进行了修正,速度约束方程(3)和约束方程(2)的违约程度已经很小,符合了约束稳定化理论只适用于违约较小的条件,使 c_1, c_2 的值可以适当放宽.而取值过大造成仿真效率低,他们可取在 $3 \sim 50$.

3 数值算例

下面通过约束稳定化理论和改进算法对同一算例仿真结果的比较,表明改进算法可以较好地解决带有奇异位置的多体系统的数值求解问题.

算例的几何描述如图 1 所示,多体系统由 1、2、3 杆组成,可在铅锤平面内运动.1 杆受到 $\Psi = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ 的力矩,初始时系统静止 $\theta_1 = 60^\circ, \theta_2 = 120^\circ, \theta_3 = 120^\circ$,系统的参数如表 1.

表 1 平面四杆机构参数

Table 1 The parameter of the four-link planar system

body	Mass/kg	length/m	Moment of inertia/kg·m ²
1	12.0	2.0	4.0
2	24.0	4.0	32.0
3	12.0	2.0	4.0

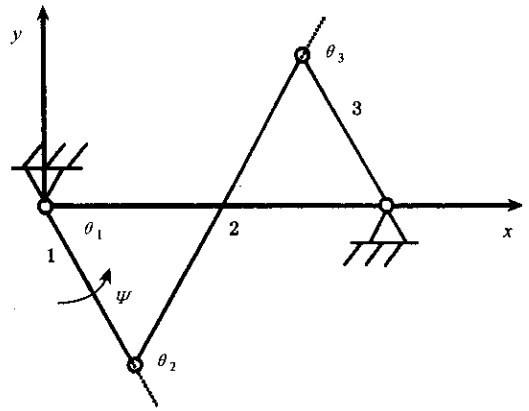


图 1 平面四杆机构

Fig. 1 A four-link planar mechanism

根据图 1 列系统速度约束方程,得到

$$\begin{bmatrix} \sin\theta_2 & -\sin\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

从理论上分析,当 1 杆处于水平位置时,三根杆重合,这时 $\theta_1 = k\pi, \theta_2 = 0, k = 0, 1, 2, \dots$,式(19)中雅可比矩阵的秩 $\text{rank}(\Phi_q) = 1$,显然 Φ_q 奇异,即算例为具有奇异位置的多体系统.本文以 ADAMS 仿真结果作为参考,利用上述两种方法对算例进行数值仿真.其中,首先选择约束稳定化常数 $[c_1 = c_2 = 50]$,改进算法常数 $[c = 10^2, c_1 = c_2 = 20]$,考察算例在 $0 \sim 3 \text{ s}$ 内 1 杆质心在 y 向的位置,仿真结果的比较见图 2.从图中可以看到,约束稳定化数值解在 3 s 时已经失真,改进算法的解很好地吻合了 ADAMS 仿真结果.失真的原因是系统在接近奇异位置时某些约束方程被认为失效,造成加速度突变(如图 3),以致下一计算步的位移和速度严重违约超出约束稳定化的解决范围.

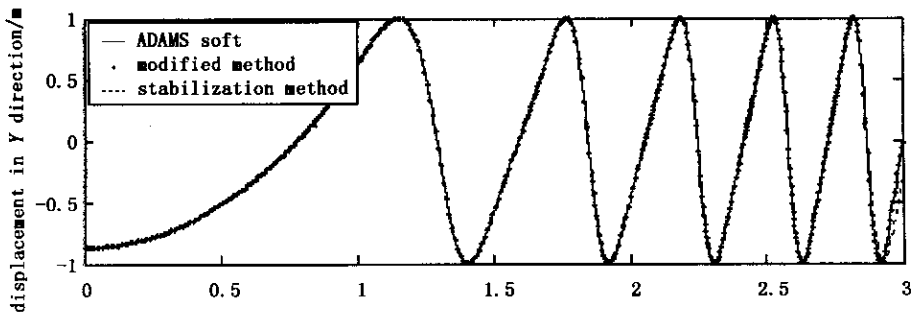


图 2 约束稳定化理论、改进算法和 ADAMS 软件仿真结果比较

Fig. 2 Comparison of constraint violation stabilization method, modified method and ADAMS soft

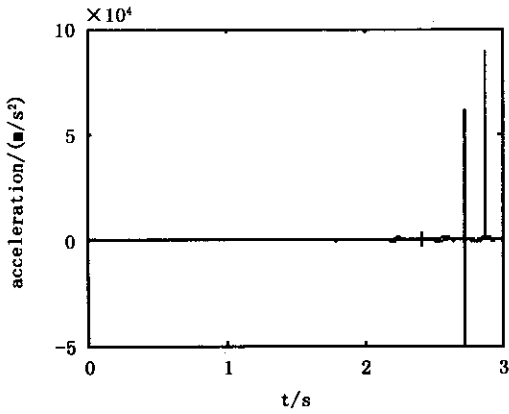


图3 利用约束稳定化求得的1杆质心加速度

Fig.3 The acceleration of the mass center of the 1th link obtained by constraint violation stabilization method

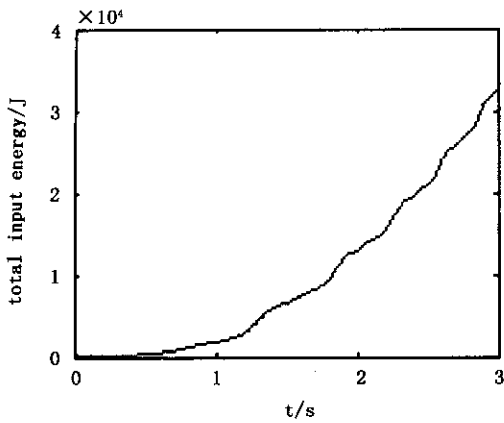


图4 输入的能量

Fig.4 The input energy

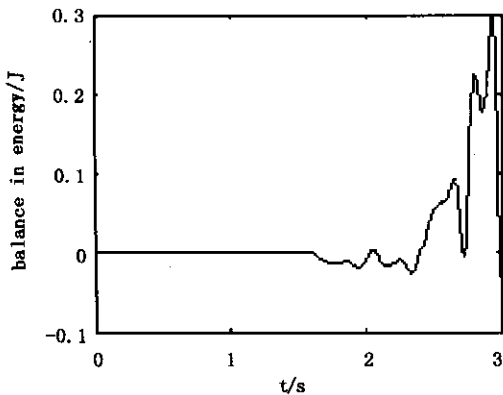


图5 输入能量与获得能量之间的能量差

Fig.5 The balance between the input energy and the system energy obtained

另外,也可以从能量守恒的角度来验证改进算法的有效性.对于算例所描述的多体系统,在任意时间段内,外力给系统的能量应等于系统获得的能量.图4为在广义力 Ψ 作用下输入能量曲线,图5

给出了输入能量与利用改进算法求得的系统获得能量之间的能量差曲线.从两曲线可以看出,在同一时刻能量差相对外力功很小,这说明改进算法获得的数值解是可以接受的.

为进一步说明改进算法在求解具有奇异位置的多体系统动力学方程时优于约束稳定化理论,我们选择不同的常数 c, c_1, c_2 数值,利用两种方法对上述算例进行仿真.为便于比较,本文只列出了1杆质心在3s时刻的y向位置和0~3s系统仿真消耗时间,及ADAMS仿真结果,数据见表2.

表2 约束稳定化、改进算法与ADAMS软件的计算数据
Table 2 Numerical results of constraint violation stabilization method, modified method and ADAMS soft

method	c	$c_1 = c_2$	elapsed time/s	displacement in y direction/m
constraint violation stabilization method		20	79.7540	-0.800926
		30	101.4550	0.0950776
		40	122.0460	-0.540981
		50	107.3750	-0.319504
		100	104.6100	-0.0265222
ADAMS		200	107.4850	-0.0264932
		400	122.9460	-0.0264944
				-0.0264866
modified method	10^{-2}	3	38.2750	-0.0264678
	10^2	3	35.2710	-0.0264678
	10^{-1}	5	33.1680	-0.0264678
	10^{-4}	8	32.3770	-0.026468
	10^{-2}	10	28.6220	-0.0264678
	10^{-3}	20	28.9020	-0.0264679
	10^2	20	28.3210	-0.0264834
	10	30	29.0820	-0.0264679
	10^{-4}	40	28.4410	-0.0264848
	10^{-2}	40	28.9210	-0.026485
10^4	40	30.1340	-0.0264687	
10^{-2}	50	31.1250	-0.026468	
10^3	50	31.9260	-0.0264986	

从表2中的数据可以看出,在较小的 c_1, c_2 取值下约束稳定化理论计算的1杆质心位置与好的ADAMS仿真结果相比已经发散,虽然在较大的取值100、200、400下能得到较好的结果,但完成仿真所消耗的时间很长.多种 c, c_1, c_2 取值下,改进算法得到的数据与ADAMS结果相差很小,且仿真所需要的时间很短.

4 结论

本文在现有的约束稳定化理论基础上修正速度违约和控制稳定项 $2c_1\dot{\Phi} + c_2^2\Phi$,提出了针对带

有奇异位置的多体系统的改进算法,给出了相关系数的建议值.算例表明改进算法能够消除奇异构型给计算造成的困难,验证了算法的有效性.

参 考 文 献

- 1 潘振宽,赵维加,洪嘉振等.多体系统动力学微分/代数方程组数值方法.力学进展,1996,26(11):28~39(Pan Zhenkuan,Zhao Weijia,Hong Jiazhen etc. On numerical algorithms for differential/algebraic equations of motion of multibody systems. *Advances in Mechanics*,1996,26(11):28~39(in Chinese))
- 2 洪嘉振.计算多体系统动力学.北京:高等教育出版社,1999(Hong Jiazhen. *Computational Dynamics of Multibody systems*. Beijing:Higher Education Press,1999(in Chinese))
- 3 王琪,黄克累,陆启韶.具有奇异位置的多体系统动力学方程的隐式算法.计算力学学报,1997,14(4):383~387(Wang Qi,Huang Kelei,Lu Qishao. Implicit numerical algorithm for dynamical equations of the multibody systems with singularity position. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,1997,14(4):383~387(in Chinese))
- 4 Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,1972,1:1~16
- 5 Baumgarte J. A new method of stabilization for holonomic constraints. *Journal of Applied Mechanics*,1983,50:869~870
- 6 Parviz E. Nikravesh. Some methods for dynamic analysis of constrained mechanical systems:A survey. In:Edward J.Haug ed. *Computer aided Analysis and Optimization of Mechanical system Dynamics*. Berlin:Springer-verlag,1984,351~368
- 7 洪嘉振,刘延柱.离散系统计算力学现状.力学进展,1989,19(2):205~210(Hong Jiazhen,Liu Yanzhu. The state of the arts of computational dynamics of discrete systems. *Advances in Mechanics*,1989,19(2):205~210(in Chinese))

A MODIFIED NUMERICAL METHOD FOR DYNAMICAL EQUATIONS OF THE MULTIBODY SYSTEMS WITH SINGULARITY POSITION*

Xu Yongsheng Qi Zhaohui

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract The differential-algebraic equations are often chosen as the mathematical models of the dynamics of multibody systems in order to achieve the numerical emulation for the multibody systems. Based on the existing constraint violation stabilization method, a modified numerical method for the equations with singularity positions is proposed in the present paper. By correcting the violation of the velocity and controlling the stability term in the modified method, the differential-algebraic equations with singularity positions are solved, and the values of the coefficients in the stability term are suggested. Thus, the numerical difficulty, due to the singularity of the multibody systems is effectively eliminated. The contrast between the numerical results of the example using the modified method and the ADAMS soft demonstrates the effectiveness of the proposed modified method. The balance based on the law of conservation of energy also proves the effectiveness of the method.

Key words singularity, dynamics of multibody systems, differential-algebraic equations