第4卷第2期
2006年6月

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.4 No.2
Jun. 2006

Fokker-Planck 方程的非古典势对称群及新显式解*

秦茂昌[1,2] 梅凤翔[2]

(1.重庆工商大学理学院,重庆 400067)(2.北京理工大学理学院,北京 100081)

摘要 本文利用一种新方法对 Fokker-Planck 方程的非古典势对称群生成元进行研究,找到方程的几个非古典势对称群生成元,并采用非古典对称群方法由这些对称群生成元构造得到 Fokker-Planck 方程的相应显式解. 这些新显式解不能由 Fokker-Planck 方程本身的 Lie 对称或 Lie-Bäcklund 对称来获得. 在验证所求得显式解的过程中,还发现并得到了另外几个显式解. 这些新显式解则不能由 Fokker-Planck 方程本身的 Lie 对称, Lie-Bäcklund 对称或非古典势对称来获得. 文章表明,通过偏微分方程的非古典势对称群生成元来寻找其显式解是可能的.

关键词 非古典势对称群,显式解, Fokker-Planck 方程

引言

求取偏微分方程的显式解在物理力学系统问题研究中占有很重要的地位. 经典 Lie 对称群方法在微分方程的约化及群不变解的求得方面取着重要应用[1~4]. 1969 年, Bluman 和 Cole[5] 在 Lie 群基础上提出了古典势对称群方法. 该方法适用于守恒型发展方程(即可以表示成为散度表达式的偏微分方程), 该类型偏微分方程可引入一些新的变量将其转化等价方程组后在附加一些约束条件的情况下求出方程组的对称群. 然后用方程组的对称群来求得原方程的显式解. 势对称群方法被成功的用于许多守恒型偏微分方程的约化及相似解研究[6~8]. Bluman 等人认为利用偏微分方程的古典势对称群能够找到方程的新显式解,但是很长一段时间内未能实现这以目的. 近来,Johnpillai 和 Kara 在古典势对称群的基础上进一步提出了非古典势对称群的概念,并对波方程、KdV 方程的非古典势对称进行了研究[8],但由于他们采用的方法计算难度大且并未得到新的显式解及有创意结果,所以这类对称并未引起大家的兴趣.

最近,我们对 Burgers 方程的非古典势对称群及显式解进行了讨论,确实找到了该方程的许多新的对称群生成元并构造得到新的显式解[9]. 为了寻找方程的非古典势对称需要引入中间变量,得到对称后又要抛弃中间变量来求取原方程的显式解. 是否可以在求非古典势对称群时就进行必要的限制以达到既可降低求对称的难度又可得到所需要的结果呢. 本文将据此对 Fokker-Planck 方程的非古典势对称群及显式解进行探讨. Fokker-Planck 方程主要用于描述微粒或质点的位置与速度概率密度函数的演化规律. 首先利用 Fokker-Planck 方程可以对流体中微粒的布郎运动给出很好的统计描述. 关于 Fokker-Planck 方程的解极其应用已经有了丰富的成果,文献[10]对矩阵连分数法、仿真方法、本征函数展开法、数值积分法以及变分法等各种求解方法进行了详细的介绍,同时对利用这些方法得到的 Fokker-Planck 方程的解的应用做了说明 利用 Lie 对称群方法来研究 Fokker-Planck 方程的解也有较为丰富的成果[11-13]. 据我们所知利用非古典势对称群方法来构造 Fokker-Planck 方程的解的研究成果并不多见. 接下来,我们将对 Fokker-Planck 方程的非古典势对称群及其相应的解进行探讨.

1 非古典势对称群与解析解

在本文中,将对 Fokker-Planck 方程

$$u_t = u + xu_x + u_{xx} \tag{1}$$

的非古典势对称群及相应的显式解进行研究. 引入另一变量 v,由方程(1) 可以得到其等价方程组

2005-11-12 收到第1稿,2006-01-15 收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目(10272021,10572021) 高等学校博士学科点专项科研基金(20040007022)

$$v_x = u, v_t = u_x + xu \tag{2}$$

由(2)可进一步得到 Fokker-Planck 方程(1)的伴随积分方程

$$v_t - xv_x - v_{xx} = 0 \tag{3}$$

根据经典的 Lie 对称群理论,设方程组(2)的对称群无限小生成元

$$v = \tau(t,x,v,u)\partial t + \xi(t,x,v,u)\partial x + \phi(t,x,v,u)\partial u + \eta(t,x,v,u)\partial v \tag{4}$$

式中 ∂ 表示偏导数算子.由(4)式和(2)式,可得到(2)的对称群确定方程为

$$\begin{aligned}&\eta_x + u_x\eta_u + v_x\eta_v - v_t(\tau_x + u_x\tau_u + v_x\tau_v) - \\ &\quad v_x(\xi_x + u_x\xi_u + v_x\xi_v) = \phi \\ &\eta_t + u_t\eta_u + v_t\eta_v - v_t(\tau_t + u_t\tau_u + v_t\tau_v) - \\ &\quad v_x(\xi_t + u_t\xi_u + v_t\xi_v) = \phi_x + u_x\phi_u + \\ &\quad v_x\phi_v - u_t(\tau_x + u_x\tau_u + v_x\tau_v) - \\ &\quad u_x(\xi_x + u_x\xi_u + v_x\xi_v) + u\xi + x\phi\end{aligned} \tag{5}$$

为求得非古典势对称群而附加的约束条件是

$$u_t\tau + u_x\xi = \phi, v_t\tau + v_x\xi = \eta \tag{6}$$

具体求解过程是:利用(2)从方程组(6)中解出变量 u_t 和 u_x,将其表达式代入对称群确定方程(5)中求出所有可能的系数函数 τ,ξ,ϕ 和 η(要求前三个函数中至少由一个显含量 v)得到非古势对称群,然后利用非势对称群寻找方程(1)的不变解.由于得到非古典势对称群后并非直接从方程组(2)求出 u,而是利用非古典势对称群的投影先从伴随积分方程(3)中求得 v 再求 u.变量 u 及函数 ϕ 的存在给求解系统的非古典势对称群带来很大困难,而其本身对方程的约化及不变解的构造没有太大的作用.因而我们将对称群生成元做适当改变,即假设对称群生成元系数函数 τ,ξ 和 η 与变量 u 无关、函数 ϕ 则不作任何限制.这样做可以极大地降低求解难度及减少计算量.

由于当函数 $\tau = 0$ 时,得到的对称群生成元都是平凡的,所以不妨令系数函数 $\tau \neq 0$,此时联立系统(2)和(6)可以得到

$$\begin{aligned}u_x &= -xu + \frac{1}{\tau}(\eta - u\xi) \\ u_t &= \frac{\phi}{\tau} - \frac{\xi}{\tau}\left[-xu + \frac{1}{\tau}(\eta - u\xi)\right]\end{aligned} \tag{7}$$

将(7)代入方程组(5)的第一个方程求出系数函数 ϕ,在将它们一并代入第二个方程得到关于函数 u 的多项式,令其各项系数为零则得到

$$\begin{cases}A_v - \dfrac{\tau_v}{\tau}A = 0 \\ A_x - \dfrac{A}{\tau}\tau_x + B_v - \dfrac{\tau_v}{\tau}B - 2A\left(\dfrac{\xi}{\tau} + x\right) = 0 \\ \dfrac{\xi}{\tau}\left(\eta_v - \dfrac{\eta}{\tau}\tau_v\right) + \xi_t - \dfrac{\xi}{\tau}\tau_t + B_x - \dfrac{B}{\tau}\tau_x + \\ \quad C_v - \dfrac{\tau_v}{\tau}C + \dfrac{2\eta}{\tau}A - \dfrac{\xi}{\tau}B + \\ \quad \xi + \left(\dfrac{\xi}{\tau} + x\right)(\xi_x - \tau_x) = 0 \\ \eta_t - \dfrac{\eta}{\tau}\tau_t + \dfrac{\eta}{\tau}\left(\eta_v - \dfrac{\eta}{\tau}\tau_v\right) + \dfrac{C}{\tau}\tau_x - \\ \quad C_x - \dfrac{\eta}{\tau}B + \dfrac{\eta}{\tau}\left(\xi_x - \dfrac{\xi}{\tau}\tau_x\right) - xC = 0\end{cases} \tag{8}$$

上式中 $C = \eta_x - \dfrac{\eta}{\tau}\tau_x$、$B = \eta_x - \xi_v + \dfrac{\xi}{\tau}\tau_x - \dfrac{\eta}{\tau}\tau_v$ 和 $A = \dfrac{\xi}{\tau}\tau_v - \xi_v$ 是以 x,t 及 v 为自变量的函数.现在我们需要从方程组(8)中找到尽可能多的对称群生成元系数函数 τ,ξ 和 η.首先由(8)式的前两个方程可以推出

$$\frac{\xi}{\tau} = \alpha(x,t), \frac{\eta}{\tau} = k(x,t)v + l(x,t) \tag{9}$$

将关系式(9)代入方程(8)的后两个方程可以得到

$$\begin{cases}k_t - k_{xx} + 2k\alpha_x - xk_x = 0 \\ l_t - l_{xx} + 2l\alpha_x - xl_x = 0 \\ \alpha_t + 2k_x - \alpha_{xx} + 2\alpha\alpha_x + x\alpha_x + \\ \quad \alpha + (\alpha + x)(\alpha - 1)\dfrac{\tau_x}{\tau} = 0\end{cases} \tag{10}$$

由方程组(10)求出待定函数 $\alpha(x,t),k(x,t)$ 及 $l(x,t)$ 后,将利用特征方程

$$\frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{\mathrm{d}x}{\alpha(x,t)} = \frac{\mathrm{d}v}{vk(x,t) + l(x,t)} \tag{11}$$

来求 Fokker-Planck 方程(1)的显式解.综合(9)、(10)和(11)三式,当对称群生成元系数函数 τ 与变量 x 无关时,其改变不会导致求得相应的 Fokker-Planck 方程的解发生变化.当对称群生成元系数函数 τ 与变量 x 有关时,其改变会导致求得相应的 Fokker-Planck 方程的解也随之变化.在确定对称群生成元系数函数 $\alpha(x,t),k(x,t)$ 及 $l(x,t)$ 的同时,还需要考虑方程(11)的可解性.鉴于上述原因,当系数函数 τ 与变量 x 无关时,为减少计算量、降低求解的难度,不妨令 $\tau = 1$,且进一步假设待定函数 σ 仅与 t 有关.可以求得对称群生

成元系数函数 $\xi = k_1\exp(-t) - k_2\exp(t) + k_3$、$\eta = k_2xv\exp(t) + k_4\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + k_5$. 由该组解得到的对称群无限小生成元不是 Fokker-Planck 方程本身的 Lie 对称. 由该对称群生成元我们能够得到 Fokker-Planck 方程的新的显式解. 下面将根据对称群无限小生成元中常数 k_1, k_2, k_3, k_4 和 k_5 的取值情况分别进行讨论：

首先，选取对称群无限小生成元系数函数 $\tau = 1, \xi = \exp(-t) - \exp(t), \eta = xv\exp(t)$，其相应非古典势对称群无限小生成元

$$v_1 = \partial t + (\exp(-t) - \exp t)\partial x + (v + xu)\exp t\partial u + xv\exp t\partial v \tag{12}$$

由生成元(12) 可以得到特征方程

$$\frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{\mathrm{d}x}{\exp(-t) - \exp(t)} = \frac{\mathrm{d}v}{xv\exp t} \tag{13}$$

对方程(13) 积分可求得

$$\begin{cases}\zeta = x + \exp(-t) + \exp t \\ x\exp t + \exp(2t)/2 + 1 - t + f(\zeta) = \ln v\end{cases} \tag{14}$$

其中待定函数 $f(\zeta)$ 满足常微分方程

$$f'' + f'^2 + \zeta_1 f' + 1 = 0 \tag{15}$$

解方程(15) 中求出函数

$$f(\zeta) = -\frac{\zeta^2}{2} + \ln\left(\frac{i}{2}\left(c_1 + c_2\mathrm{erf}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\zeta\right)\right)\right) + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln\pi}{2}$$

并将其代入方程(14) 中可得出

$$v(x,t) = \exp\left(x\exp t + \frac{\exp(2t)}{2} + 1 - t + f(\zeta)\right) \tag{16}$$

将(16) 式对 x 求导一次偏导数，可以得到 Fokker-Planck 方程(1) 的下列新显式解

$$-\frac{i}{2}\left\{[x + \exp(-t)]\sqrt{\pi}\left(c_1 + c_2\mathrm{erf}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(x + \exp(-t) + \exp t)\right)\right) - \sqrt{2}ic_2 \times \exp\left(\frac{(x + \exp(-t) + \exp t)^2}{2}\right)\right\} \times \sqrt{2}\exp\left(-t - \frac{x^2}{2} - x\exp(-t) - \frac{\exp(-2t)}{2}\right) \tag{17}$$

经验证，(17) 确实是 Fokker-Planck 的一个解. 在验证(17) 是否满足方程(1) 的过程中，发现并得到了如下新解

$$-\frac{i}{2}\left\{[x - \exp(-t)]\sqrt{\pi}\left(c_1 + c_2\mathrm{erf}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(x - \exp(-t) + \exp t)\right)\right) - \sqrt{2}ic_2 \times \exp\left(\frac{(x - \exp(-t) + \exp t)^2}{2}\right)\right\} \times \sqrt{2}\exp\left(2 - t - \frac{x^2}{2} + x\exp(-t) - \frac{\exp(-2t)}{2}\right) \tag{18}$$

在此需说明的是，解(17) 式是由非古典势对称群生成元(12) 求出的显式解，而解(18) 则不能由非古典势对称群生成元(12) 直接得出.

其次，选取对称群生成元无限小系数函数 $\tau = 1, \xi = \exp(-t) - \exp(t), \eta = xv\exp(t)$，其相应非古典势对称群无限小生成元

$$v_2 = \partial + (\exp(-t) - \exp t)\partial x + (v + xu)\exp t\partial u + xv\exp t\partial v \tag{19}$$

由生成元(19) 可以得到特征方程

$$\frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{\mathrm{d}x}{-\exp(-t) - \exp(t)} = \frac{\mathrm{d}v}{xv\exp t} \tag{20}$$

对方程(20) 积分可求得

$$\begin{cases}\zeta_1 = x - \exp(-t) + \exp t \\ x\exp t + \exp(2t)/2 - 1 + t + f(\zeta_1) = \ln v\end{cases} \tag{21}$$

其中待定函数 $f(\zeta_1)$ 满足常微分方程

$$f'' + f'^2 + \zeta_1 f' - 1 = 0 \tag{22}$$

由方程(22) 可以得到待定函数

$$f(\zeta_1) = \ln\left(c_2 - \frac{\zeta_1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{\zeta_1^2}{\sqrt{2}}\right)c_1 + \frac{\zeta_1}{\sqrt{2}} \times \exp\left(\frac{\zeta_1^2}{\sqrt{2}}\right)c_2\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\zeta_1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \frac{\zeta_1^2}{\sqrt{2}}$$

将其代入方程(21) 中可得

$$v(x,t) = \exp\left(x\exp t + \frac{\exp(2t)}{2} - 1 + t + f(\zeta)\right) \tag{23}$$

将(23) 式对 x 求一次偏导数可以得到 Fokker-Planck 方程(1) 的下列新显式解

$$\frac{1}{2}\left\{\left[x\exp\left(\frac{(x - \exp(-t) + \exp t)^2}{2} + t\right) + \exp\left(\frac{(x - \exp(-t) + \exp t)^2}{2} + 2t\right)\right] \times\right.$$

$$\sqrt{2}\left[\sqrt{\pi}c_2\mathrm{exf}\left(\frac{x-\exp(-t)+\exp t}{\sqrt{2}}\right)-c_1\right]+$$
$$\left.2c_2\exp t\right\}\exp\left(t-\frac{x^2}{2}+x\exp(-t)-\right.$$
$$\left.\frac{\exp(-2t)}{2}\right) \tag{24}$$

经验证,(24) 确实是 Fokker-Planck 的一个解. 在验证(24) 是否满足方程(1) 的过程中,发现并得到如下新解

$$\frac{1}{2}\left\{\left[x\exp\left(\frac{(x+\exp(-t)+\exp t)^2}{2}+t\right)+\right.\right.$$
$$\exp\left(\frac{(x+\exp(-t)+\exp t)^2}{2}+2t\right)+$$
$$\left.2\exp\left(\frac{(x+\exp(-t)+\exp t)^2}{2}\right)\right]\times$$
$$\sqrt{2}\left[\sqrt{\pi}c_2\exp\left(\frac{x-\exp(-t)+\exp t}{\sqrt{2}}\right)-c_1\right]+$$
$$\left.2c_2\exp t\right\}\exp\left(-2+t-\frac{x^2}{2}-\right.$$
$$\left.x\exp(-t)-\frac{\exp(-2t)}{2}\right) \tag{25}$$

同样需说明的是,解(24) 式是由非古典势对称群生成元(19) 求出的显式解,而解(25) 则不能由非古典势对称群生成元(19) 直接得出.

另外,选取对称群无限小生成元系数函数 $\tau=1$,$\xi=\exp(-t)+\exp(t)$,$\eta=-xv\exp(t)$,其相应非古典势对称群无限小生成元

$$v_3=\partial t+(\exp(-t)+\exp t)\partial x-(v+$$
$$xu)\exp t\partial u-xv\exp t\partial v \tag{26}$$

由生成元(26) 可以得到如下特征方程

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}x}{\exp(-t)+\exp(t)}=\frac{\mathrm{d}v}{-xv\exp t} \tag{27}$$

对(27) 进行积分可求得

$$\begin{cases}\zeta_3=x+\exp(-t)-\exp t\\ -x\exp t+\exp(2t)/2-1+t+f(\zeta_3)=\ln v\end{cases} \tag{28}$$

其中待定函数 $f(\zeta_3)$ 满足常微分方程(22),仅仅是自变量由 ζ_1 变为 ζ_3,利用前面得结果,将

$$f(\zeta_3)=\ln\left(c_2-\frac{\zeta_3}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{\zeta_3^2}{\sqrt{2}}\right)c_1+\frac{\zeta_3}{\sqrt{2}}\times\right.$$
$$\left.\exp\left(\frac{\zeta_3^2}{\sqrt{2}}\right)c_2\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\zeta_3}{\sqrt{2}}\right)\right)-\frac{\zeta_3^2}{\sqrt{2}}$$

代入方程(28) 中,可得

$$v(x,t)=\exp\left(-x\exp t+\frac{\exp(2t)}{2}-\right.$$
$$\left.1+t+f(\zeta_3)\right) \tag{29}$$

将(29) 式对 x 求导一次可以得到 Fokker-Planck 方程(1) 的新显式解

$$-\frac{1}{2}\left\{\left[x\exp\left(\frac{(x+\exp(-t)-\exp t)^2}{2}-t\right)-\right.\right.$$
$$\left.\exp\left(\frac{(x+\exp(-t)-\exp t)^2}{2}+2t\right)\right]\times$$
$$\sqrt{2}\left[\sqrt{\pi}c_2\mathrm{erf}\left(\frac{x+\exp(-t)-\exp t}{\sqrt{2}}\right)-c_1\right]+$$
$$\left.2c_2\exp t\right\}\exp\left(t-\frac{x^2}{2}-x\exp(-t)-\right.$$
$$\left.\frac{\exp(-2t)}{2}\right) \tag{30}$$

经验证,(30) 确实是 Fokker-Planck 的一个解. 在验证(30) 是否满足方程(1) 的过程中,发现得到如下新解

$$-\frac{1}{2}\left\{\left[x\exp\left(\frac{(x-\exp(-t)-\exp t)^2}{2}+t\right)-\right.\right.$$
$$\exp\left(\frac{(x-\exp(-t)-\exp t)^2}{2}+2t\right)-$$
$$\left.2\exp\left(\frac{(x-\exp(-t)-\exp t)^2}{2}\right)\right]\times$$
$$\sqrt{2}\left[\sqrt{\pi}c_2\mathrm{erf}\left(\frac{x-\exp(-t)-\exp t}{\sqrt{2}}\right)-c_1\right]+$$
$$\left.2c_2\exp t\right\}\exp\left(-2+t-\frac{x^2}{2}+\right.$$
$$\left.x\exp(-t)-\frac{\exp(-2t)}{2}\right) \tag{31}$$

同样需说明的是,解(30) 式是由非古典势对称群生成元(26) 求出的显式解,而解(31) 式则不能由非古典势对称群生成元(26) 直接得出.

最后,选取对称群无限小生成元系数函数 $\tau=1$,$\xi=-\exp(-t)+\exp(t)$,$\eta=-xv\exp(t)$,其相应对称群无限小生成元

$$v_4=\partial t+(-\exp(-t)+\exp t)\partial x-(v+$$
$$xu)\exp t\partial u-xv\exp t\partial v \tag{32}$$

由生成元(32) 可以得到特征方程

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}x}{-\exp(-t)+\exp(t)}=\frac{\mathrm{d}v}{-xv\exp t} \tag{33}$$

对方程(33) 积分可求得

$$\begin{cases}\zeta_4=x-\exp(-t)-\exp t\\ -x\exp t+\exp(2t)/2+1-t+f(\zeta_4)=\ln v\end{cases} \tag{34}$$

其中待定函数满足常微分方程(15)，仅仅是自变量由变为，利用前面得结果，将函数 $f(\zeta_4) = -\frac{\zeta_4^2}{2} + \ln\left(\frac{i}{2}\left(c_1 + c_2\mathrm{erf}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\zeta_4\right)\right)\right) + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln\pi}{2}$ 代入方程(34) 中可得

$$v(x,t) = \exp\left(-x\exp t + \frac{\exp(2t)}{2} + 1 - t + f(\zeta_4)\right) \tag{35}$$

将(35) 式对 x 求导一次可以得到 Fokker-Planck 方程(1) 的下列新显式解

$$-\frac{i}{2}\left\{[x - \exp(-t)]\sqrt{\pi}\left(c_1 + c_2\mathrm{erf}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(x - \exp(-t) - \exp t)\right)\right) - \sqrt{2}ic_2 \times \exp\left(\frac{(x - \exp(-t) - \exp t)^2}{2}\right)\right\} \times \sqrt{2}\exp\left(-t - \frac{x^2}{2} + x\exp(-t) - \frac{\exp(-2t)}{2}\right) \tag{36}$$

经验证，(36) 确实是 Fokker-Planck 的一个解. 在验证(36) 是否满足方程(1) 的过程中，发现得到如下新解

$$-\frac{i}{2}\left\{[x + \exp(-t)]\sqrt{\pi}\left(c_1 + c_2\mathrm{erf}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}(x + \exp(-t) - \exp t)\right)\right) - \sqrt{2}ic_2 \times \exp\left(\frac{(x + \exp(-t) - \exp t)^2}{2}\right)\right\} \times \sqrt{2}\exp\left(2 - t - \frac{x^2}{2} - x\exp(-t) - \frac{\exp(-2t)}{2}\right) \tag{37}$$

同样，解(36) 式是由非古典势对称群生成元(32) 求出的显式解，而解(37) 式则不能由非古典势对称群生成元(32) 直接得出.

以上的讨论仅仅限于对称群无限小生成元系数函数中的常数 k_3，k_4 为零的情况，当它们不同时为零时还未能构造出相应的显示解. 其次，当对称群生成元 $\tau = 1$，待定函数 σ 仅与 x 或者与 x，t 都有关时，目前未能找到方程的非古典势对称群生成元.

2　结论及展望

本文对 Fokker-Planck 方程的非古典势对称群进行了研究，并用之求得 Fokker-Planck 方程的几类新显式解. 这几类显式解不能由 Fokker-Planck 方程(1) 本身的点对称或 Lie 对称群求得，在验证利用非古典势对称群构造出的解的过程中发现并得到了另外几个显式解. 本文表明通过偏微分方程的非古典对称群来寻找研究其新显式解是可能的，也是有待于进一步研究的课题.

参　考　文　献

1　Bluman GW, and Kumei S. Symmetries and Differential Equations. New York：Springer-Verlag, 1989

2　Ibragimov NH, et al. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics. New York：Springer-Verlag, 1985

3　Olver PJ. Applications of Lie Groups to Differential Equations. New York：Springer-Verlag, 1996

4　Ovsiannikov LV. Group Analysis of Differential Equation. New York：Academic Press, 1982

5　Bluman GW, and Cole JD. The general simi1arity solutions of heat equation. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1969, 18：1025～1042

6　Bluman GW, Kumei S and Reid G J. New classes of symmetries for partial differential equations. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1988, 29：806～811

7　Gandarias ML. Nonclassical potential symmetries of Burgers equation. *Journal of nonlinear Mathematical Physics*, 1997, 1：130～137

8　Johnpillai AG and Kara A H. Nonclassical potential symmetry generators of differential equations. *Nonlinear Dynamics*, 2002, 30：167～177

9　Qin MC, Mei FX, Xu XJ. Nonclassical potential symmetries and new explicit solutions of the Burgers equation. *Zeitschrift Naturforschung A*, 2005, 60：17～22

10　Risken H. The Fokker-Planck Equation Methods of Solutions and Applications. New York：Springer-Verlag, 1996

11　Elhanbaly A. Classification of the Similarity Solutions of the Fokker-Planck Equation in an External Potential, *Physica Scripta Online*, 1999, 59(1)：9～13

12　Cicogna G. and Vitali D. Classification of the extended symmetries of Fokker-Planck equations. *Journal of Physics*

A: mathematical and General, 1990, 23(3): 85-88

13 Stanislaw S. and Stognii V. One dimensional Fokker-Planck Equation in variant under four and six parametrical group an External Potential, *Preceding of Institute Mathematics of NAS of Ukraine*, 2000, 30(1): 204～209

NONCLASSICAL POTENTIAL SYMMETRIES AND NEW EXPLICIT SOLUTIONS OF FOKKER-PLANCK EQUATION *

Qin Maochang[1,2] Mei Fengxiang[2]

(1. *School of Science, Chongqing Technology and Business University, Chongqing* 400067, *China*)

(2. *School of Science, Beijing Institute Technology, Beijing* 100081, *China*)

Abstract Nonclassical potential symmetries of Fokker-Planck equation are determined by using a new method, and some class of new explicit solutions, which can not be obtained through the Lie symmetries or Lie-Bäcklund symmetries of Fokker-Planck equation, are constructed by using nonclassical symmetry method to these new symmetry generators. In the process of verification, more explicit solutions, which can not be derived from the Lie symmetries, Lie-Bäcklund symmetries or Nonclassical potential symmetries of Fokker-Planck equation, are found. It's shown that there is possibility of finding new explicit solutions of partial differential equations through their nonclassical potential symmetries.

Key words nonclassical potential symmetry, explicit solution, Fokker-Planck equation

Received 12 November 2005, revised 15 January 2006.

* The project supported by the National Science Foundation of China (10272021, 10572021) and the Doctoral Program Foundation of Education Ministry of China (20040007022)