

参数 γ 对 H_∞ 控制系统动态特性的影响*

吴志刚 谭述君 钟万勰

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要 鲁棒控制系统的 H_∞ 范数代表了系统的抗干扰性能指标, 本文通过实例研究了 H_∞ 范数 γ 的取值对控制系统动态特性几个方面的影响, 包括对系统初值扰动响应特性、系统干扰抑制效果以及对闭环系统 H_∞ 范数的影响. 由于 H_∞ 范数只是反映控制系统某一方面的性能指标, 当它趋向于最小值时, 系统的其它各项重要的性能指标(例如 H_2 范数和动态响应特性等)往往不一定令人满意. 文中的计算结果表明, H_∞ 范数最优值几乎是系统其它动态性能指标变化的一个转折点, 当设计参数 γ 在其最小值 γ_{opt} 附近变化时, 引起其它性能指标的变化非常剧烈. 这些结果同时表明综合考虑系统的各项性能指标以选取合适的 γ 值尚需进一步的讨论.

关键词 H_∞ 范数, H_2 范数, 鲁棒控制, 动态特性, 性能指标

引言

连续系统状态反馈控制是 H_∞ 鲁棒控制中的基本问题, 控制系统的设计需要求解 Riccati 方程, 确定最优的 H_∞ 诱导范数 γ_{opt} . 这个 H_∞ 范数代表了系统可能达到的最优抗干扰性能指标 [1], 实际的控制系统一般取次优的参数值 $\gamma > \gamma_{opt}$ 进行设计. 参数 γ 的取值对控制系统的性能有多方面的影响, 本文将通过实例介绍这个 H_∞ 范数的取值对控制系统动态特性的影响程度.

文献 [2, 3] 基于结构力学与最优控制的模拟理论系统地研究了 H_∞ 控制的理论与计算问题, 给出了计算最优 H_∞ 诱导范数 γ_{opt} 和求解 H_∞ -Riccati 方程的精细算法. 本文的计算工作就是利用这些数值方法完成的.

首先简单介绍 H_∞ 控制以及 H_∞ 范数、 H_2 范数等概念 [1]. 考虑下述线性连续系统

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

$$z = \begin{bmatrix} Cx \\ Du \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 x 为 n 维状态向量, w 为 l 维外扰向量, u 为 m 维控制向量, z 为 p 维输出向量, $p \geq m$, 矩阵 A , B_1 , B_2 , C 和 D 有恰当的维数, $D^T D = I$, I 为单位阵, 而且矩阵对 (A, B_2) 和 (A, C) 分别是可控和可

观的. 状态反馈控制系统设计的目标是寻找线性反馈控制

$$u = Kx \quad (3)$$

使闭环系统从外扰 w 到输出 z 的传递函数矩阵 G_{zw} 的 H_∞ 范数满足

$$\|G_{zw}\|_{[0, t_f]} < \gamma \quad (4)$$

满足上述条件的最小 γ 值或者其下界称为系统的最优 H_∞ 范数, 并记为 γ_{opt} . 通过引入拉格朗日乘子 λ , 由变分原理

$$\delta \left\{ \int_0^{t_f} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda)] dt - \frac{1}{2} x_f^T S_f x_f \right\} = 0 \quad (5)$$

其中

$$H(x, \lambda) = \lambda^T Ax + \frac{1}{2} x^T C^T Cx - \frac{1}{2} \lambda^T (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) \lambda \quad (6)$$

可以导出对偶方程 (7a, b)

$$\dot{\lambda} = Ax - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) \lambda \quad (7a)$$

$$\dot{\lambda} = -C^T Cx - A^T \lambda \quad (7b)$$

边界条件为 $x(0) = x_0$, $\lambda_f = S_f x(t_f) = S_f x_f$. 由上述两端边值问题可以导出 Riccati 微分方程

$$-\dot{S} = A^T S + SA + C^T C - S(B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T) S \quad S(t_f) = S_f \quad (8)$$

而 u 和 w 可分别表示为

$$u = -B_2^T Sx \quad (9)$$

$$w = \gamma^{-2} B_1^T Sx \quad (10)$$

当 w 为式(10)的闭环形式时,控制系统的状态方程可以表示为

$$\dot{x} = [A - (B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T)S]x \quad (11)$$

如果 w 是开环形式,则

$$\dot{x} = (A - B_2 B_2^T S)x + B_1 w \quad (12)$$

求解上述具有时变项 S 的线性微分方程就可得到控制系统状态的变化规律.将变分式(5)中的参数 γ^{-2} 分离出来^[3,4],可以表示为如下形式

$$\gamma^{-2} = \min_{\lambda} \max_x \frac{\Pi_1}{\Pi_2} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \int_0^{t_f} (\lambda^T \dot{x} - \lambda^T A x - \frac{1}{2} x^T C^T C x + \\ & \frac{1}{2} \lambda^T B_2 B_2^T \lambda) dt - \frac{1}{2} x_f^T S_f x_f \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \lambda^T B_1 B_1^T \lambda dt \quad (14b)$$

式(13)是两类变量广义 Rayleigh 商本征值的形式,此式建立了 H_∞ 范数与广义 Rayleigh 商本征值的联系.广义 Rayleigh 商最小本征值就是使 Riccati 微分方程正定解存在的临界参数 γ_{opt}^{-2} . 扩展的 Wittrick-Williams 算法^[4]结合 Riccati 方程的精细积分可以计算最优 H_∞ 范数.

本文还涉及到系统的 H_2 范数, H_2 范数一般由频域内系统的传递函数矩阵定义^[5]

$$\|G_{yw}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{G^*(j\omega)G(j\omega)\}d\omega} \quad (15)$$

其中, $G(s)$ 是闭环反馈系统(12)由噪声 $w(t)$ 到评价信号 $y(t)$ 的传递函数矩阵,评价信号 $y(t)$ 为状态向量的线性组合

$$y(t) = C_y x(t) \quad (16)$$

利用 Parseval 等式,系统的 H_2 范数也可以用

时域的脉冲函数矩阵定义为

$$\|G_{yw}\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{g^T(t)g(t)\}dt} \quad (17)$$

定义式(17)明确表示,只有当闭环系统(12)稳定时,该系统的 H_2 范数才有意义.事实上,系统的 H_2 范数可以被解释为在平稳白噪声激励下系统的平均增益^[5].

H_2 范数可用下述表达式计算

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{tr}(B_1^T L_o B_1)} = \sqrt{\text{tr}(C_y^T L_c C_y)} \quad (18)$$

其中, $L_o L_c$ 分别为系统的能观性和能控性 Gramian 矩阵,分别满足下面的 Lyapunov 方程

$$\bar{A}^T L_o + L_o \bar{A} = -C_y^T C_y \quad (19a)$$

$$L_c \bar{A} + \bar{A} L_c = -B_1^T B_1 \quad (19b)$$

其中 $\bar{A} = A - B_2 B_2^T S$ 是闭环系统(12)的系统矩阵.

Lyapunov 方程(19)可采用精细积分法精确求解^[2].系统的 H_∞ 范数和 H_2 范数从不同的角度反映了受控系统的性能,本文将探讨系统 H_∞ 范数的变化对 H_2 范数的影响.

在以往的具体计算中,我们注意到参数 γ 的值在不断变化并接近 γ_{opt} 时,控制系统的某些动态响应特性将会有非常明显的变化.下面将分别介绍受控系统在初始条件扰动和持续干扰下的动态响应特性.

1 参数 γ 对控制系统初始扰动响应的影响

如果受控系统的控制量和干扰都可以利用状态信息,即具有 $u = -B_2^T Sx$ 和 $w = \gamma^{-2} B_1^T Sx$ 这样的闭环形式,则受控系统是由式(11)来描述的.首先介绍这种情况下参数 γ 对系统响应特性的影响.

算例 1 该算例是一个受主动腱控制的三层剪切型建筑结构^[6]将其二阶振动方程转化为一阶的状态方程,相应的系统数据如下

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ -2813.1 & 1683.8 & -379.88 & -0.3928 & 0.0588 & -0.0633 \\ 1683.8 & -3100.6 & 1663.2 & 0.0588 & -0.4689 & 0.0027 \\ -379.88 & 1663.2 & -1262.8 & -0.0633 & 0.0027 & -0.4490 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 51.335 & 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_z = I_6, D_{12} = 1$$

对于无限时间段控制问题, 该系统的最优 H_∞ 范数为 $\gamma_{opt}^{-2} = 58.6059$. 取状态初值 $x(0) = \{0.10 \ 0.20 \ 0.30 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$, 时段 $t \in [0, 2.0]$. 当系统设计参数 γ 分别取不同值时, 状态响应 x_3 以及控制输入的时间历程如图 1 和图 2 所示.

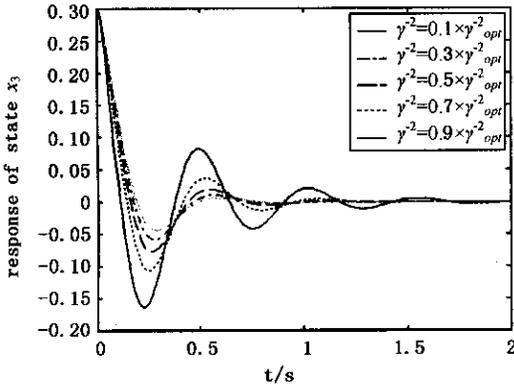


图 1 不同参数 γ 的状态曲线比较

Fig. 1 Comparisons of states with different γ

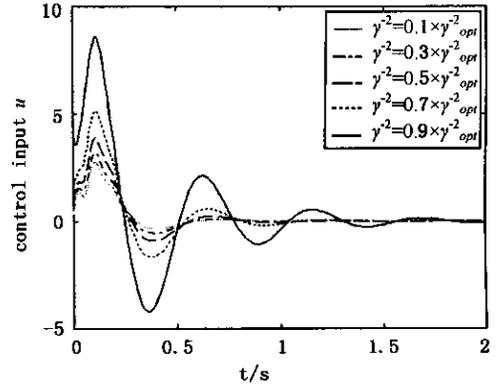


图 2 不同参数 γ 的控制输入比较

Fig. 2 Comparisons of inputs with different γ

算例 2 该算例的数据取自一个单级倒立摆的线性化模型^[7], 系统参数如下:

$$C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = 1$$

该系统无限时间区段控制的最优 H_∞ 范数为 $\gamma_{opt}^{-2} = 0.6292$. 取状态初值 $x(0) = \{0.02 \ 0 \ 0 \ 0\}^T$, 时段 $t \in [0, 11]$. 图 3 和图 4 给出了当系统设计参数 γ 分别取不同值时状态响应 x_1 以及控制输入的时间历程.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.00 & 0 & 0 \\ 20.60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.00 \\ -0.49 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

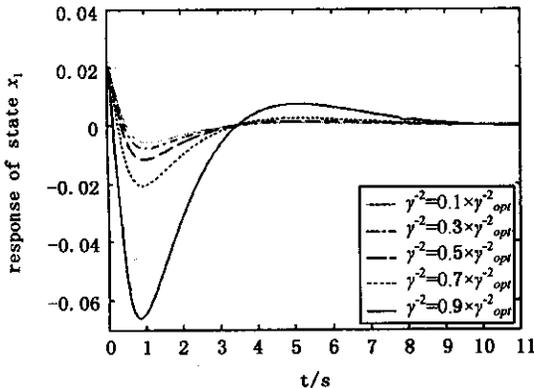


图 3 不同参数 γ 的状态曲线比较

Fig. 3 Comparisons of states with different γ

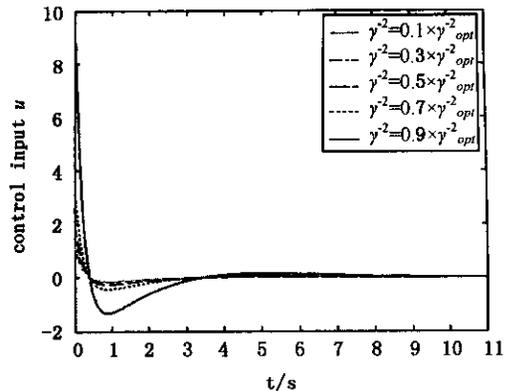


图 4 不同参数 γ 的控制输入比较

Fig. 4 Comparisons of inputs with different γ

上述结果表明,当参数 γ 接近最优值 γ_{opt} 时,闭环形式的外界干扰对系统动态特性的影响非常显著.为了达到预定的控制目标,即给定的干扰抑制指标,需要消耗更多的能量,而此时系统的状态变化也非常剧烈.对上面两个算例的实际计算中,发现其它状态的时程响应曲线与上面的结果相似,限于篇幅不再列出.

2 参数 γ 对控制系统持续干扰抑制效果的影响

如果控制系统的干扰是开环的,则受控系统由

式(12)来描述.这种情况下,取不同的设计参数 γ ,研究零初值状态的受控系统对持续噪声干扰的不同抑制效果.

在算例1中,取EI Centro地震波(1940)作为干扰激励,并将其幅值调整为300 gal.图5和图6分别反映了该系统在不同设计参数 γ 下对干扰的抑制效果和控制输入的变化.

在算例2中,取零均值、标准离差为1的高斯分布的白噪声作为干扰激励,图7和图8分别反映了该系统在不同设计参数 γ 下对干扰的抑制效果和控制输入的变化.

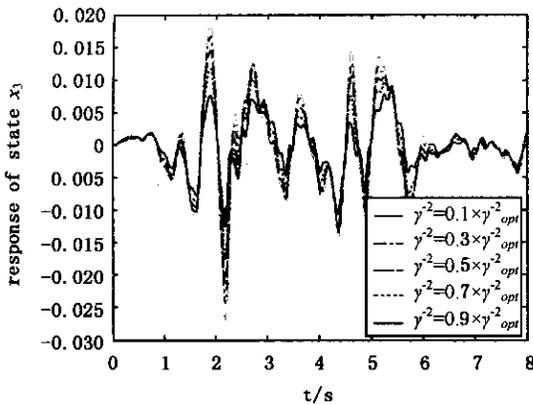


图5 不同参数 γ 的状态曲线比较

Fig.5 Comparisons of states with different γ

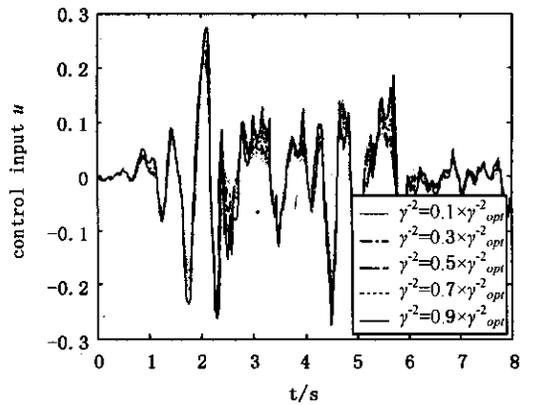


图6 不同参数 γ 的控制输入比较

Fig.6 Comparisons of inputs with different γ

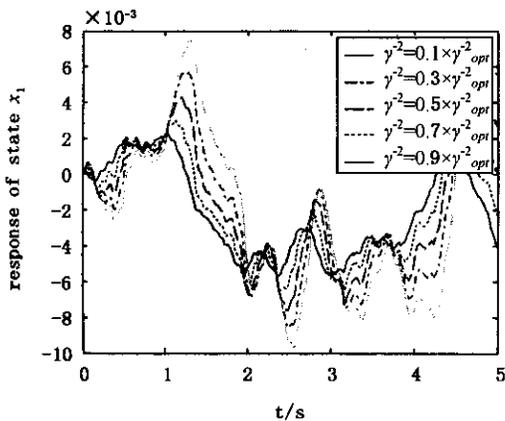


图7 不同参数 γ 的状态曲线比较

Fig.7 Comparisons of states with different γ

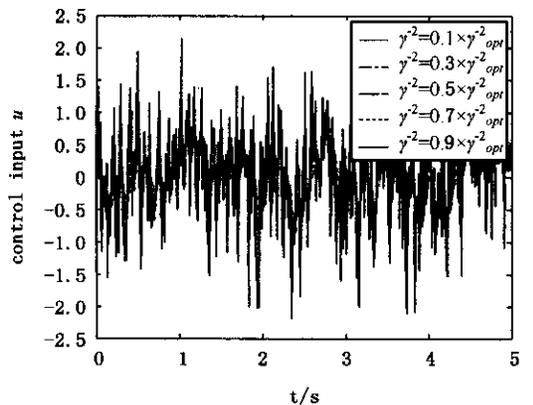


图8 不同参数 γ 的控制输入比较

Fig.8 Comparisons of inputs with different γ

上述两个算例的结果表明,当干扰 w 是开环的,取为真实干扰激励时,设计参数 γ 越接近 H_∞ 范数最优值 γ_{opt} ,干扰抑制效果越好;但与此同时,随着设计参数接近最优值,所需要的控制力却越来越

越大.实际计算中发现,设计参数 γ 是不能取到最优值的,因为这时候Riccati方程的解矩阵的元素趋向于无穷大,且矩阵奇异,这将导致控制输入趋向于无穷大.

3 参数 γ 对系统 H_2 范数的影响

从频域内的定义来看,系统的 H_∞ 范数给出了系统对干扰的可能最坏频率的最大增益,而 H_2 范数则是给出了系统对干扰的所有频率的平均增益,

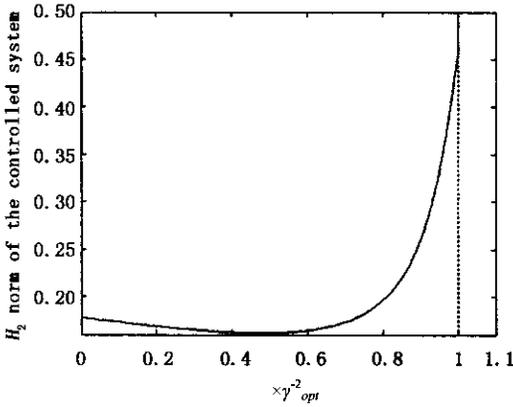


图 9 H_2 范数随 H_∞ 范数变化曲线

Fig.9 Variation of H_2 -norm versus H_∞ -norm

上述结果表明,系统的 H_∞ 范数达到最优值 γ_{opt} 时,其 H_2 范数并不同时达到最优.图 9 显示,算例 1 中的系统在其 H_∞ 范数 $\gamma^{-2} = 0.48 \times \gamma_{opt}^{-2}$ 时达到最优值 0.1618.而图 10 显示,算例 2 中系统的 H_2 范数的最优值几乎和 H_∞ 范数的最优值同时取到,但是,注意到图中的“o”点的坐标是 $(0.99999719227 \times \gamma_{opt}^{-2}, 3.0408)$ 这说明当系统 H_∞ 范数的取到最优值时,相应的 H_2 范数将趋向于无限大.这也说明,在系统的 H_∞ 范数最优值附近其 H_2 范数的变化是很剧烈的.

4 小结

本文通过实例探讨了系统的取值对控制系统动态特性的影响:包括控制系统的初值响应、控制系统的干扰抑制效果以及对 H_2 范数的影响.结果表明,当设计参数 γ 在系统的 H_∞ 范数最优值附近变化时,对控制系统动态特性的影响是很明显的.但是, H_∞ 范数只是反映控制系统性能某一方面的指标,当设计参数趋向于最优时,系统的各项性能并不一定随之趋向最优,初值响应和干扰抑制效果的图例充分说明了这一点.同时表明,系统的 H_2 范数最优值并不在其 H_∞ 范数最优时取得,而且,在 H_∞ 范数最优值附近变化极其剧烈.当参数选择为

二者对系统性能的刻画角度是不一样的^[15].图 9 和图 10 分别反映了算例 1 和算例 2 中受控系统的 H_∞ 范数随着 H_∞ 范数变化的关系,图中的横坐标是比例系数.

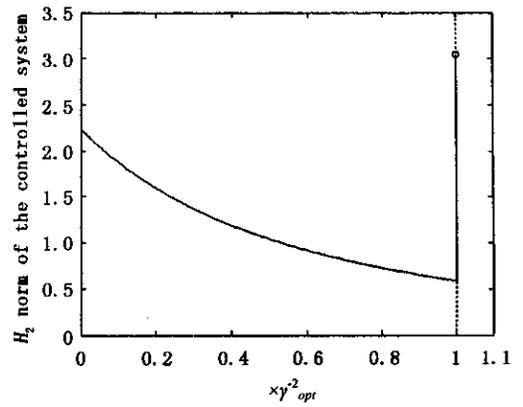


图 10 H_2 范数随 H_∞ 范数变化曲线

Fig.10 Variation of H_2 -norm versus H_∞ -norm

$\gamma = \gamma_{opt}$ 时,响应将无限增大.故说,通常称 γ_{opt} 为最优是片面的,实际上它是一个临界值.应用中 γ 一定不可选用接近于 γ_{opt} 的值,而应选取远小于 γ_{opt} 的值.结构工程对压力杆件允许值的选择,取 Euler 临界值的一个折扣,可供参考.

结果提示,在离开 H_∞ 范数最优值 γ_{opt} 附近的广阔设计空间内(比如说 $0 < \gamma^{-2} < 0.90\gamma_{opt}^{-2}$),设计参数 γ 可通过优化其它性能指标(例如 H_2 范数)来选取.控制变量 u 的限制也是影响 γ 选择的因素之一,应当结合 Bang-Bang 控制作进一步的研究.总之对于 γ 的选择还有许多工作要做.

参 考 文 献

- Green M, Limbeer DJN. Linear Robust Control. New Jersey: Prentice Hall, 1995
- Zhong Wanxie. Duality System in Applied Mechanics and optimal control. Kluwer Academic Publishers 2004
- 钟万勰. 状态反馈与瑞利商精细积分. 计算力学学报, 1999, 16(1): 1~8 (Zhong Wanxie. Control state feedback and Rayleigh quotient precise integration. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1999, 16(1): 1~8 (in Chinese))
- Zhong WX, Williams FW, Bennett PN. Extension of the

- Wittrick-Williams algorithm to mixed variable systems. *Journal of Vibration and Acoustics, Transaction of ASME*, 1997, 119: 334~340
- 5 Jeffrey B. Burl. *Linear Optimal Control: and Methods*. California: Addison-Wesley Longman, 1999
- 6 Chung LL, Wang YP, Tung CC. Instantaneous control of structures with time-delay consideration. *Engineering Structures*, 1997, 19(6): 465~475
- 7 赵文峰. 控制系统设计与仿真. 西安电子科技大学出版社, 2002(Zhao Wenfeng. *Design and Simulation of Control Systems*. Xian: Xidian University Press, 2002(in Chinese))

EFFECTS OF PARAMETER γ ON DYNAMIC CHARACTERISTICS OF H_∞ CONTROL SYSTEMS*

Wu Zhigang Tan Shujun Zhong Wanxie

State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China

Abstract H_∞ -norm γ reflects the disturbance attenuation level of robust control systems. This paper investigates its influences on the performances of the closed-loop control systems, such as H_2 -norm and dynamic characteristics including responses by initial states and disturbance excitations. Since H_∞ -norm represents only one dynamic performance index of control systems, the others may not be optimized when H_∞ -norm does. According to numerical results in the paper, the optimal H_∞ -norm is almost a singular value for the other dynamic characteristics, which would vary sharply when parameter γ varies near to its minimum value γ_{opt} . All the numerical results demonstrate that satisfactory performances of control systems depend on the optimization of multiple parameters simultaneously. And the selection of design parameter γ deserves further studies.

Key words H_∞ -norm, H_2 -norm, Robust control, dynamic characteristics, performance index