第 4 卷第 1 期
2006 年 3 月

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.4 No.1
Mar. 2006

# 具时滞脉冲细胞神经网络的全局指数稳定性*

**张恩彪　江成顺**

（信息工程大学，郑州　450002）

**摘要**　研究了一类新的具有脉冲的时滞细胞神经网络系统模型，引入了一类新的脉冲条件，在不假设激励函数的有界性、单调性和光滑性的条件下，得到了系统平衡点的存在性、唯一性及全局指数稳定性的一些新的充分条件，并得到了指数收敛速率.

**关键词**　全局指数稳定，细胞神经网络，时滞，脉冲

## 引言

细胞神经网络（CNNs）在过去的几十年里得到了广泛深入的研究[1,2]，并被成功地用于信号处理、最优化及求解非线性代数问题等方面[3~5]. 同时，CNNs 的一些基本性质，如稳定性、振荡性及收敛性，也都得到了深入研究. 到目前为止，被人们广泛采用的神经网络模型主要分为以下两类：连续型神经网络和离散型神经网络. 然而，现实生活中的确存在一些神经网络，它们既不属于第一类也不属于第二类. 它们的共同的特点是在某些特定的瞬间会发生突变. 这些系统包括经济学中的优化控制模型，频率协调信号处理系统，飞行体的运动等. 而这些系统突变多是以脉冲的形式出现的[6,7]. 因此有必要研究脉冲神经网络系统.

另一方面，在神经网络的硬件实施中，由于幅值等的转换速度是有限的，因此导致了时间滞后的产生. 时间滞后会导致神经网络系统产生振荡，严重的甚至导致神经网络系统不稳定，而在动态图象处理中却需要引入时滞[8,9]，因此研究具时滞的神经网络具有非常重要的意义，因而促进了时滞型神经网络系统的广泛研究[10~14].

本文引入一种新的神经网络模型——具时滞和脉冲的细胞神经网络模型，在新的脉冲条件下，我们研究其平衡点的存在性、唯一性及全局指数稳定性. 本文主要结构如下：在第 2 节，给出了新的具时变时滞的脉冲细胞神经网络模型及其基本假设条件；在第 3 节，研究了该系统模型平衡点的存在性和唯一性；最后在第 4 节，建立了该系统平衡点全局指数稳定的充分条件.

## 1　系统描述与基本条件

对于脉冲的引入，文献[14]及文献[15]都是通过离散型微分 $Du_i = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\beta_{ik}\delta(t - t_k)$ 形式来实现的，因此每多考虑一项的脉冲需要增加一个该形式的微分，增加了系统的复杂程度，不利于分析. 这里采用与文献[16] 相似的脉冲形式，直接在断点上对各个神经元分量施加脉冲，形式简单且易于分析. 本文考虑如下系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -c_ix_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j(t)) + \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} b_{ij}f_j(x_j(t-\tau_{ij}) + I_i, \\ \qquad t \in [t_{k-1}+, t_k-) \\ x_i(t_k+) = G_k(x_i(t_k-)), k = 1,2,\cdots \end{cases}$$
$$i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,n \qquad (1)$$

其中 $x_i$ 是与第 $i$ 个神经元有关的状态变量，$I = (I_1, I_2, \cdots, I_n)$ 是网络外部的常数输入，$c_i > 0$，$0 < \tau_{ij} < \tau$，$a_{ij}$ 和 $b_{ij}$ 都是常数. 并具有间断点 $t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots \lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$，且各间断点满足 $t_k - t_{k-1} \geqslant \delta\tau, \delta > 1, \tau > 0, k = 1,2,\cdots$. 初始条件为 $x_i(t) = \phi_i(t), t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$，记 $C = diag(c_1, \cdots, c_2)$，$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$，$f(x_i) = (f_1(x_i), \cdots, f_n(x_i))$，$A^+ = (a_{ij}^+)_{n\times n}$，$a_{ii}^+ = \max\{0,$

2005-10-17 收到第 1 稿，2005-11-30 收到修改稿.
* 国家自然科学天元基金（10571024）河南高校杰出科研人才创新工程资助项目（2003KJCX008）

$a_{ii}\}$,$a_{ij}^+ = |a_{ij}|$,$B^+ = (b_{ij}^+)_{n\times n}$,$b_{ii}^+ = \max\{0, b_{ii}\}$,$b_{ij}^+ = |b_{ij}|$.

对于系统(1)的激励函数和脉冲函数,我们有如下假设:

(H1) $|f_j(x) - f_j(y)| < L_j(x-y)|$,$\forall x, y \in R$,$j = 1,2,\cdots,n$,$L = diag(L_1,L_2,\cdots,L_n)$ 为正的常数.

(H2) $G_k(0) = 0$,$k = 1,2,\cdots$,且存在正数 $1 \leqslant m_k \leqslant M$,$\forall x \in R$,$x \neq 0$,有 $0 \leqslant |G_k(x) - G_k(0)| \leqslant m_k |x - 0|$.

## 2　平衡点存在性

**引理 1**　假设(H1)成立,且存在一组 $\xi_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 使得

$$-c_i\xi_i + \sum_{j=1}^{n}\xi_j(a_{ji}^+ + b_{ji}^+)L_j < 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

则对任意 $I \in R^n$,方程

$$-c_i x_i^* + \sum_{j=1}^{n}(a_{ji} + b_{ji})f_j(x_j^*) + I_i \equiv 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{3}$$

有解且唯一.

**证明**　首先由(2)式易知

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{\xi_i c_i}\sum_{j=1}^{n}\xi_j(a_{ji}^+ + b_{ji}^+)L_j\right\} < 1 \tag{4}$$

我们考虑映射 $F: R^n \to R^n$ 定义为

$$F(u) = (F_1(u),F_2(u),\cdots,F_n(u))^{\mathrm{T}}, \quad u = (u_1,u_2,\cdots,u_n) \in R^n \tag{5}$$

其中

$$F_i(u) = \frac{1}{c_i}\sum_{j=1}^{n}(a_{ji} + b_{ji})f_j(u_j) + I_i, \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{6}$$

定义 $R^n$ 上的范数 $\|\cdot\|$ 为

$$\|u\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{\xi}|u_i|\right\} \tag{7}$$

则对于任意两个向量 $u, v \in R^n$,我们有

$$\|F(u) - F(v)\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{\xi}\left|\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}(a_{ji} + b_{ji})(f_j(u_j) - f_j(v_j))\right|\right\} \leqslant$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{\xi_i c_i}\sum_{j=1}^{n}(a_{ji}^+ + b_{ji}^+)L_j|u_j - v_j|\right\} \leqslant$$

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{\xi_i c_i}\sum_{j=1}^{n}\xi_j(a_{ji}^+ + b_{ji}^+)L_j\right\} \times \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{1}{\xi_i}|u_j - v_j|\right\} \leqslant r\|u - v\|$$

这里,$r = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\frac{1}{\xi_i c_i}\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j(a_{ji}^+ + b_{ji}^+)L_j\right\} < 1$.这就说明映射 $F: R^n \to R^n$ 相对于范数 $\|\cdot\|$ 是一个压缩映射.因此由著名的压缩映射原理我们知道,映射 $F$ 存在唯一的不动点 $u^*$,满足

$$u^* = F_i(u^*) = \frac{1}{c_i}\sum_{j=1}^{n}(a_{ji} + b_{ji})f_j(u_j^*) + I_i, j = 1,2,\cdots,n \tag{8}$$

即方程(3)在 $R^n$ 上有唯一解.定理得证.

为了得到系统(1)平衡点的存在性,我们对脉冲函数做如下假设:

(H3) 若常数向量 $x^* = (x_1^*, x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 满足方程(2),则脉冲函数 $G_k(\cdot)$ 连续且有 $G_k(x_i^*) = x_i^*$,$i = 1,2,\cdots,n$,$k = 1,2,\cdots$.

对于系统(1)的平衡点存在性,我们有以下结论:

**定理 1**　假设条件(H1)和(H3)成立,且对于系统(1)还满足(2)式,则对于任意的 $I \in R^n$,系统(1)存在唯一平衡点.

**证明**　因为(2)式成立,由引理 1 知系统在区间 $[t_{k-1}+, t_k-)(k = 1,2,\cdots,n)$ 存在唯一平衡点 $x^*$.而假设(H3)的成立保证了在间断点处 $G_k(x_i^*) = x_i^*$,$i = 1,2,\cdots,n$,$k = 1,2,\cdots$,所以系统存在唯一平衡点 $x^*$ 证毕.

引入 M 矩阵概念:

**定义 1**[19]　称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 M 矩阵,如果 $a_{ij} < 0$,$i \neq j$,且 $A$ 的所有主子式为正.

**引理 2**[19]　设是一个 M 矩阵,且具有非负的下对角元素,则 $A$ 是一个 M 矩阵当且仅当存在正定对角阵 $D$ 使得矩阵 $AD + DA^{\mathrm{T}}$ 正定.

由引理 2 我们可将定理 1 简述为:

**定理 2**　假设(H1)和(H2)成立,且矩阵 $C - (A^+ + B^+)L$ 是一个 M 矩阵,则系统(1)存在唯一平衡点.

## 3　平衡点的指数稳定性

当 $C - (A^+ + B^+)L$ 为 M 矩阵时,由引理 2 知存在 $\xi_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 满足

$$-c_i\xi_i + \sum_{j=1}^{n}\xi_j(a_{ji}^+ + b_{ji}^+)L_j < 0$$

$$(i = 1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

因此存在一常数 $\lambda > 0$,使得下式成立

$$-(c_i - \lambda)\xi_i + \sum_{j=1}^{n}\xi_j(a_{ji}^{+} + e^{\lambda\tau}b_{ji}^{+})L_j < 0$$
$$(i = 1,2,\cdots,n) \tag{10}$$

**定理 3** 假设条件(H1)、(H2) 和(H3) 成立,如果 $C - (A^{+} + B^{+})L$ 是一个 M 矩阵,令 $\gamma = \lambda - \frac{\ln M}{\delta\tau}$ 则对于任意 $I \in R^n$ 我们有:

(A) $\gamma = 0$ 时,系统(1) 平衡点在 Lyapunov 意义下一致稳定;

(B) $\gamma < 0$ 时,系统(1) 平衡点是全局指数稳定的,且指数收敛速率为 $\gamma$.

**证明** 既然 $C - (A^{+} + B^{+})L$ 是一个 M 矩阵,由定理 2 和公式(9) 知道系统(1) 存在唯一平衡点 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$,为了简化我们的证明,将系统(1) 的平衡点变换到原点. 使用以下变换

$$y_i(t) = x_i(t) - x_i^*,$$
$$y_j(t - \tau_{ij}(t)) = x_j(t - \tau_{ij}) - x_j^*$$

系统(1) 可以变换为如下形式

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi_j(y_j(t)) + \\ \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\varphi_j(y_j(t - \tau_{ij}(t))), t \in [t_{k-1}+, t_k-) \\ y_i(t_k+) = G_k(x_i(t_k-) + x_i^*) - G(x_i^*), \\ \quad k = 1,2,\cdots, i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{11}$$

式中 $\varphi_j(y_j(t)) = f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)$ 和 $\varphi_j(0) = 0$. 初始条件为 $\psi_i(s) = \phi_i(t) - x_i^*, t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$. 由条件(H1) 可以知 $|\varphi_j(\xi_j)| < L_j|\xi_j|, \xi_j \in R, j = 1,2,\cdots,n$. 系统(1) 的平衡点稳定性等价于系统(11) 平凡平衡点的稳定性,所以只考虑系统(11). 由变换显然系统(11) 有唯一平凡平衡点 $y = 0$.

构造 Lyapunov 函数

$$V(y)(t) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i|y_i(t)|$$

沿系统(3) 计算右上导数

$$D^+V(y(t)) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\{sign(y_i(t))[-c_i y_i + \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\varphi_j(y_j(t)) + b_{ij}\varphi_j(y_i(t - \tau_{ij}(t))))]\} \leqslant -\sum_{i=1}^{n}\xi_i c_i|y_i(t)| +$$
$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{+}\times|\varphi_j(y_j(t))| + |b_{ij}|\cdot|\varphi_j(y_j(t - \tau_{ij}(t)))|)] \leqslant$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\xi_i c_i|y_i(t)| + \sum_{i=1}^{n}\xi_i([a_{jj} + \sum_{i\neq j}^{n}|a_{ij}|]\cdot|y_j(t)| + [b_{jj} + \sum_{i\neq j}^{n}|b_{ij}|]\cdot|y_j(t - \tau_{ij}(t))|)L_j \leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}[(-c_i\xi_i + \sum_{j=1}^{n}\xi_j a_{ij}^{+}L_j)|y_i(t)| + \sum_{j=1}^{n}\xi_j b_{ij}^{+}L_j\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}|y_j(s)|] \leqslant$$
$$-\alpha\frac{1}{\xi_{\min}}V(y(t)) + \beta\frac{1}{\xi_{\min}}\overline{V}(y(t)),$$
$$t \in [t_{k-1}, t_k) \tag{12}$$

其中

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n}(c_i\xi_i - \sum_{j=1}^{n}\xi_j a_{ij}^{+}L_j),$$
$$\beta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j b_{ij}^{+}L_j,$$
$$\xi_{\min} = \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\xi_i\},$$
$$\overline{V}(y(t)) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}y_i(s)$$

由条件(9) 得到 $\alpha > \beta > 0$,再由条件(10) 保证了不等式 $\lambda - \alpha + \beta e^{\lambda\tau} \leqslant 0$ 有正根 $\lambda > 0$. 因此若记 $V(t) = V(y(t))$ 则不等式方程(12) 可变为

$$D^+V(y(t)) \leqslant (-\alpha + \beta e^{\lambda\tau})V(t) \leqslant -\lambda V(t), t \in [t_{k-1}, t_k) \tag{13}$$

即

$$V(t) \leqslant V(t_{k-1}-)e^{-\lambda(t - t_{k-1})}, t \in [t_{k-1}, t_k) \tag{14}$$

由脉冲方程及假设(H2) 有

$$|y_i(t_k+)| = |G_i(y_i(t_k-) + x_i^*) - G_i(x_i^*)| \leqslant m_k|y_i(t_k-)|$$

所以

$$V(t_k+) \leqslant m_k V(t_k-) \tag{15}$$

再由初始条件 $|y(t)| = |\psi(t)|, t \in [t_0 - \tau, t_0]$,并设 $\|\psi\| = \sup_{t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0}|\psi(t)|$,通过(14) 和(15) 易得

$$V(t) \leqslant m_{k-1}m_{k-2}\cdots m_1\|\psi\|e^{-\lambda(t - t_0)},$$
$$t \in [t_{k-1}, t_k) \tag{16}$$

也即是

$$|y_i(t)| \leqslant m_{k-1}m_{k-2}\cdots m_1 \frac{1}{\xi_i}\|\psi\| \times e^{-\lambda(t-t_0)}, t \in [t_{k-1}, t_k) \tag{17}$$

考虑到 $m_k \leqslant M, k = 1,2,\cdots$,所以有

$$|y_i(t)| \leqslant M^{k-1}\frac{1}{\xi_i}\|\psi\| e^{-\lambda(t-t_0)}, t \in [t_{k-1}, t_k) \tag{18}$$

另外由 $t_k - t_{k-1} \geqslant \delta\tau, \delta > 1, \tau > 0, k = 1,2,\cdots$,可得$\frac{t-t_0}{\delta\tau} \geqslant k-1, t \in [t_{k-1}, t_k)$. 因此我们有

$$\frac{t-t_0}{\delta\tau}\ln M \geqslant (k-1)\ln M$$

即

$$M^{k-1} \leqslant \exp\left(\frac{\ln M}{\delta\tau}(t-t_0)\right), t \in [t_{k-1}, t_k)$$

结合(18)式得

$$|y_i(t)| \leqslant \frac{1}{\xi_i}\|\psi\| \exp\left[\left(\frac{\ln M}{\delta\tau} - \lambda\right)(t - t_0)\right], t \in [t_{k-1}, t_k)(k = 1,2,\cdots) \tag{19}$$

由上式显然定理成立.

## 4　结束语

本文引入了新的具时滞脉冲 CNNs 模型,通过分析该系统平衡点的稳定性,在激励函数仅需满足 Lipschitz 连续的条件下,得到了平衡点的存在唯一性和全局指数稳定性的充分条件,并得到了指数收敛速率. 进一步,我们将本文所考虑的系统退化为非脉冲系统,容易得到具时变时滞 CNNs 系统模型的稳定性条件,与现有文献结果相比具有较少的限制和更易验证,这里不再详述.

## 参　考　文　献


1　Chua LO, Yang L. Cellular neural networks: Theory. *IEEE Trans. Circuits Syst*, 1988, 35: 1257～1272

2　Chua LO, Yang L. Cellular neural networks: Applications. *IEEE Trans. Circuits Syst*, 1988, 35: 1273～1290

3　Chua LO. CNN: A Paradigm for Complexity. World Scientific, Singapore, 1998

4　Arik S, Tavanoglu V. Equilibrium analysis of delayed CNNs. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 1998, 45: 168～171

5　Arik S, Tavanoglu V. On the global asymptotic stability of delayed cellular neural networks. *IEEE Trans. Circuits Syst I*, 2000, 47: 571～574

6　Bainov DD, Simeonov PS. Stability theory of differential equations with impulse effects: theory and applications, Chichester: Ellis Horwood, 1989

7　Guan ZH, Liu YQ, Wen XC. Decentralized stabilization of singular and time-delay large-scale control systems with impulsive solutions. *IEEE Trans. Auto. Cntrl*, 1995, 40: 1437～1441

8　Civalleri PP, Gilli LM, Pabdolfi L. On tability of cellular neural networks with delay. *IEEE Trans. Circuits Syst I*, 1993, 40(3): 157～165

9　Roska T, Chua LO. Cellular neural networks with delay type template elements and nonuniform grids. *International Journal of Circuit Theory and Application*, 1992, 20(4): 469～481

10　CAO Jinde. ZHOU Dongming. Stability analysis of delaysis of delayed cellular neural networks. *Neural Nerworks*, 1998, 11(9): 1601～1605

11　CAO Jinde. On stability of delayed cellular neural nerworks. *Physics Letters A*, 1999, 261(5-6): 303～308

12　CAO Jinde. A set of stability criteria for delayed cellular networks. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2001, 48(4): 494～498

13　Zhang J. Global stability analysis in delayed cellular neural networks. *Computers Math Appli.*, 2003, 45(10/11): 1707～1720

14　Jiang Haijun, Teng Zhidong. Global exponential stability of cellular neural networks with time-varying coefficients and delays. *Neural Networks*, 2004, 17: 1415～1425

15　Guan Zhihong, Chen Guanrong. On delayed impulsive Hopfield neural networks. *Neural Networks*, 1999, 12: 273～280

16　Guan Zhihong, James Lam, Chen Guanrong. On impulsive autoassociative neural networks. *Neural Networks*, 2000, 13: 63～69

17　Gopalsamy K. Stability of artificial neural networks with impulses. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 154: 783～813

18　Xu Daoyi, Yang Zhichun. Impulsive delay differential inequality and stability of neural networks. *J. Math. Anal. Appl*, 2005, 305: 107～120

19　Berman A, Plemmons RJ. Nonnegative Matrices in the Mathematical Science. New York: Academic Press, 1979

# GLOBAL EXPONENTIAL STABILITY OF CELLULAR NEURAL NETWORKS WITH VARIABLE DELAYS AND IMPULSES*

Zhang Enbiao Jiang Chengshun

(*Information Engineering University*, *Zhengzhou*, 450002, *China*)

**Abstract** A new model of cellular neural networks involving variable delays and impulses was investigated. Some new sufficient conditions for the existence and global exponential stability of a unique equilibrium of the impulsive delayed model were obtained, without assuming the boundedness, monotonicity or differentiability of the activation functions and subjected to impulsive state at fixed time. The results extend and improve the earlier publications.

**Key words** global exponential stability, cellular neural networks, delays, impulses

Received 17 October 2005, revised 30 November 2005.

* The project is supported by the National Natural Science Foundation of China (10571024) and Innovation Project for University Prominent Research Talents of Henan (2003KJCX008)