

无刷直流电动机系统非线性研究

杨志红^{1,2} 姚琼荟²

(1. 通信指挥学院, 武汉 430010) (2. 海军工程大学, 武汉 430033)

摘要 在电流调节器、逆变驱动电路及永磁同步电机数学描述的基础上, 直接建立无刷直流电动机系统数学模型, 运用非线性仿射变换及尺度变换理论, 将系统模型变换为类 Lorenz 系统形式, 对系统进行稳定性及吸引子分析, 发现系统运行状态与直流输入存在密切关系, 对系统进行雅可比矩阵特征值计算, 确定系统三个平衡点稳定状态, 揭示出系统产生奇怪吸引子的根源在于出现了霍夫分叉, 对分析过程进行了数值仿真, 结果验证了理论分析的正确性。

关键词 无刷直流电动机系统, 霍夫分叉, 混沌, 奇怪吸引子

引言

无刷直流电动机系统是集永磁同步电机、位置检测元件和驱动控制电路于一体的机电一体化产品, 它既具备交流电动机结构简单、运行可靠、维护方便等一系列优点, 又具备直流电动机运行效率高、无励磁损耗等优点, 在伺服和驱动系统中得到广泛应用。但在控制实验中, 有时会发现反馈电流波形间歇振荡、电机转速随机波动, 控制性能不稳定等现象, 有如国内外专家研究电机传动系统的混沌现象^[1~3]。现有的相关文献^[2~4]揭示了永磁同步电机单机体的混沌现象, 但对系统的混沌模型及混沌产生途径未做系统研究。本文直接从无刷直流电动机系统入手, 建立无刷直流电动机系统的数学模型, 应用非线性理论对其进行了研究, 理论上分

析了系统奇怪吸引子现象, 并对结果进行了数值仿真研究。

1 无刷直流电动机系统的构成及数学模型

电流反馈型脉宽调制(CRPWM)无刷直流电动机系统由永磁同步电动机(PM Motor)、逆变驱动电路(SPWM)和转子位置检测及处理电路(Signal Processing)三大部分组成, 其原理框图如图1所示。具有与永磁同步电动机相同极对数的多极旋转变压器和永磁电机同轴连接, 转子位置检测及处理电路对旋变的输出信号进行处理, 解算出转子位置, 与给定信号 U_{in} 合成三相电流指令信号, 经三相电流调节器作用后, 由 SPWM 逆变驱动电路对电机三相绕组进行矢量控制。

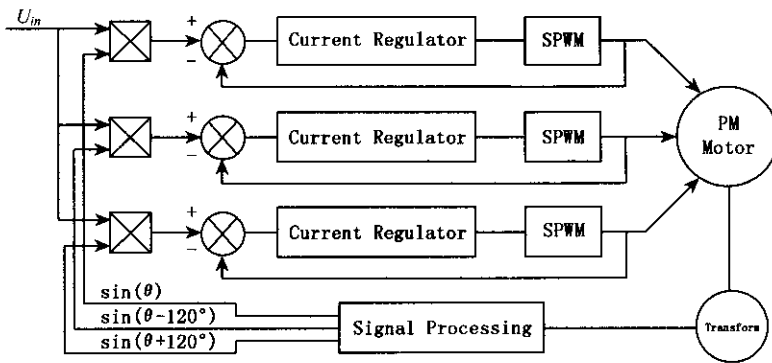


图1 无刷直流电动机系统原理框图

Fig. 1 Block diagram of brushless DC motor system

其建模的关键在于准确描述系统的各组成部分,并将它们有机结合.电流反馈的作用可用控制矢量的形式描述如下

$$\vec{U} = K_p K_s \vec{U}_{in} - K_p K_s K_f \vec{I} \quad (1)$$

式中: \vec{U}_{in} 相电流控制矢量; K_p 电流比例调节器增益; K_f 电流反馈系数; K_s 逆变驱动电路等效增益; \vec{U} 和 \vec{I} 电压和电流矢量.

对式(1)进行 Park 变换得系统交轴(q 轴)直轴(d 轴)电流控制

$$\begin{cases} u_q = K_p K_s U_{inq} - K_p K_s K_f i_q \\ u_d = K_p K_s U_{ind} - K_p K_s K_f i_d \end{cases} \quad (2)$$

式中: u_q 、 u_d 为 q 轴、 d 轴电压; U_{inq} 、 U_{ind} 为 q 轴、 d 轴电流指令信号; i_q 、 i_d 为 q 轴、 d 轴电流.

无刷直流电动机系统为获得较大的转矩系数及正反对称的线性电流-转矩特性,一般在转子位置传感器安装时,使参考向量与 q 轴一致,故 $U_{ind} = 0$,而 U_{inq} 在数值上等于 U_{in} .因此式(2)变为

$$\begin{cases} u_q = K_p K_s U_{in} - K_p K_s K_f i_q \\ u_d = -K_p K_s K_f i_d \end{cases} \quad (3)$$

永磁同步电动机的数学描述^[4]为

$$\begin{cases} \frac{di_q}{dt} = (u_q - R_1 i_q - n_p \omega L i_d - n_p \omega \Psi_r) \mathcal{Y} L \\ \frac{di_d}{dt} = (u_d - R_1 i_d + n_p \omega L i_q) \mathcal{Y} L \\ \frac{d\omega}{dt} = (\frac{3}{2} n_p \Psi_r i_q - \beta \omega - T_L) \mathcal{Y} J \end{cases} \quad (4)$$

式中: R_1 定子绕组电阻; L 均匀气隙时电感; Ψ_r 转子磁极磁链; ω 转子角速度; T_L 负载转矩; J 转动惯量; β 粘滞阻尼系数; n_p 极对数.

将式(3)代入式(4)得

$$\begin{cases} \frac{di_q}{dt} = [K_p K_s U_{in} - (K_p K_s K_f + R_1) i_q - n_p \omega L i_d - n_p \omega \Psi_r] \mathcal{Y} L \\ \frac{di_d}{dt} = [-(K_p K_s K_f + R_1) i_d + n_p \omega L i_q] \mathcal{Y} L \\ \frac{d\omega}{dt} = (\frac{3}{2} n_p \Psi_r i_q - \beta \omega - T_L) \mathcal{Y} J \end{cases} \quad (5)$$

式(5)即为包含永磁同步电动机、逆变驱动电路和电流调节器在内的完整无刷直流电动机系统的数学模型.

2 系统稳定性及奇怪吸引子分析

式(5)表明,无刷直流电动机系统是一个复杂的强耦合非线性系统,为便于分析,对其进行仿射变换及时间尺度变换

$$t = \tau \tilde{t} \quad x = \lambda \tilde{x} \quad (6)$$

式中: $\tau = L/K_p K_s K_f + R_1$; $\tilde{x} = [i_q \quad i_d \quad \omega]^T$;

$$\tilde{x} = [\tilde{i}_q \quad \tilde{i}_d \quad \tilde{\omega}]^T;$$

$$\lambda = \text{diag} \left[\frac{2\beta}{3\tau n_p^2 \Psi_r}, \frac{2\beta}{3\tau n_p^2 \Psi_r}, \frac{1}{\tau n_p} \right].$$

由式(5)(6)得无量纲化形式状态方程

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{i}_q}{d\tilde{t}} = -\tilde{i}_q - \tilde{\omega} \tilde{i}_d + \rho \tilde{\omega} + \tilde{U}_{in} \\ \frac{d\tilde{i}_d}{d\tilde{t}} = -\tilde{i}_d + \tilde{\omega} \tilde{i}_q \\ \frac{d\tilde{\omega}}{d\tilde{t}} = \alpha (\tilde{i}_q - \tilde{\omega}) - \tilde{T}_L \end{cases} \quad (7)$$

式中 ρ 、 σ 为与系统有关的参数; \tilde{U}_{in} 为与输入有关的变量; \tilde{T}_L 为与负载有关的变量.

在无负载的情况下,即 $\tilde{T}_L = 0$ 时,对式(7)对应的自治方程应用平衡条件,有三个平衡点 $(\tilde{i}_q^{eq} \quad \tilde{i}_d^{eq} \quad \tilde{\omega}^{eq})^T (0 \quad 0 \quad 0)^T (\sqrt{\rho-1} \quad \rho-1 \quad \sqrt{\rho-1})^T (\sqrt{\rho-1} \quad \rho-1 \quad -\sqrt{\rho-1})^T$.

其稳定性由雅可比矩阵

$$\begin{bmatrix} -1 & -\tilde{\omega}^{eq} & \rho - \tilde{i}_d^{eq} \\ -\tilde{\omega}^{eq} & -1 & \tilde{i}_q^{eq} \\ \sigma & 0 & \sigma \end{bmatrix} \text{的特征值来判别.当 } \rho =$$

$\rho_h = \frac{\sigma^2 + 4\sigma}{\sigma - 2}$ 时,雅可比矩阵的特征方程

$$\lambda^3 + (\sigma + 2)\lambda^2 + [\alpha(2 - \rho + \tilde{i}_d^{eq}) + \tilde{\omega}^{2eq} + 1]\lambda + \alpha(\tilde{\omega}^{2eq} + \tilde{i}_q^{eq} \tilde{\omega}^{eq} + \tilde{i}_d^{eq} - \rho + 1) = 0 \quad (8)$$

有两个纯虚根.即当 ρ 从 $\rho < \rho_h$ 到 $\rho < \rho_h$ 变化时,将有一对特征值沿实轴上下方穿过虚轴,系统将产生霍夫分叉^[5,7](Hopf Bifurcation).三个平衡点变得不稳定.

强迫情况下,系统平衡点满足式(9)

$$\begin{cases} \tilde{i}_q^{eq} = \tilde{\omega}^{eq} \\ \tilde{i}_d^{eq} = \tilde{\omega}^{2eq} \\ \tilde{\omega}^{3eq} + (1 - \rho)\tilde{\omega}^{eq} - \tilde{U}_{in} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

平衡点的稳定性同样由式(8)来判别.对于给定的无刷直流电动机系统,参数 ρ 、 σ 在一定范围内

是已知的.系统产生霍夫分叉时的条件将变为 \tilde{U}_{in} 的函数.即当外界输入满足 $f(\tilde{U}_{in}) = 0$ 时系统产生霍夫分叉,出现奇怪吸引子.

$$(1 - \rho) \left\{ \frac{(\rho - 2)\sigma^2 + (\rho - 4)\sigma - 2}{\sigma^2 + 2} \right\}^{\frac{1}{2}} - \tilde{U}_{in} \quad (10)$$

令 $U_h = \left(\frac{(\rho - 2)\sigma^2 + (\rho - 4)\sigma - 2}{\sigma^2 + 2} \right)^{\frac{3}{2}} + (1 - \rho) \left\{ \frac{(\rho - 2)\sigma^2 + (\rho - 4)\sigma - 2}{\sigma^2 + 2} \right\}^{\frac{1}{2}}$ 则有

[情况 1] $\tilde{U}_{in} > U_h$ 时,系统(7)稳定运行,表现为无刷直流电动机系统固定转速稳定运行;

[情况 2] $\tilde{U}_{in} = U_h$ 时,系统(7)周期运动,产生极限环,表现为无刷直流电动机系统在同步速附近振荡运行;

[情况 3] $\tilde{U}_{in} < U_h$ 时,系统(7)进入混沌运动,产生奇怪吸引子,表现为无刷直流电动机系统出现混沌现象.

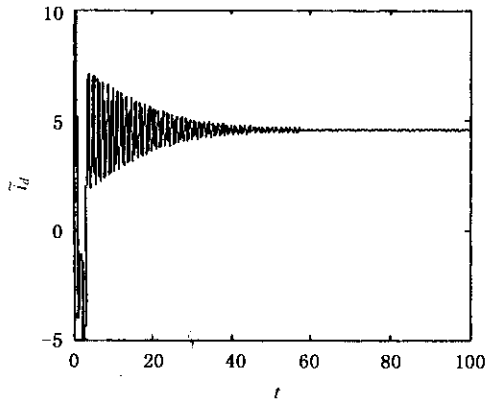
由电机系统特性参数可得 $\rho = 20.5$, $\sigma = 4.5$, 此时计算得 $U_h = 2.619$,运用四阶龙格-库塔法对三种情况进行仿真,结果如图 2.

3 结论

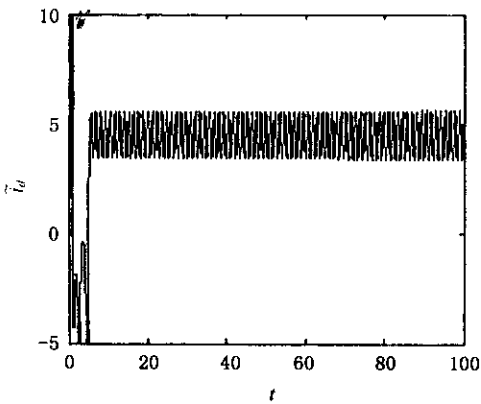
无刷直流电动机系统是典型的非线性系统,传统线性化理论无法对其进行彻底研究.本文在建立了其非线性数学模型的基础上,应用非线性混沌理论分析出系统在一定输入条件下能捕捉到奇怪吸引子,并指出其进入混沌的途径为霍夫分叉.最后计算机仿真得以验证.研究结果对无刷直流电动机系统工况有很重要的指导意义.

参 考 文 献

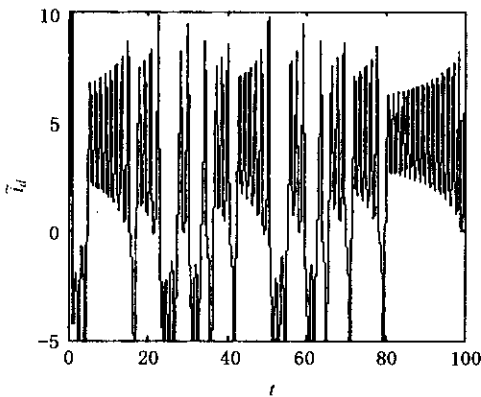
- 1 陈关荣.控制非线性动力系统的混沌现象.控制理论与应用,1997,14(1):1~6(Chen Guanrong. Controlling Chaos in Nonlinear Dynamical Systems. *Control Theory and Applications*, 1997, 14(1):1~6(in Chinese))
- 2 Li Z Zhang Bo, Mao ZY. Strange attractors in permanent-magnet synchronous motor. Proc of the IEEE 1999 Int. Conf on Power Electronics and drive Systems, Hong Kong, IEEE Society, 1999:150~155
- 3 张波,李忠,毛宗源.永磁同步电动机的混沌模型及其模糊建模.控制理论与应用,2002,19(6):841~844(Zhang Bo, Li Zhong, Mao Zongyuan. Mathematical model of permanent-magnet-synchronous motors and its fuzzy modeling. *Control Theory and Applications*, 2002, 199



(a) $\tilde{U}_{in} = 2.64$



(b) $\tilde{U}_{in} = 2.619$



(c) $\tilde{U}_{in} = 2.60$

图 2 系统稳定(a)、极限环(b)及混沌(c)时序图

Fig. 2 Time plot of stability (a), limit cycles (b) and chaos (c)

$$f(\tilde{U}_{in}) = \left(\frac{(\rho - 2)\sigma^2 + (\rho - 4)\sigma - 2}{\sigma^2 + 2} \right)^{\frac{3}{2}} +$$

- (6) 841~844(in Chinese))
- 4 Hemail N. Strange attractors in brushless DC motor. *IEEE Trans Circuit and System- I* ,1994 ,41(1) :40~45
- 5 Adnanes A ,et al. Torque Analysis of Permanent magnet synchronous motors. IAS Annual Meeting ,IEEE ,New York ,1991 :695~701
- 6 Ajjarapu V ,Lee B. Bifurcation theory and its application to nonlinear dynamical phenomena in an electrical power system. *Transactions on Power Systems* ,1992 ,7(1) :424~431
- 7 乐源,谢建华,丁旺才. 一类两自由度碰撞振动系统的Hopf分岔和混沌. *动力学与控制学报* ,2004 ,2(3) :36~44(Le Yuan ,Xie Jianhua ,Ding Wangcai. Hopf bifurcation and chaos of a symmetric two-of-freedom vibro-impact system. *Journal of Dynamics and Control* ,2004 ,2(3) :36~44(in Chinese))

RESEARCH OF NON-LINEARITY IN BRUSHLESS DC MOTOR SYSTEM

Yang Zhihong^{1 2} Yao Qionghui²

(1. *Commanding Communication Academy ,Wuhan 430010 ,China*)

(2. *Naval University of Engineering ,Wuhan 430033 ,China*)

Abstract Based on the mathematical description of current regulator ,SPWM and PM motor , the mathematical model of a brushless DC motor system was proposed directly and transformed to a similar Lorenz system by applying the nonlinear affine transformation and the scaling transformation theory. The stability and attractor of the system were analyzed , and the relationship between the system operation condition and the direct current input was obtained. The stability of the three equilibrium points was analyzed by calculating the eigenvalues of the Jacobi matrix , which revealed that the Hopf bifurcation resulted in the strange attractor. Finally , numerical simulations were presented , and the results showed the validity of the theoretical analysis.

Key words brushless DC motor system , Hopf bifurcation , chaos , strange attractor