

# 流动压力作用下板状叠层结构的分岔与混沌

王琳 倪樵 黄玉盈

(华中科技大学力学系, 武汉 430074)

**摘要** 研究了轴向流作用下板状叠层结构在非线性弹性支承下的分岔与混沌行为. 假设叠层结构中各板在同一时刻有相同的变形, 同时考虑三次非线性弹性支承对板状梁的影响, 系统的非线性偏微分方程经过转化可表示为一阶的状态方程. 数值迭代计算表明, 板状叠层结构具有丰富的非线性动力学现象. 通过对几个关键系统参数的研究, 发现板状梁结构的振动存在复杂的分岔现象和混沌响应, 系统是经由经典的倍周期分岔通向混沌的.

**关键词** 板状叠层结构, 分岔, 混沌, 流动压力

## 引言

叠层板型结构在核反应堆中有着极其广泛的应用. 这种板状叠层结构在反应堆运行过程中遇到的一个重要问题是在高速流动冷却剂冲刷下的流致振动问题. 板型燃料元件的基本组成是由多层窄长板叠合而成, 板与板之间留有与板厚相当的空隙, 让冷却剂流过. 间隔一定的长度距离, 各层板之间通过细长垫条对焊而形成一整体. 由于长时间的工作, 使得板与板之间的联结常常出现松动, 此时焊接处的固定支承相当于变成了非线性的弹性支承. 因此, 由于流动压力的作用, 板与非线性支承发生碰撞, 可导致结构出现复杂的动力学行为.

对于叠层板型结构, 可作为板状梁模型来处理. 早期的研究主要集中于其线性问题, 没有考虑联结处松动所形成的非线性支承的影响. 1960 年, Miller<sup>[1]</sup>提出一种计算板状叠层结构发散临界流速的方法; Dugundji 等<sup>[2]</sup>研究了板状叠层结构在不可压缩流中的颤振问题; 文献<sup>[3]</sup>基于 Galerkin 法和 Fourier 转换技术, 研究了二维不可压缩流中矩形板的稳定性问题. 最近几年, 人们开始重视具有非线性支承的叠层结构<sup>[4-7]</sup>, 考虑了叠层板在多种边界条件下的非线性动力学行为, 得到了一些有益的结论. 值得一提的是, 文献<sup>[7]</sup>研究了悬臂叠层板在流动压力和端部非线性支承联合作用下的 Hopf 分岔现象. 然而, 总体上讲, 国内外对于板状叠层结构

动力学行为的研究还很不充分, 例如, 在非线性支承下, 叠层结构是否会出现更为复杂的分岔路径和振动形态(复杂的周期解和混沌行为等), 目前还鲜见报导. 因此, 有必要对此领域作更为深入的研究工作.

## 1 流动压力作用下的板状叠层结构

本文所用模型为一置于柔性矩形管内的板状叠层结构模型, 如图 1 所示. 图 1(a) 给出了模型的外观图, 图 1(b) 表示模型的截面形状, 图 1(c) 显示了板状结构的支承情况. 从图中可以看到, 流体从 A 端流入, D 端流出, 进入流道前其平均流速为  $U$ , 且流体为沿  $x$  和  $z$  方向流动的二维不可压缩无粘流; 由于板在宽向的振动很小(可忽略), 本文仅考虑板在  $xoy$  平面内振动; 同时, 板在某一位置上存有非线性支承.

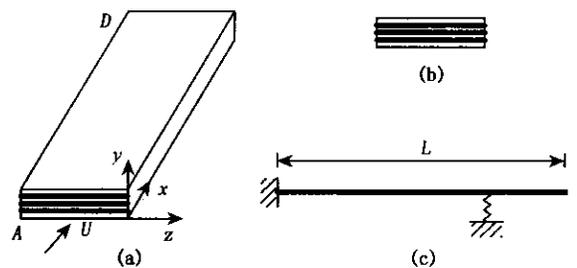


图 1 柔性矩形管内叠层板状梁结构示意图

Fig. 1 Schematic of a parallel plate-type beam in a flexible rectangular pipe

对于非线性支承 本文将考虑为三次非线性弹簧约束(支承) 其非线性力可写成

$$F = [K_1 y + K_2 y^3] \delta(x - x_b)$$

其中  $K_1$  和  $K_2$  分别表示非线性支承的线性和非线性刚度系数  $x_b$  表示非线性支承的位置.

假设各板在同一时刻有相同的变形 则窄长叠层板在流动压力作用下的流固耦合运动微分方程可表示为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + MU^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (M + m) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + [K_1 y + K_2 y^3] \delta(x - x_b) = 0 \quad (1)$$

无非线性支承情况下的运动微分方程已在文献 [8] 中给出;上式中  $EI$  表示叠层板的抗弯刚度  $y(x, t)$  为结构的横向位移  $M$  为单位长度上的流体质量  $m$  为板状梁单位长度的质量.

为便于后续数值计算 将系统的运动方程变换为无量纲形式如下

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + u^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2\sqrt{\beta}u \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + [k_1 \eta + k_2 \eta^3] \delta(\xi - \xi_b) = 0 \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \eta &= y/L, \xi = x/L, \\ \tau &= [EI/(M + m)]^{1/2} t/L^2, \\ u &= (M/EI)^{1/2} UL, \beta = M/(M + m), \\ k_1 &= K_1 L^3/EI, k_2 = K_2 L^5/EI, \xi_b = x_b/L \end{aligned}$$

式中  $\beta$  称为质量比.

## 2 运动方程的离散化

方程(2)是一个无限维的偏微分方程,为此,采用 Galerkin 方法对此方程进行离散化处理.令

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{r=1}^N \varphi_r(\xi) q_r(\tau) \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_r(\xi) &= \cosh \lambda_r \xi - \cos \lambda_r \xi - \sigma_r (\sinh \lambda_r \xi - \sin \lambda_r \xi), \\ \sigma_r &= [\sinh \lambda_r - \sin \lambda_r] / [\cosh \lambda_r - \cos \lambda_r] \end{aligned} \quad (4)$$

为悬臂梁的特征函数  $q_r(\tau)$  表示其对应的广义坐标.采用两阶振型 Galerkin 展式,即  $N = 2$ .将式(3)代入方程(2)利用振型函数的正交性和函数性质,经过积分之后可得

$$\ddot{\mathbf{q}} + [C] \dot{\mathbf{q}} + [K] \mathbf{q} + \{\mathbf{f}(q)\} = \{\mathbf{0}\} \quad (5)$$

其中  $[C]$  和  $[K]$  分别表示系统的定常(与时间无关)阻尼矩阵和刚度矩阵.矢量  $\{\mathbf{f}(q)\}$  矩阵  $[C]$  和  $[K]$  具有如下形式

$$C_{ij} = 2\sqrt{\beta}u b_{ij}, K_{ij} = \lambda_j^4 \delta_{ij} + u^2 c_{ij}, f_i = k \left[ \sum_{r=1}^N \varphi_r(\xi_b) q_r \right]^3 \varphi_i(\xi_b)$$

式中

$$b_{ij} = \begin{cases} 4[(\lambda_i/\lambda_j)^2 + (-1)^{i+j}], & i \neq j, \\ 2, & i = j \end{cases}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 4[\lambda_j \sigma_j - \lambda_i \sigma_i] [(-1)^{i+j} - (\lambda_i/\lambda_j)^2], & i \neq j, \\ \lambda_j \sigma_j (2 - \lambda_j \sigma_j), & i = j \end{cases}$$

再令  $p_i = \dot{q}_i$ ,可进一步将系统的运动方程转化为一阶状态方程组

$$\dot{\mathbf{z}} = [A] \mathbf{z} + \mathbf{f}(\mathbf{z}) \quad (6)$$

式中  $\{\mathbf{z}\} = \{q, p\}$  是一个  $2N$  维的向量.

## 3 数值仿真

为了分析系统在多种参数区域内的振动行为,利用四阶的 Runge-Kutta 法对方程(6)加以求解.时间步长取为 0.0025,若不作另外说明,初始条件取为  $z_1(0) = z_2(0) = 0.001, z_3(0) = z_4(0) = 0$ .数值计算中,系统的一些参数设置如下

$$k_1 = 10, k_2 = 100000 \quad (7)$$

### 3.1 板状梁振动的分岔

为了研究板状梁在多种参数区域内的动力响应,以系统的几种关键参数为控制参数,作出了对应的分岔图,如图 2~4 所示.在这些图中,纵坐标表示板状梁自由端的位移幅值,横坐标为控制参数.作分岔图时,当梁自由端的速度为零( $\dot{\eta}(1, \tau) \approx \varphi_1(1)z_3(\tau) + \varphi_2(1)z_4(\tau) = 0$ )时,记录其对应点的位移值.因此,在分岔图中,可以明显的看到板状梁的振动既有正位移,也有负位移.

图 2 显示了以流速为控制变量的分岔图.因此,无量纲的流速是唯一的可变参数,质量比和非线性支承的位置分别取值为  $\beta = 0.2, \xi_b = 0.8$ .在图 2 中,发生 Hopf 分岔的流速点标记为  $u_H \approx 5.516$ .当  $u \leq u_H$  时,板状梁是稳定的,其最终的位移为零;当  $u > u_H$  时,板状梁的振动突然以对称的极限环(周期 1)形式出现,这在分岔图中表现为两

个解分支. 当  $u > u_p \approx 6.84$  时, 结构周期振动的对称性突然被破坏, 出现了非对称的极限环形态. 继续增大流速至  $u_D \approx 7.27$ , 板状梁将以一串串的倍周期分岔进入混沌体制, 这在分岔图中清楚可见. 值得一提的是, 在  $u_D$  处, 分岔图中出现了不连续的跳跃现象.

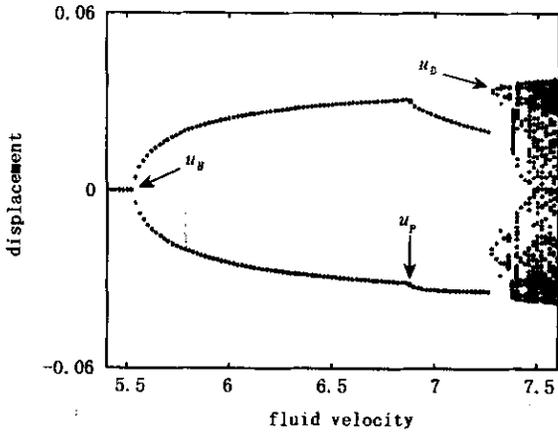


图2 以流速为控制变量的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram as the fluid velocity is varied

图3给出了以质量比为控制变量的分岔图. 此时, 质量比是唯一的可变参数, 流速和非线性支承的位置分别取值为:  $u = 7.6$ ,  $\xi_b = 0.8$ . 由该图可以发现, 随着质量比的增大, 系统的振动形态出现了倒分岔现象.

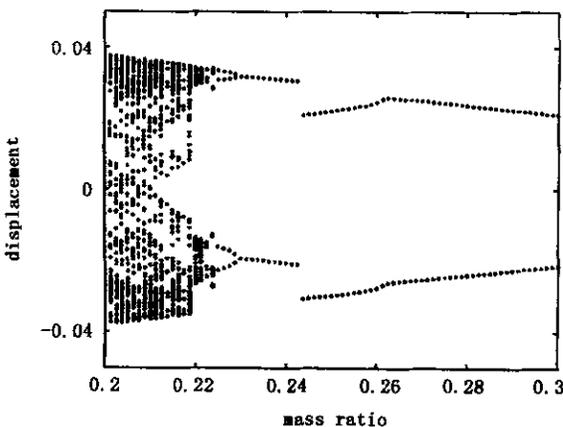


图3 以质量比为控制变量的分岔图

Fig. 3 Bifurcation diagram as the mass ratio is varied

类似的, 通过数值计算可以构建以非线性支承位置为控制变量的分岔图(图4). 为此, 流速和质量比的大小分别取值为:  $u = 7.6$ ,  $\beta = 0.2$ . 图4所示的分岔图表明, 当非线性约束逐渐靠近板状梁中点时, 板状结构反而不容易发生混沌运动, 不过其

自由端振动的幅值将渐变增大; 反之, 当非线性约束靠近自由端时, 系统将更容易出现混沌现象, 其自由端振动的幅值将渐变减小.

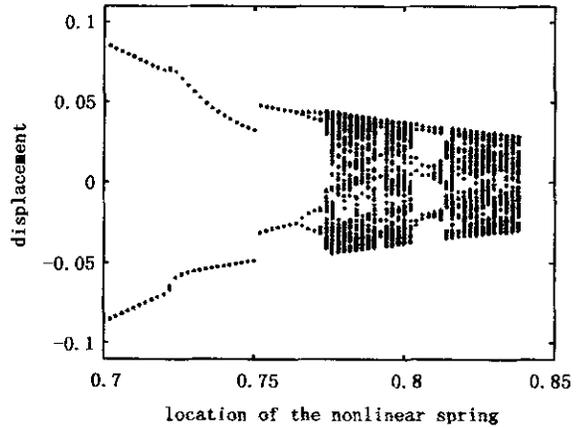


图4 以非线性支承位置为控制变量的分岔图

Fig. 4 Bifurcation diagram as the location of the nonlinear spring is varied

### 3.2 板状梁典型的振动形态

为了更为清楚的观察板状梁的各种振动形态, 图5给出了在不同流速下系统发生多种振动行为的相轨迹图. 从图5(a)可以发现, 当流速较小时, 振动的相图反映为一个稳定的焦点, 其最终的不动点为原点. 图5(b)显示了极限环运动状态, 系统振动时其正负幅值是对称的, 这与图5(c)所显示的非对称的极限环运动有所不同. 图5(d)~(g)分别表示系统的周期1、2、3、4和8运动状态. 图5(h)和(i)则显示了系统处于混沌运动体制, 分别对应于窄带和宽带的混沌状态. 值得注意的是, 在倍周期分岔的过程中, 系统在周期2的流速参数区域内还夹杂存有周期3的运动形态(图5(e)), 这在其它发生倍周期分岔的动力系统中并不多见.

### 3.3 功率谱分析

作功率谱密度图是一种识别系统发生周期和混沌运动的有效手段. 以周期2和混沌运动为例, 分别作出其振动时的功率谱密度图. 从图6中可以发现, 当系统处于周期2运动时, 其功率谱密度曲线具有明显的分离的、离散的尖峰; 而系统混沌运动的功率谱密度曲线则出现了噪声背景和宽峰.

## 4 结论

本文研究了矩形管内流动压力作用下板状叠层结构的非线性动力学行为. 假设各叠层板在同一

时刻有相同的变形, 计入由于松动所引起的非线性约束之后, 板状叠层结构的运动方程经 Galerkin 方法离散可转化了一阶的状态方程. 数值计算显示, 在流速、质量比和约束位置三种参数区域内, 系统

存有倍周期分岔通向混沌的道路. 本文的研究还表明, 板状叠层结构的振动形态极其丰富, 若考虑流体的粘性因素和扰动性质, 其动力响应行为可能更为复杂, 这也是以后所需进行的研究内容.

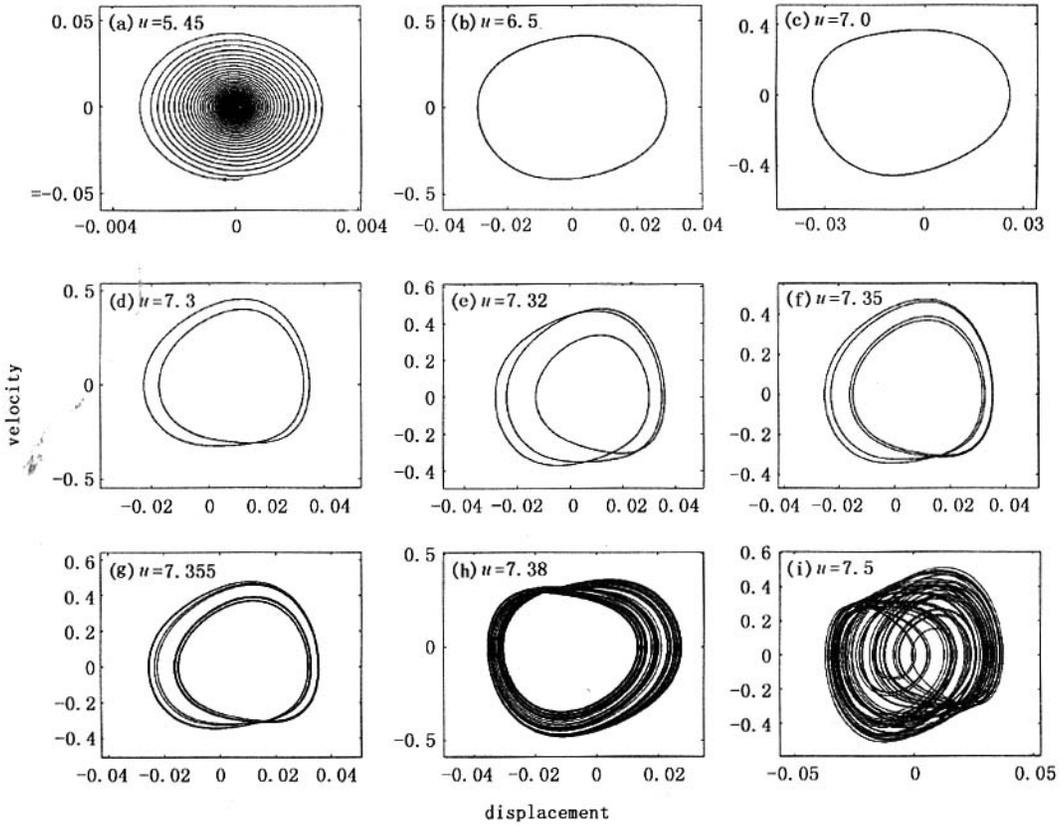


图 5 板状梁在不同流速下的振动形态

Fig. 5 Dynamical behaviour of the plate-type beam with various fluid velocities

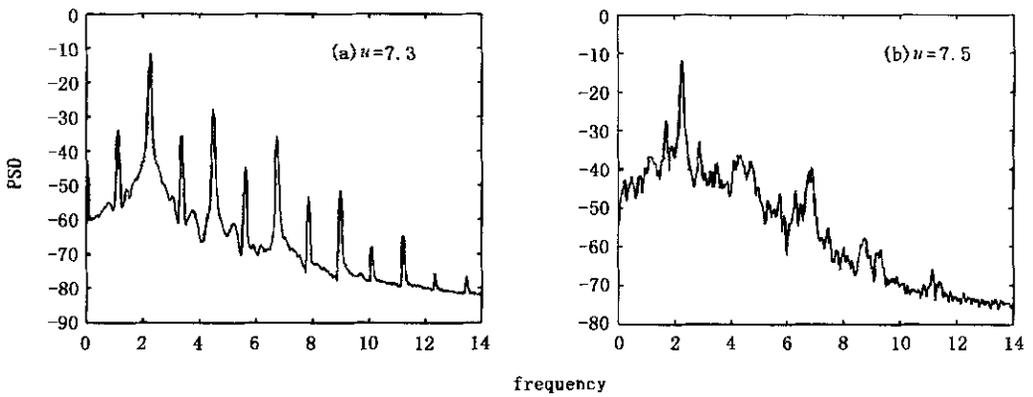


图 6 周期 2 与混沌运动的功率谱密度图

Fig. 6 Power spectral density diagrams for period-2 and chaotic motions

参 考 文 献

1 Miller DR. Critical flow velocities for collapse of reactor

parallel plate fuel assemblies. *ASME J Eng Power* ,1960 , 82 :83~95

2 Dugundji J ,Dowell E ,Perkin B. Subsonic flutter of panels on continuous elastic foundations. *AIAA J* ,1963 ,1 :1146 ~1154

- 3 Guo CQ ,Paidoussis MP. Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow. *Journal of Applied Mechanics* 2000 67 :171~175
- 4 陈贵清 杨翊仁. 受非线性支承的板状梁结构流致振动研究. *固体力学学报* ,2003 ,24( 3 ): 278 ~ 283( Chen Guiqing ,Yang Yiren. Study on flow-induced vibration for a plate-type beam structure with nonlinear support. *Acta Mechanica Sinica* 2003 24( 3 ) 278~283 in Chinese ))
- 5 张凤翔 陈贵清. 板状结构流致振动研究. *振动与冲击* , 2004 23( 2 ):101~104( Zhang Fengxiang ,Chen Guiqing. Study on flow-induced vibration of plate-type structures. *Journal of Vibration and Shock* 2004 23( 2 ):101~104 ( in Chinese ))
- 6 陈贵清 杨翊仁. 板状结构流致振动及其稳定性. *河北理工学院学报* ,2002 ,24( 4 ):105 ~ 113( Chen Guiqing , Yang Yiren. The analysis on flow-induced vibration for a plate-type beam structure with nonlinear support and its stability. *Journal of Hebei Institute of Technology* ,2002 , 24( 4 ):105~113 in Chinese ))
- 7 鲁丽 杨翊仁. 轴向流作用下板状叠层结构的 Hopf 分叉. *科学技术与工程* 2004 4( 6 ):442~448( Lu Li ,Yang Yiren. Hopf bifurcation of parallel plate-type structure in axial flow. *Science Technology and Engineering* ,2004 ,4 ( 6 ) 442~448 in Chinese ))
- 8 Guo CQ ,Peng RH Sun DL. A dynamic model for flow-induced vibration of parallel-plate fuel assemblies. SMiRT 11 Transactions of the 12th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology ,1993 :1~4

## BUFURCATION AND CHAOS IN A PARALLEL PLATE-TYPE STRUCTURE UNDER FLOWING PRESSURE

Wang Lin Ni Qiao Huang Yuying

( *Department of Mechanics ,Huazhong University of Science and Technology ,Wuhan 430074 ,China* )

**Abstract** The bifurcation and chaotic behavior of a parallel plate-type structure with nonlinear elastic support in axial flow were investigated. By assuming that all the plates have the same deflections at any instant , and considering the effect of cubic elastic spring on the plate-type beam , the partial differential equation of the system was transformed to the first-order-state equation. Based on this , numerical simulations show that the parallel plate-type structure has rich nonlinear dynamics. The complex bifurcations and chaotic motions were detected by analyzing several key system parameters , and the route to chaos was shown to be via classical period-doubling bifurcations.

**Key words** parallel plate-type structure , bifurcation , chaos , flowing pressure