

两点碰撞振动系统的周期运动与分叉*

林梅 丁旺才 武俊虎

(兰州交通大学机电工程学院, 兰州 730070)

摘要 建立了两自由度两点碰撞振动系统的动力学模型,给出了碰撞振动系统产生粘滞的条件,分析了系统存在的粘滞运动.采用打靶法,利用变步长逐次迭代逼近的方法求解系统的不稳定的周期碰撞运动,即 Poincaré 截面上的不动点.通过对两自由度两点碰撞振动系统进行数值模拟显示了系统在一定参数条件下存在周期倍化分叉和 Hopf 分叉,同时通过数值模拟的方法得到了以两自由度两点碰撞振动系统 Poincaré 截面上的不变圈表示的拟周期响应,并进一步分析了随着分岔参数的变化,两自由度两点碰撞振动系统周期运动经拟周期分叉和周期倍化分叉向混沌的演化路径.

关键词 碰撞振动, 两点碰撞, 周期运动, Poincaré 映射, 分叉, 混沌

引言

在很多动力系统中除设计要求有间隙外,运行因素也可能产生间隙,间隙可能导致系统产生碰撞,如高速列车运行中轮轨间的碰撞、核反应堆冷却管与支座的冲击,齿轮传动机构等.因此,对具有间隙的动力机械系统的特性研究在机械系统优化、高速列车动力学分析、核反应堆的可靠性设计及噪声控制等方面都具有重要的意义.因此对含间隙碰撞振动系统的研究受到国内外很多学者的重视.已有的对碰撞振动系统的研究主要是针对单点碰撞进行的,对存在两处及两处以上碰撞的振动系统的研究则很少.文[1]通过计 Poincaré 映射的线性化矩阵,显示了系统在一定参数下存在周期倍化分叉和 Hopf 分叉;文[2]基于映射结构研究了分段线性系统动力学的某些特性;文[3]研究了三自由度碰撞振动系统,分析了当分岔参数变化时碰撞振动系统周期运动经拟周期分岔和周期倍化分岔向混沌的演化路径;文[4]研究了两自由度的碰撞振子当参数变动时的粘滞行为及分叉的类型;文[5]研究了参数改变时的双碰系统的隆起这种特殊分叉现象;文[6]通过改变系统的时间尺度,提出了一种确定非线性系统周期轨道的打靶法.本文研究了两自由度两点碰撞振动系统的复杂的动力学问题:

通过建立 Poincaré 映射,利用打靶法求出系统周期运动不动点,通过数值模拟研究了系统周期倍化分叉和 Hopf 分叉.

1 两点碰撞振动系统的力学模型

图1是一个存在间隙的两自由度振动系统的力学模型.质量为 M_1 和 M_2 的振子,分别由刚度为 K_1 和 K_2 的线性弹簧和阻尼系数为 C_1 和 C_2 的线性阻尼器相联接,两个振子只作水平方向的运动,并受到 $A \cos(\Omega t + \tau)$ 的位移激励的作用.当振子 M_1 的位移 X_1 等于间隙 S_1 时, M_1 将与刚性平面 B_1 碰撞,改变速度方向后以新的初值运动.当振子 M_2 的位移 X_2 等于间隙 S_2 时, M_2 将与刚性平面 B_2 碰撞,改变速度方向后又以新的初值运动,然后再次发生碰撞,如此反复.

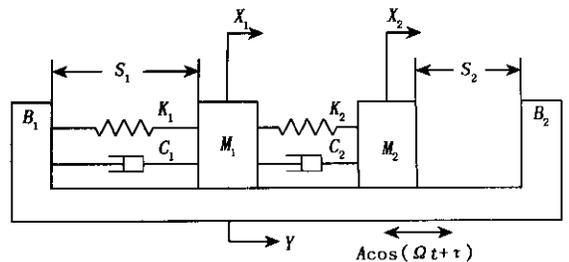


图1 两点碰撞振动系统的力学模型

Fig. 1 Schematic of the vibro-impact system

假设模型中的阻尼是 Rayleigh 型比例阻尼 ($K_2/K_2 = C_2/C_1$) 碰撞过程由恢复系数 R 确定, 在任意连续两次碰撞之间的系统无量纲形式的运动微分方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\zeta(1 + \mu_c)\dot{x}_1 - 2\zeta\mu_c\dot{x}_2 + (1 + \mu_k)x_1 - \mu_kx_2 &= f_{10}\cos(\omega t + \tau) \\ \mu_m\ddot{x}_2 + 2\zeta\mu_c\dot{x}_2 - 2\zeta\mu_c\dot{x}_1 + \mu_kx_2 - \mu_kx_1 &= f_{20}\cos(\omega t + \tau) \end{aligned} \quad (1)$$

其中“ \cdot ”表示对无量纲时间求导, 并且

$$\mu_m = \frac{M_2}{M_1}, \mu_c = \mu_k = \frac{C_2}{C_1} = \frac{K_2}{K_1},$$

$$\omega = \Omega \sqrt{\frac{M_1}{K_1}}, t = T \sqrt{\frac{K_1}{M_1}},$$

$$\zeta = \frac{C_1}{2\sqrt{K_1M_1}}, \kappa x_i = \frac{X_iK_1}{P_1 + P_2},$$

$$s_1 = \frac{S_1K_1}{P_1 + P_2}, s_2 = \frac{S_2K_1}{P_1 + P_2},$$

$$P_1 = M_1\omega^2A, P_2 = M_2\omega^2A,$$

$$f_{20} = \frac{P_2}{P_1 + P_2}, f_{10} = 1 - f_{20}.$$

当 $x_i = s_i$ ($i = 1, 2$) 时, 碰撞发生. 假定 M_1 和 M_2 不同时发生碰撞, 应用恢复系数准则有

$$\dot{x}_{i+} = -R\dot{x}_{i-} \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

其中 \dot{x}_{i-} 和 \dot{x}_{i+} ($i = 1, 2$) 分别代表 M_1 和 M_2 碰撞前后的瞬时速度. 通过模态叠加法可以得到方程 (1) 的解

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^2 \psi_{ij} (e^{-\eta_j t} (a_j \cos(\omega_{dj} t) + b_j \sin(\omega_{dj} t)) + A_j \sin(\omega t + \tau) + B_j \cos(\omega t + \tau)) \end{aligned} \quad (3)$$

其中 ψ_{ij} 为正则模态矩阵 ψ 的元素, $\eta_j = \zeta\omega_j^2$, a_j, b_j 为积分常数, 由系统的初始条件和模态参数确定的, $\omega_{dj} = \omega_j \sqrt{1 - \zeta^2}$, ω_1, ω_2 表示系统在没有碰撞情况下的固有频率, A_j, B_j 是振幅常数.

2 粘滞运动分析

所谓粘滞运动就是当振子 M_1 (或 M_2) 与平面 B_1 (或 B_2) 接触时产生停顿的现象. 系统存在两种可能的粘滞运动 (1) $x_1 = s_1$ (2) $x_2 = s_2$.

振子 M_1 与约束发生碰撞后瞬时满足 $x_1 = s_1$, $\dot{x}_1 = 0$, 合力 F_1 为负方向 (指向约束 B_1), 振子 M_1

将停留约束处, 发生粘滞. 此时系统由两自由度变为单自由度强迫振动系统, 直到 F_1 改变方向后, 系统将以新的初值运动, 粘滞结束. 设滞留的时间为 t_{s1} , 任意连续两次碰撞之间运动方程为

$$\begin{aligned} \mu_m\ddot{x}_2 + 2\zeta\mu_c\dot{x}_2 - 2\zeta\mu_c\dot{x}_1 + \mu_kx_2 - \mu_kx_1 &= f_{20}\cos(\omega t + \tau) \\ (0 < t < t_{s1}) \end{aligned} \quad (4)$$

当 M_1 粘滞时所受的合外力为

$$\begin{aligned} F_1 &= f_{10}\cos(\omega t_1 + \tau) - 2\zeta(1 + \mu_c)\dot{x}_1 + \\ &2\zeta\mu_c\dot{x}_2 - (1 + \mu_k)x_1 + \mu_k\hat{x}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$\hat{x}_2, \dot{\hat{x}}_2$ 为振子 M_1 与约束发生粘滞时 M_2 的位移和速度.

当 $0 < t < t_{s1}$, 方程 (5) 的解为

$$\begin{aligned} x_2 &= e^{-\eta_2 t} (d_2 \cos(\omega_{d2} t) + l_2 \sin(\omega_{d2} t)) + \\ &A_2 \sin(\omega t + \tau) + B_2 \cos(\omega t + \tau) + x_0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $x_0 = s_1$, 且

$$d_2 = x_{20} - A_2 \sin(\tau) - B_2 \cos(\tau) - x_0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} l_2 &= (\dot{x}_{20} + \eta_2(x_{20} - x_0) - (B_2 \eta_2 + \\ &A_2 \omega) \cos(\tau) - (A_2 \eta_2 - \\ &B_2 \omega) \sin(\tau)) / \omega_{d2} \end{aligned} \quad (8)$$

此时 x_{20}, \dot{x}_{20} 为 M_1 与约束碰撞瞬时的 M_2 位移和速度. 图 2(a) 为 M_1 粘滞时的响应图.

同理如果 M_2 粘滞, $\dot{x}_2 = 0, x_2 = s_2$, 并设其滞留时间为 t_{s2} , M_1 任意连续两次碰撞之间的方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\zeta(1 + \mu_c)\dot{x}_1 - 2\zeta\mu_c\dot{x}_2 + (1 + \mu_k)x_1 - \mu_kx_2 &= f_{10}\cos(\omega t + \tau) \\ (0 < t < t_{s2}) \end{aligned} \quad (9)$$

当 M_2 粘滞所受的合力为

$$\begin{aligned} F_2 &= (f_{20}\cos(\omega t_1 + \tau) - 2\zeta\mu_c\dot{x}_2 + \\ &2\zeta\mu_c\dot{x}_1 - \mu_kx_2 + \mu_k\hat{x}_1) / \mu_m \end{aligned} \quad (10)$$

$\hat{x}_1, \dot{\hat{x}}_1$ 为振子 M_2 与约束发生粘滞时 M_1 的位移和速度, 此时方程 (9) 的解为

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\eta_1 t} (d_1 \cos(\omega_{d1} t) + l_1 \sin(\omega_{d1} t)) + \\ &A_1 \cos(\omega t + \tau) + B_1 \cos(\omega t + \tau) + x_h \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $x_h = \mu_k s_2 / (1 + \mu_k)$ 且

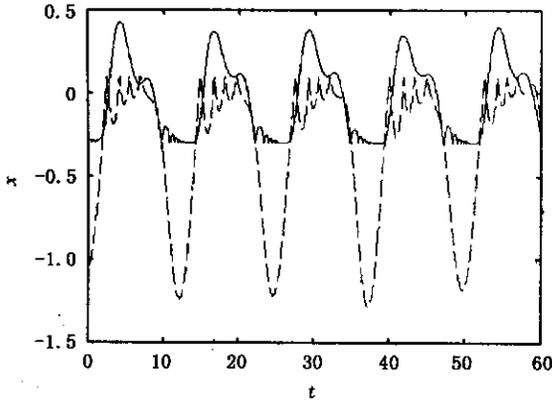
$$d_1 = x_{10} - A_1 \sin(\tau) - B_1 \cos(\tau) - x_h \quad (12)$$

$$l_1 = (\dot{x}_{10} + \eta_1(x_{10} - x_h)) - (B_1 \eta_1 +$$

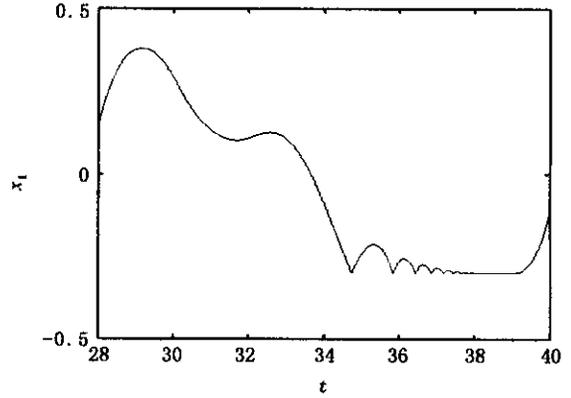
$$A_1 \omega) \cos(\tau) - (A_1 \eta_1 -$$

$$B_1 \omega) \sin(\tau) \} / \omega d_1 \quad (13)$$

x_{10} \dot{x}_{10} 为 M_2 与振子碰撞后瞬间 M_1 位移速度。



(a)



(b)

图2 两自由度碰撞系统发生粘滞时的响应图((b)是(a)的局部放大图)实线代表 x_1 虚线代表 x_2 参数值为:

$$\mu_k = 1, \mu_m = 1, \zeta = 0.05, s_1 = -0.3, s_2 = 0.1, R = 0.8, \omega = 0.5, f_{10} = 0.5, f_{20} = 0.5$$

Fig.2 Sticking response diagram for two-degree-of-freedom system((b)is local enlarged drawing): Solid line, broken line.

Parameters values: $\mu_k = 1, \mu_m = 1, \zeta = 0.05, s_1 = -0.3, s_2 = 0.1, R = 0.8, \omega = 0.5, f_{10} = 0.5, f_{20} = 0.5$

3 两点碰撞的周期运动与分叉

3.1 周期运动的确定

取 Poincaré 截面

$$\sigma = \{ (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \theta) \in R^4 \times S^1 \mid x_1 = s_1, \dot{x}_1 = \dot{x}_{1+} \}$$

其中 $\theta = \omega t$. 我们知道, Poincaré 截面上稳定的不动点(稳定的周期运动)可以通过直接数值积分的办法得出,但得不到不稳定的不动点. 系统的周期运动表示为周期 $n-p-q$ 运动, m 表示为外激励周期数, p 和 q 分别代表 M_1 与约束 B_1 和 M_2 与约束 B_2 的碰撞次数. 我们采用打靶法求解系统的不稳定的周期碰撞运动,即 Poincaré 截面上的不动点. 在迭代的过程中,当迭代两点之间的距离小于某一规定精度 ϵ 时,认为此时的点就是周期不动点. 上述过程可表示如下:

1) 首先选定一组初值进行迭代, f 表示一种迭代前后的映射关系,假设迭代的步长用 h 表示,其中第 i 次迭代为

$$(x_{\underline{x}}(i+1), \dot{x}_{\underline{x}}(i+1), \dot{x}_{\underline{x}}(i+1), \tau(i+1)) = f(x_{\underline{x}}(i), \dot{x}_{\underline{x}}(i), \dot{x}_{\underline{x}}(i), \tau(i)) \quad (14)$$

$$(x_{2+h}(i+1), \dot{x}_{1+h}(i+1), \dot{x}_{2+h}(i+1), \tau_{+h}(i+1)) = f(x_{\underline{x}}(i) + h \dot{x}_{\underline{x}}(i), \dot{x}_{\underline{x}}(i), \tau(i)) \quad (15)$$

$$(x_{2-h}(i+1), \dot{x}_{1-h}(i+1), \dot{x}_{2-h}(i+1), \tau_{-h}(i+1)) = f(x_{\underline{x}}(i) - h \dot{x}_{\underline{x}}(i), \dot{x}_{\underline{x}}(i), \tau(i)) \quad (16)$$

2) 判断满足不动点条件,满足精度要求结束,否则进行下一步,即:

对于第 i 次迭代,定义范数

$$\begin{aligned} \|d(i)\| &= ((x_{\underline{x}}(i+1) - x_{\underline{x}}(i))^2 + (\dot{x}_{\underline{x}}(i+1) - \dot{x}_{\underline{x}}(i))^2)^{1/2} \\ \|d_{+h}(i)\| &= ((x_{2+h}(i+1) - (x_{\underline{x}}(i) + h \dot{x}_{\underline{x}}(i)))^2 + (\dot{x}_{2+h}(i+1) - \dot{x}_{\underline{x}}(i))^2)^{1/2} \\ \|d_{-h}(i)\| &= ((x_{2-h}(i+1) - (x_{\underline{x}}(i) - h \dot{x}_{\underline{x}}(i)))^2 + (\dot{x}_{2-h}(i+1) - \dot{x}_{\underline{x}}(i))^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (17)$$

假设 ϵ 为某一规定精度,如果满足

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \|d(i)\| &< \epsilon \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|d_{-h}(i)\| &< \epsilon \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|d_{+h}(i)\| &< \epsilon \end{aligned} \quad (18)$$

此时就认为 $x_{\underline{x}}(i)$ 即为所求的值: $\hat{x}_{20} = x_{\underline{x}}(i)$.

3) 变换迭代参数 $x_2(i)$ 值. 通过对方程 (17) 的 3 个范数进行比较, 变换分为三种情况 (1) $x_2(i)$ 的值不变, 而把步长减半 (当 $\|d(i)\|$ 的值最小). (2) 把 $x_2(i)+h$ 赋给 $x_2(i)$ 当 $\|d_{+h}(i)\|$ 的值最小).

(3) 把 $x_2(i)-h$ 赋给 $x_2(i)$ 当 $\|d_{-h}(i)\|$ 的值最小). 把 $x_2(i)$ 的新值代入方程 (14) (15) 和 (16) 进行下一次迭代直到满足方程 (18).

同理对 $\dot{x}_1(i), \dot{x}_2(i), \tau(i)$ 分别进行迭代可分别求得 $\dot{x}_{10} = \dot{x}_1(i), \dot{x}_{20} = \dot{x}_2(i), \tau_0 = \tau(i)$.

为了求得的不动点更为精确, 以此时的 $\dot{x}_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \tau_0$ 作为初始映射点, 重新进行若干次的循环迭代, 最后得到 Poincaré 截面上不稳定的周期不动点 $X_0 = (x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \tau_0)$.

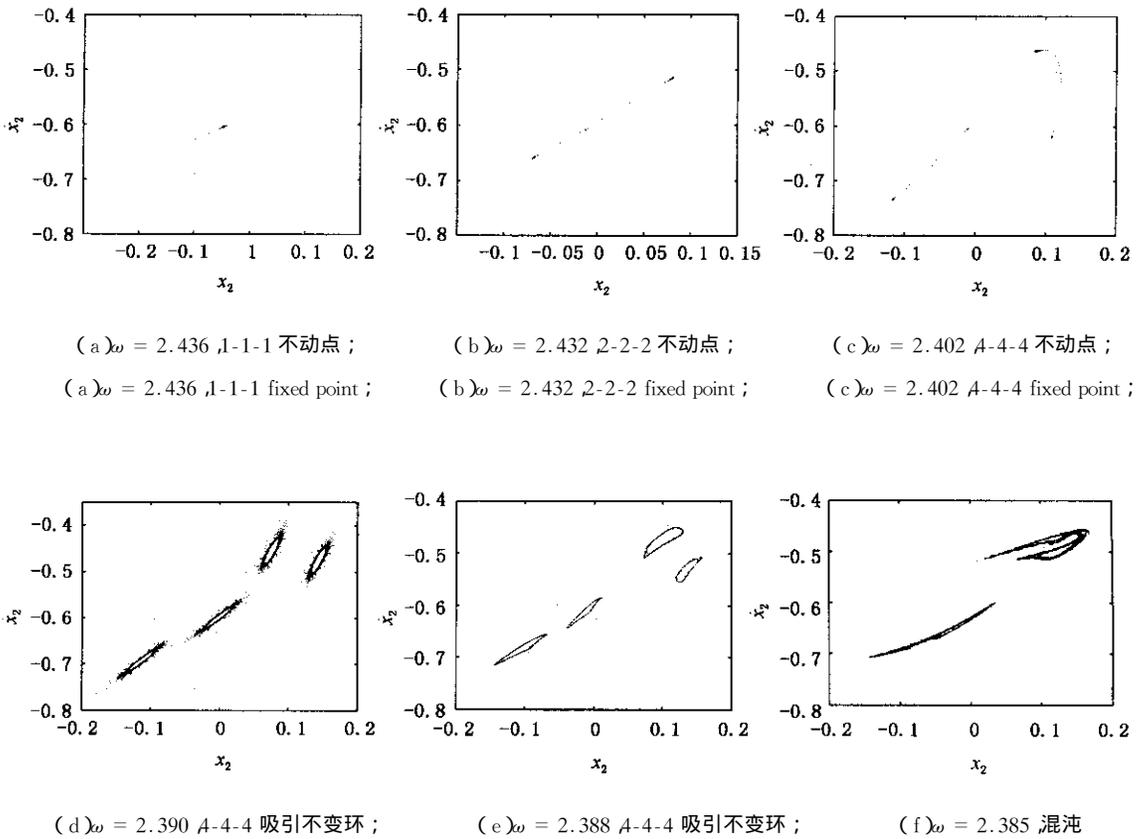
3.2 周期运动的分叉与混沌

3.2.1 Poincaré 映射投影图

选取图 1 所示碰撞振动系统的参数为:

$$\mu_m = 1, \mu_k = 1, R = 0.8, \zeta = 0.012, s_1 = -0.2, s_2 = 0.2, f_{10} = 0.5, f_{20} = 0.5$$

取 ω 是分叉参数, 碰撞振动系统将会发生周期倍化分叉 (如图 3 所示). 当 $\omega = 2.436$ 时, 系统产生稳定的周期 1-1-1 运动, 即在 Poincaré 截面上为稳定的不动点 (图 3(a)); $\omega = 2.432$ 时碰撞振动系统的周期 1-1-1 运动失稳, 分叉出稳定的周期 2-2-2 运动 (图 3(b)); $\omega = 2.402$ 时, 周期 2-2-2 运动失稳产生稳定的周期 4-4-4 运动 (图 3(c)); $\omega = 2.390$ 时, 4 个周期 4-4-4 点产生 Hopf 分叉生成 4 个圈 (图 3(d, e)); 当 ω 进一步减小时, 系统进入混沌 (图 3(f)).



(a) $\omega = 2.436$ 1-1-1 不动点; (b) $\omega = 2.432$ 2-2-2 不动点; (c) $\omega = 2.402$ 4-4-4 不动点;
 (a) $\omega = 2.436$ 1-1-1 fixed point; (b) $\omega = 2.432$ 2-2-2 fixed point; (c) $\omega = 2.402$ 4-4-4 fixed point;

(d) $\omega = 2.390$ 4-4-4 吸引不变环; (e) $\omega = 2.388$ 4-4-4 吸引不变环; (f) $\omega = 2.385$ 混沌
 (d) $\omega = 2.390$ 4-4-4 attracting invariant circles; (e) $\omega = 2.388$ 4-4-4 attracting invariant circles; (f) $\omega = 2.385$ chaos

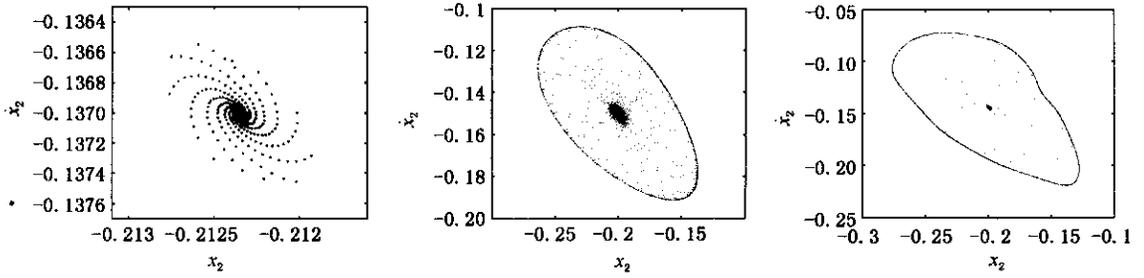
图 3 Poincaré 截面上的投影: 从倍化分叉进入混沌

Fig. 3 The projected Poincaré section: the route of period-doubling bifurcation to chaos

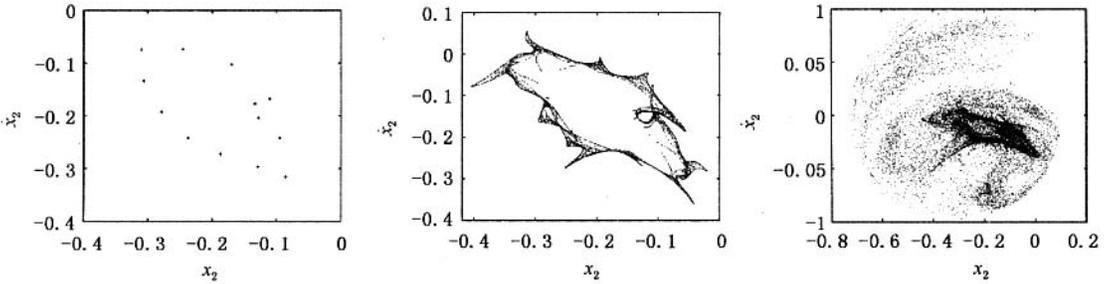
选取另一组参数: $\mu_m = 5, \mu_k = 1, R = 0.8, \zeta = 0.009, s_1 = -0.3, s_2 = 0.1, f_{10} = 0.5, f_{20} =$

0.5. 此时, 碰撞振动系统存在稳定的拟周期运动. 当 $\omega = 2.493$ 时, 在 Poincaré 截面上产生吸引的

Hopf 分叉不变圈(图 4(b)).当 ω 继续减小时,系统
拟周期运动经环面变形、锁相最后进入混沌,如图



(a) $\omega = 2.502$ 1-1 不动点; (b) $\omega = 2.493$ 吸引不变环; (c) $\omega = 2.480$ 吸引不变环(环面变形);
(a) $\omega = 2.502$ $q = 1/1$ fixed point; (b) $\omega = 2.493$ attracting invariant circles; (c) $\omega = 2.480$ attracting invariant circles (deformed invariant circles);



(d) $\omega = 2.449$ 锁相; (e) $\omega = 2.441$ 混沌; (f) $\omega = 2.434$ 混沌;
(d) $\omega = 2.449$ phase locking; (e) $\omega = 2.441$ chaos; (f) $\omega = 2.434$ chaos

图 4 Poincaré 截面投影图:从 Hopf 分叉通向混沌.

Fig. 4 The projected Poincare section: the route of Hopf bifurcation to chaos

3.2.2 分叉图

取 ω 为分叉参数,在第一组参数的情况下,分叉图如图 5(a)所示.随着 ω 的变化,经过倍化分叉

后,发生 Hopf 分叉.

在第二种分叉参数情况下,分叉图如图 5(b)所示.

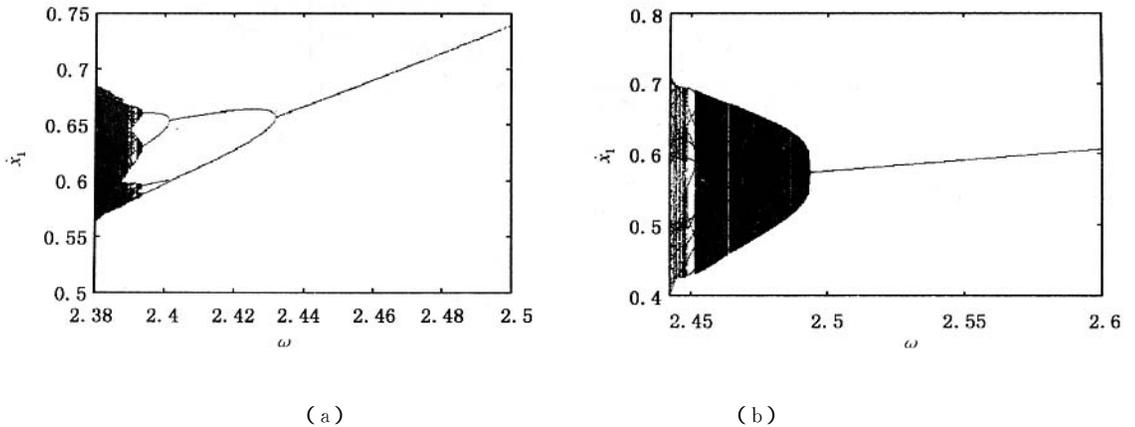


图 5 分叉图

Fig. 5 Bifurcation diagrams

4 结论

本文建立了两自由度两点碰撞振动系统的动力学模型,分析了系统存在的复杂运动现象.首先分析了系统的粘滞运动问题.然后利用打靶法,采用变步长迭代,来求解 Poincaré 截面上的不稳定的周期运动不动点.进一步通过数值模拟,研究周期 1-1-1 运动的 Hopf 分叉和周期倍化分叉,并描述了参数变化时这两种分叉情况下系统向混沌的转化过程.

参 考 文 献

- 1 乐源,谢建华,丁旺才.一类两自由度碰撞振动系统的 Hopf 分叉和混沌.动力学与控制学报,2004,2(3):36~41(Le Y,Xie JH,Ding WC.Hopf bifurcation and chaos of a two-degree-freedom vibro-impact system. *Journal of dynamics and control* 2004,2(3) 36~41(in Chinese))
- 2 Albert C.J.Luo,Lidi chen.Periodic motions and grazing in

a harmonically forced,piecewise,linear oscillator with impacts. *Chaos,Solitons & Fractals* 2005,24(2):567~578

- 3 丁旺才,谢建华,李国方.三自由度碰撞振动系统的周期运动稳定性与分岔.工程力学,2004,24(3):123~128(Ding WC,Xie JH,Li GF.Stability and bifurcation of periodic motion in a three-degree-freedom vibro-impact system. *Engineering Mechanics* ,2004,24(3):123~128(in Chinese))
- 4 Wagg DJ.Periodic sticking motion in a two-degree-of-freedom impact oscillator. *Int. J. Non-Linear Mech.* ,2005,40(8):1076~1087
- 5 Wagg DJ.Rising phenomena and the multi-sliding bifurcation in a two-degree of freedom impact oscillator. *Chaos,Solitons & Fractals* 2004,22(3):541~548
- 6 李德信,徐建学.求解非线性动力系统周期解推广的打靶法.应用力学学报,2003,20(4):80~85(Li DX,Xiu JX.Generalized shooting method for determining the periodic orbit of the nonlinear dynamical system. *Chinese Journal of Applied Mechanics* ,2003,20(4):80~85(in Chinese))

PERIODIC MOTION AND BIFURCATION OF A VIBRO-IMPACT SYSTEM WITH TWO MOTION LIMITING CONSTRAINTS*

Lin Mei Ding Wangcai Wu Junhu

(School of Mechatronic Engineering,Lanzhou Jiaotong University,Lanzhou 730070,China)

Abstract The dynamical model of a two-degree-of-freedom vibro-impact system with two motion limiting constraints was established, whose sticking conditions were given. The analysis shows that there exist sticking motions. According to the shooting method, the unstable periodic motion of vibro-impact, i. e. the fixed point of Poincaré section, was solved by the method of varied step and gradual iteration. Hopf bifurcation and period-doubling bifurcation were analyzed under certain parameters by numerical simulation. At the same time the quasi-periodic responses of the system represented by invariant circles in the projected Poincaré section of two-degree-of-freedom system with two motion limiting constraints were obtained by numerical simulations. As the controlling parameter varied further, the routes of the two-degree-of-freedom system with two motion limiting constraints to chaos via quasi-period bifurcation and period-doubling bifurcation were investigated respectively.

Key words vibro-impact, two constraints, periodic motion, Poincaré map, bifurcation, chaos