第 4 卷第 1 期
2006 年 3 月

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.4 No.1
Mar. 2006

一个三维非线性系统的混沌动力学特征

张丽丽[1]　雷友发[2]

(1.广东工业大学应用数学学院,广州　510090)(2.仲恺农业技术学院计算科学系,广州　510225)

摘要　根据三维混沌系统 Lorenz 吸引子和 Chen 's 吸引子线性部分的系数特征,构造了一个三维非线性动力系统,并研究了其混沌动力学特征,包括相轨迹图、最大 Lyapunov 指数、Lyapunov 指数谱和 Poincare 映射.这些特征都表明，该系统具有混沌吸引子.

关键词　混沌反控制,三维混沌系统,Lyapunov 指数,Poincare 映射

引言

自从 1963 年发现了 Lorenz 吸引子以来,混沌得到了迅猛的发展.综观 20 世纪,混沌掀起了继相对论和量子力学之后的第三次物理学大革命,是当今举世瞩目的前沿课题和研究热点之一.目前,混沌已经渗透到包括生物学、医学、社会、经济、信息控制等各个领域,因此,对混沌研究的意义和影响是深远的.

近十多年来,混沌研究已经逐步从认识和理解混沌转变到控制和利用混沌[1~3].在控制和利用混沌中,人们经常需要刻意产生混沌或加强系统的混沌行为,即混沌反控制.目前,已有众多混沌反控制的研究成果[1~10].

根据混沌反控制理论,本文将首先构造出一个三维非线性系统,然后讨论该系统的混沌动力学特征.

1　一个三维非线性系统的构造

1963 年，Lorenz 发现了 Lorenz 吸引子[2]

$$\begin{cases}\dot{x} = a(y-x)\\ \dot{y} = -xz - y + cx\\ \dot{z} = xy - bz\end{cases}$$

其中 $a = 10, b = 8/3, c = 28$.

1999 年,Chen 发现了另一个混沌吸引子 Chen 's 吸引子[1]

$$\begin{cases}\dot{x} = a(y-x)\\ \dot{y} = -xz + cy + (c-a)x\\ \dot{z} = xy - bz\end{cases}$$

其中 $a = 35, b = 3, c = 28$.

设系统线性部分的系数矩阵为 $B = (b_{ij})_{3\times3}$，则 Lorenz 吸引子满足 $b_{11}b_{22} > 0$,Chen 's 吸引子满足 $b_{11}b_{12} < 0$,本文构造的三维非线性系统满足 $b_{11}b_{12} = 0$,其方程为

$$\begin{cases}\dot{x} = a(y-x)\\ \dot{y} = -xz + cx\\ \dot{z} = xy - bz\end{cases}\tag{1}$$

其中 $a = 16, b = 2, c = 30$.

2　三维非线性系统(1) 的混沌动力学特征

2.1　系统(1) 的相轨迹图

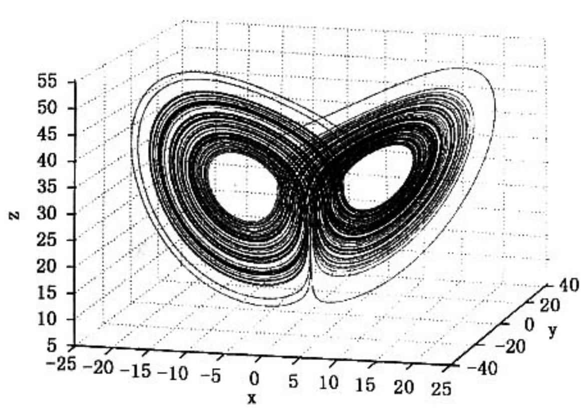

图 1　系统(1) 的相轨迹图

Fig.1　The space trajectory of system (1)

2005-08-09 收到第 1 稿,2005-11-20 收到修改稿.

2.2 系统(1) 的 Lyapunov 指数

在非线性动力系统分析中,Lyapunov 指数是定量描述吸引子性质的重要参数,当一系统(非发散) 的 Lyapunov 指数出现正值时,系统将是混沌的[11].

2.2.1 最大 Lyapunov 指数

本文选取积分步长 $\tau = 0.01$,去掉迭代的前 4000 个点,用后面的 N 个点计算系统(1) 的最大 Lyapunov 指数如表 1.

表 1 系统(1) 的最大 Lyapunov 指数

Table 1 The largest Lyapunov exponent of system (1)

initial values	iterative times N	results
$x_0 = [13.5, 13.5, 30]^T$ $y_0 = [13.5, 13.5001, 30]^T$	1×10^5	0.8201
	2×10^5	0.8243
	3×10^5	0.8237
	4×10^5	0.8228
	5×10^5	0.8246
$x_0 = [13.5, 13.5, 30]^T$ $y_0 = [14.5, 13.5, 30]^T$	1×10^5	0.8177
	2×10^5	0.8215
	3×10^5	0.8171
	4×10^5	0.8138
	5×10^5	0.8121
$x_0 = [13.5, 13.5, 30]^T$ $y_0 = [13.6, 13.5, 30]^T$	1×10^5	0.8262
	2×10^5	0.8265
	3×10^5	0.8254
	4×10^5	0.8240
	5×10^5	0.8257

其中 x_0, y_0 为任选的两个很靠近的初始状态. 表 1 说明系统(1) 的最大 Lyapunov 指数近似为 0.8,表明系统(1) 存在混沌.

2.2.2 Lyapunov 指数谱

本文选取积分步长 $\tau = 0.01$,去掉迭代的前 4000 个点,用后面的 N 个点计算系统(1) 的 Lyapunov 指数谱如表 2.

表 2 系统(1) 的 Lyapunov 指数谱

Table 2 The Lyapunov exponent spectra of system (1)

initial values	iterative times N	results
$x_0 = [13.5, 13.5, 30]^T$ $x_1 = [14.5, 13.5, 30]^T$ $x_2 = [13.5, 14.5, 30]^T$ $x_3 = [13.5, 13.5, 31]^T$	1×10^5	0.8177 ;- 0.0142 ;- 18.8061
	2×10^5	0.8215 ;- 0.0094 ;- 18.8150
	3×10^5	0.8171 ;- 0.0049 ;- 18.8148
	4×10^5	0.8138 ;- 0.0002 ;- 18.8161
	5×10^5	0.8121 ; 0.0044 ;- 18.8181

其中 x_0, x_1, x_2, x_3 为任选的四个初始状态. 表 2 说明系统(1) 的 Lyapunov 指数谱近似为 0.8, 0, - 18.8,表明系统(1) 具有混沌吸引子.

2.3 系统(1) 的 *Poincare* 映射

Poincare 映射[12] 是一种经典的分析动力系统的技术,可以通过观察 Poincare 截面上截点的情况判断是否发生混沌.当 Poincare 截面上有且仅有一个不动点或少数离散点时,运动是周期的;当 Poincare截面上是一封闭曲线时,运动是准周期的;当 Poincare 截面上是一些成片的具有分形结构的密集点时,运动是混沌的.

在平面 $z = c$ 中,取 Poincare 截面 Σ 满足

$$\{q^+, q^-\} \subset \Sigma \subset \{(x, y, z) \mid z = c, \mid xy \mid < bc\} \cup \{q^+, q^-\}$$

其中 $q^+ = (\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c)^T, q^- = (-\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, c)^T$ 为系统的两个非零平衡点. 构造 Poincae 映射为 $P: \Sigma \to \Sigma$. 由于系统(1) 不存在解析解,故数值模拟[13] 其 Poincare 映射. 为使图像更易于观察,本文选取坐标轴 $u = x - 0.9577y$; $v = 0.9577x + y$,数值模拟结果如图 2. 该结果表明非线性系统(1) 的运动是混沌的.

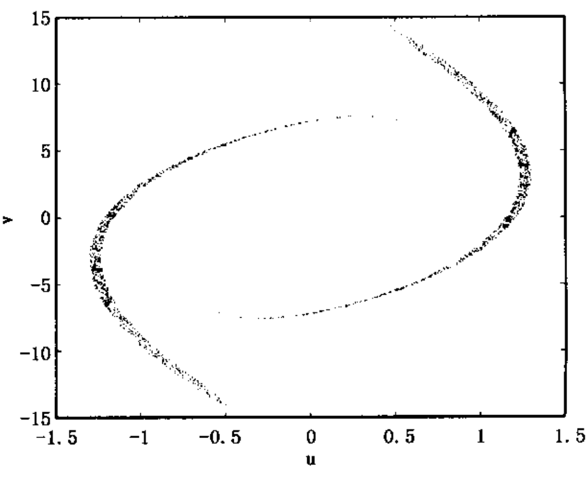

图 2 系统(1) 的 Poincare 映射

Fig. 2 The Poincare map of system (1)

3 结论

本文首先根据 Lorenz 吸引子和 Chen 's 吸引子线性部分系数的特征,构造了一个三维非线性动力系统(1),然后分别从其相轨迹图、最大 Lyapunov 指数、全部 Lyapunov 指数以及其 Poincare 映射研究了该系统的混沌动力学特性. 作者将进一步研究非线性动力系统的混沌反控制方法.

参 考 文 献

1 Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9: 1465～1466

2 Lü J, Chen G. A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(3): 659～661

3 Lü J, Chen G, Zhang S. Dynamical analysis of a new chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(5): 1001～1015

4 Wang XF, Chen G. Yet another algorithm for chaotifying control of discrete chaos. *Journal of Control Theory*, 2000, 17(4): 336～340

5 Wang XF, Chen G. On feedback anticontrol of discrete chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1435～1441

6 Chen G, Lai D. Feedback anticontrol of discrete chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1998, 8(7): 1585～1590

7 Chen G. Chaos: control and anti-control. *IEEE Circuit System, Newslett*, 1998, 3: 1～5

8 Lü J, Chen G, Zhang S. The compound structure of a new chaotic attractor. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 14: 669～672

9 罗晓曙,付金阶,谈志强,王力虎,郭维. 混沌的反控制研究及其应用前景. 华夏医学,2000,13(2):121～123(Luo Xiaoshu, Fu Jinjie, Tan Zhiqiang, Wang Lihu, Guo Wei. Study of the anticontrol of chaos and its applications prospects. *Acta Medicinae Sinica*, 2000, 13(2): 121～123 (in Chinese))

10 Yang Xiaosong, Li Qingdu. Chaotic attractor in a simple hybrid system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(10): 2255～2256

11 赖建文,周世平,李国辉,徐得名. 非重正交的李雅普诺夫指数谱的计算方法. 物理学报,2000,49(12):2328～2332(Lai Jianwen, Zhou Shiping, Li Guohui, Xu Deming. A method for computing Lyapunov exponents spectra without reorthogonalization. *Acta Physica Sinica*, 2000, 49(12): 2328～2332(in Chinese))

12 Parker TS, Chua LO. Practical numerical algorithms for chaotic systems. New York: Springer-Verlag World Publishing Corp, 1992

13 张波,李忠,毛宗源,庞敏熙. Poincare 映射的数值算法及其在永磁同步电机混沌分析中的应用. 控制理论与应用,2001,18(5):796～800(Zhang Bo, Li Zhong, Mao Zongyuan. The numerical algorithm of Poincare map and its application to the analysis of the chaotic phenomenon in permanent-magnet synchronous motors. *Control Theory and Applications*, 2001, 18(5): 796～800(in Chinese))

THE CHAOTIC CHARACTERS OF A 3-DIMENSIONAL NON-LINEAR DYNAMICS

Zhang Lili[1]　Lei Youfa[2]

(1. *Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou* 510090, *China*)

(2. *Department of Basic Science, Zhongkai University of Agriculture and Technology, Guangzhou* 510225, *China*)

Abstract Based on the linear coefficient character of Lorenz attractor and Chen's attractor, we coined a 3-dimension non-linear dynamics, and studied its chaotic characters, including the space trajectory, the largest Lyapunov exponent, the Lyapunov exponent spectra and the Poincare map. All these characters show that the non-linear dynamics exists chaotic attractor.

Key words anti-control of chaos, 3-dimensional chaotic system, Lyapunov exponent, Poincare map

Received 09 August 2005, revised 20 November 2005.