

# 基于 Laplace 变换的线性系统碰撞过程分析方法

赵登峰

(西南科技大学制造科学与工程学院, 绵阳 621002)

**摘要** 探讨了用 Laplace 变换原理分析线性系统碰撞接触过程的一般方法. 首先, 建立了线性系统的碰撞模型, 并导出了分析的基本原理及计算公式, 同时还给出了与之对应的时域卷积积分形式; 然后, 给出了集中质量、弹性杆、梁等子系统的传递函数, 并以这些子系统之间的相互碰撞为分析实例, 验证了该方法的有效性. 分析结果表明传统的碰撞恢复系数远不能揭示碰撞过程的动力学现象, 系统的动态特性和碰撞前的运动状态都强烈地影响着碰撞过程和碰撞后果; 该方法具有概念明晰、通用性强、数值计算高效等优点, 且能得到较多的解析结果.

**关键词** 碰撞, 线性系统, 恢复系数

## 引言

在研究结构碰撞的工程问题中, 人们不仅关心碰撞前后物体的运动状态的变化, 碰撞过程的运动细节也已成为了该领域中的重要课题. 最初 Newton 引入了碰撞的恢复系数  $e$  来刻画碰撞发生前后运动状态的变化, 将其定义为碰撞前后法向分离速度与接近速度的比值, 结合动量守恒方程, 可以实现对碰撞问题的求解. 虽然用恢复系数刻画碰撞特性有着不可抹杀的实用意义, 但是放弃了对碰撞过程细节的分析, 其不完备性是显然的. 目前, 计算机仿真技术已经能对许多复杂的碰撞过程进行十分详尽的仿真研究, 但这并不意味着弄清了碰撞动力学过程的作用机理以及碰撞结构参数对碰撞过程的影响, 因此, 碰撞过程的理论研究仍然具有重要意义. 张继业等人和吴家强等人对弹性直杆的冲击和碰撞问题采用模态分析等方法进行解析和数值研究<sup>[1,2]</sup>; 邢誉峰用解析的方法分析了弹簧-质量、弹性杆与梁的碰撞问题<sup>[3]</sup>; 金栋平等人研究了线性系统碰撞特性参数的识别及其与系统模态的关系等问题<sup>[4]</sup>; 王东生等人将直杆碰撞模型用于分析桥梁伸缩缝在地震时的碰撞行为研究<sup>[5]</sup>; 笔者在对冲击减振器减振理论的研究中发现, 在较高频率的激励下, 碰撞持续不断地发生, 采用碰撞恢复系数瞬时碰撞特性的理论结论将与实验结论严重不相符合,

这促使我们寻求分析碰撞过程的简洁而有效的方法. 本文将两个发生相互碰撞结构的动力学特性按一般线性系统处理, 探讨了用 Laplace 变换方法分析碰撞接触过程的一般方法, 并同时给出了与其对应的时域卷积积分公式, 与其它研究者所采用的方法比较, 该方法可得到较多的解析结果, 且具有很强的通用性和很高的数值计算效率. 实例表明传统的碰撞恢复系数远不能揭示碰撞过程的动力学现象, 系统动态特性和碰撞前的运动状态都强烈地影响着碰撞过程和碰撞后的系统运动.

## 1 线性系统碰撞的力学模型

图1所示, 发生相互碰撞的两个线性系统, 将在碰撞接触面上发生碰撞接触, 两个线性系统的动力特性可用其接触面上的受力与位移的传递函数表达, 其响应与激励的 Laplace 变换关系为

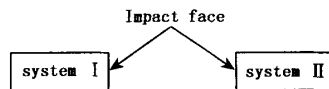


图1 线性系统碰撞力学模型

Fig. 1 The impact-model of linear system

$$\left. \begin{aligned} Y_1(s) &= H_1(s)F_1(s) + Y_{10}(s) \\ Y_2(s) &= H_2(s)F_2(s) + Y_{20}(s) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

与式(1)对应且等效的时域关系则为

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= h_1(t) * f_1(t) + y_{10}(t) \\ y_2(t) &= h_2(t) * f_2(t) + y_{20}(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(1)中,  $Y_1(s), Y_2(s), F_1(s), F_2(s)$  是两系统接触面上位移和受力的 Laplace 变换,  $H_1(s), H_2(s)$  是传递函数,  $Y_{10}(s), Y_{20}(s)$  是与初始条件有关的自由响应 Laplace 变换. 式(2)中  $h_1(t), h_2(t)$  是单位脉冲响应, 其余各符号的意义和式(1)完全对应. “\*”表示卷积分.

未发生碰撞接触时, 两系统都处于自由运动状态, 式中只有自由响应项. 发生接触碰撞时, 系统的 Laplace 变换量和时域量分别满足

$$\left. \begin{aligned} Y_1(s) &= Y_2(s) \\ -F_1(t) &= F_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= y_2(t) \\ -f_1(t) &= f_2(t) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

将式(1)~(2)代入式(3)~(4)可以解得碰撞力为

$$-F_1(s) = F_2(s) = (Y_{10}(s) - Y_{20}(s)) / (H_1(s) + H_2(s)) \quad (5)$$

$$-f_1(t) = f_2(t) = (y_1(t) - y_2(t)) / (h_1(t) + h_2(t)) \quad (6)$$

式(6)中, “/”表示反卷积分, 碰撞力可由式(6)直接求出, 也可以等效地对式(5)进行 Laplace 逆变换求得. 然后, 用条件:  $f_2(t) = 0$  求得准确的碰撞时间, 将碰撞力函数  $F(s)$  和  $f(t)$  作截断处理, 得到有限作用时间的真实碰撞力, 再代入式(1)即可求得碰撞的真实响应过程. 从以上分析可以看出, 碰撞过程及后果决定于初始运动状态和系统的动态特性, 决不是简单的碰撞恢复系数所能表示清楚的.

在有限自由度的传递函数分析方法中,  $H(s)$  和  $Y_0(s)$  可以表示成分式形式、极点-零点形式、极点-留数形式等, 碰撞过程的分析实际上是各系数的运算过程, 可以使计算结果不包含理论误差; 而无限自由度的情况下,  $H(s)$  和  $Y_0(s)$  一般都要表示为无穷级数形式, 如果凑巧也有可能表示成初等函数的形式, 前者不可避免地存在截断数值误差, 后者则可能得到解析解答; 通过模态振型函数, 传递函数法可以方便的得到系统其它部位的碰撞响应; 在时域分析方法中, 只要能获得精确的  $h(t), y(t)$  和碰撞时间, 就可以得到精确解答, 即

便是在数值运算中也是如此, 特别是分析中只需要卷积积分和反卷积积分两种运算, 并且这两种数值运算速度都极高, 因而时域分析的数值方法程序极简单计算效率也极高. 此外, 对于  $h_1(0) + h_2(0) = 0$  的情况(如集中质量的碰撞)时域分析方法将发生溢出错误, 而传递函数分析方法将给出含有  $\delta(t)$  的碰撞力解答.

作为实例, 我们分析了集中质量、匀质弹性杆、悬臂梁之间的碰撞问题, 得到了许多解析结果和数值结果. 在此, 先分析各系统的  $H(s), Y_0(s), h(t), y(t)$ , 再分析其碰撞过程.

## 2 计算实例中系统动态特性和初值响应分析

集中质量为  $m$  的系统, 其传递函数、单位脉冲响应、初值响应都是简单的

$$\begin{aligned} H(s) &= 1/ms^2, h(t) = t/m, \\ Y_0(s) &= y(0)/s + v(0)/s^2, \\ y_0(t) &= y(0) + v(0)t \end{aligned} \quad (7)$$

弹性杆的情形我们分自由弹性杆和一端固定的弹性杆两种情况来讨论. 截面刚度为  $EA$ 、长度为  $l$ 、密度为  $\rho$  的弹性杆, 运动方程和边界条件为

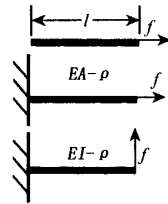


图2 实例中的子系统模型

Fig. 2 The subsystem model in examples

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y(x, t)}{c^2 \partial t^2} = 0$$

固定杆:

$$y(0, t) = 0, \partial y(l, t) / \partial x = f(t) / EA$$

自由杆:

$$\partial y(l, 0) / \partial x = 0, \partial y(l, t) / \partial x = f(t) / EA \quad (8)$$

式(8)中的  $c = \sqrt{EA/\rho}$  为纵波波速. 截面抗弯刚度为  $EI$ 、长度为  $l$ 、密度为  $\rho$  的悬臂梁, 其运动方程和边界条件应为

$$\frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y(x, t)}{c^2 \partial t^2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 y(0,t) &= 0, \partial y(0,t)/\partial x = 0, \\
 \partial^2 y(l,t)/\partial x^2 &= 0 \\
 \partial^3 y(l,t)/\partial x^2 &= -f(t)/EI \quad (9)
 \end{aligned}$$

式(6)中的  $c = \sqrt{EI/\rho}$ . 对式(8)~(9)的变量  $t$  进行 Laplace 变换可得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 Y(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2} Y(x,s) &= 0 \\
 \text{固定杆:} \\
 Y(0,s) &= 0, \partial Y(l,s)/\partial x = F(s)/EA \\
 \text{自由杆:} \\
 \partial Y(l,s)/\partial x &= 0, \partial Y(l,s)/\partial x = F(s)/EA \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 Y(x,s)}{\partial x^4} + \frac{s^2}{c^2} Y(x,s) &= 0 \\
 Y(0,s) &= 0, \partial Y(0,s)/\partial x = 0, \\
 \partial^2 Y(l,s)/\partial x^2 &= 0 \\
 \partial^3 Y(l,s)/\partial x^2 &= -F(s)/EI \quad (11)
 \end{aligned}$$

式(10)~(11)的通解应为

$$\begin{aligned}
 Y(x,s) &= A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \quad (12) \\
 Y(x,s) &= Ach(\lambda x) + B\cos(\lambda x) + \\
 &Csh(\lambda x) + D\sin(\lambda x) \quad (13)
 \end{aligned}$$

式(12)中的  $\lambda$  满足  $\lambda^2 = -s^2/c^2$ , 式(13)中的  $\lambda$  满足  $\lambda^4 = s^2/c^2$ . 消去参数  $A, B, C, D$  之后可得到系统的传递函数及其分式展开

$$\begin{aligned}
 \text{固定杆:} \\
 H(s) &= \frac{Y(l,s)}{F(s)} = \frac{\sin \epsilon}{K\epsilon \cos \epsilon} = \\
 &\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{s^2 + [(k-0.5)\pi/T]^2} \\
 \text{自由杆:} \\
 H(s) &= \frac{Y(l,s)}{F(s)} = \frac{\cos \epsilon}{K\epsilon \sin \epsilon} = \\
 &\frac{1}{m} \left[ \frac{1}{s^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{s^2 + (k\pi/T)^2} \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

表 1

Table 1 The poles of cantilever beam

$k$	$\epsilon_k/\pi$
1	0.596864163
2	1.494175614
3	2.500246946
4	3.499989319
5	4.500000461
6	5.499999980
$k$	$\approx (k-0.5)$

悬臂梁:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{ch\epsilon \sin \epsilon - sh\epsilon \cos \epsilon}{K\epsilon^3(1 + ch\epsilon \cos \epsilon)} = \\
 &\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{s^2 + \epsilon_k^4/T^2} \quad (15)
 \end{aligned}$$

式(14)中的  $K = EA/l, T = l/c, \epsilon = sT$ , 式(15)中的  $K = EI/l^3, T = \sqrt{m/K}, \epsilon_k$  是传递函数的  $\epsilon$  奇点序列(见表 1), 两式中  $m = \rho l$ . 对上式进行 Laplace 逆变换可求得单位脉冲响应函数为

$$\begin{aligned}
 \text{固定杆:} \\
 h(t) &= \frac{2T}{m\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin[(k-0.5)\pi t/T]}{k-0.5} \right] \\
 \text{自由杆:} \\
 h(t) &= \frac{1}{m} \left[ t + \frac{2T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi t/T)}{k} \right] \quad (16) \\
 \text{悬臂梁:} \\
 h(t) &= \frac{4T}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\epsilon_k^2 t/T)}{\epsilon_k^2} \quad (17)
 \end{aligned}$$

三个实例的单位脉冲响应函数中, 固定杆是方波, 自由杆是台阶函数, 其跃变是冲击波反射回碰撞接触面造成的. 而悬臂梁的单位脉冲函数是复杂的近似周期函数.

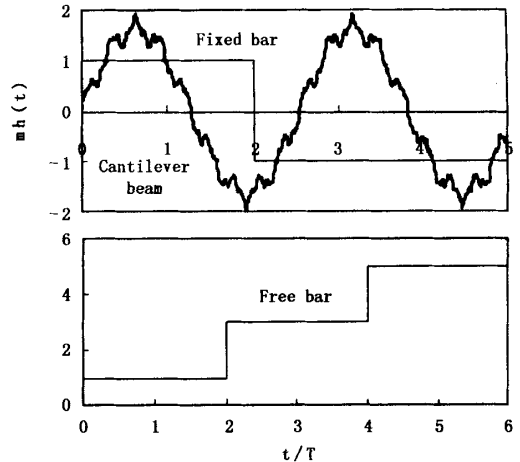


图 3 实例的单位脉冲响应函数

Fig. 3 The unit impulse response of the subsystem in examples

### 3 碰撞分析实例

通常情况下无限自由度碰撞问题的解答仅能表示成无穷级数的形式, 因此本文仅给出具有相同  $T$  值的两自由弹性杆碰撞的解析解, 其他碰撞实例仅给出时域方法的数值结果.

3.1 等 T 值自由弹性杆碰撞

相同 T 值的两弹性杆也具有相同的 ε 值,并假定碰撞之前两杆的运动只有平动而没有振动,则两杆的传递函数和初始响应的 Laplace 变换为

$$H_1(s) = \frac{\cos \epsilon}{K_1 \epsilon \sin \epsilon}, H_2(s) = \frac{\cos \epsilon}{K_2 \epsilon \sin \epsilon},$$

$$Y_{10}(s) = \frac{v_{10}}{s^2}, Y_{20}(s) = \frac{v_{20}}{s^2} \quad (18)$$

式(18)中的  $v_{10}, v_{20}$  是两杆碰撞前的速度.代如式(3)可以求得接触力的 Laplace 变换为

$$-F_1(s) = F_2(s) = \frac{v_{12} m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{\sin \epsilon}{\epsilon \cos \epsilon} \right) \quad (19)$$

式(19)中  $v_{12} = v_{10} - v_{20}$  是两杆碰撞前的相对速度,  $m_1, m_2$  是两杆的质量.与式(14)~(16)比较可知接触力是周期为 4T 幅值为  $v_{12} m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  的方波.按照  $f_2 > 0$  的条件作截断处理可得

$$-F_1(s) = F_2(s) = \frac{v_{12} m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{\sin \epsilon}{\epsilon \cos \epsilon} \right) \times (1 + e^{-2Ts}) \quad (20)$$

即将方波延时半周期 2T 再与原方波叠加.将式(17)代入式(1)可以求得位移的 Laplace 变换

$$Y_1(s) = \frac{v_{10}}{s^2} - \frac{v_{12} m_2}{(m_1 + m_2) s^2} (1 + e^{-2Ts}),$$

$$Y_2(s) = \frac{v_{20}}{s^2} - \frac{v_{12} m_1}{(m_1 + m_2) s^2} (1 + e^{-2Ts}) \quad (21)$$

对式(21)进行 Laplace 逆变换可求得时域响应

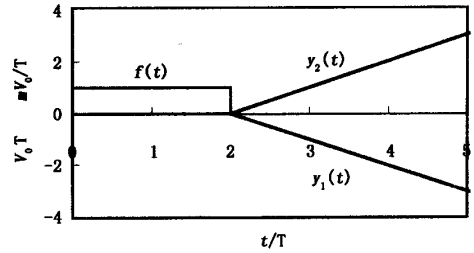
$$y_1(t) = \frac{1}{m_1 + m_2} \times \begin{cases} (v_{10} m_1 + v_{20} m_2) t & 0 < t < 2T \\ (v_{10} m_1 + v_{20} m_2) t - v_{12} m_2 (t - 2T) & 2T < t \end{cases}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{m_1 + m_2} \times \begin{cases} (v_{10} m_1 + v_{20} m_2) t & 0 < t < 2T \\ (v_{10} m_1 + v_{20} m_2) t + v_{12} m_2 (t - 2T) & 2T < t \end{cases} \quad (22)$$

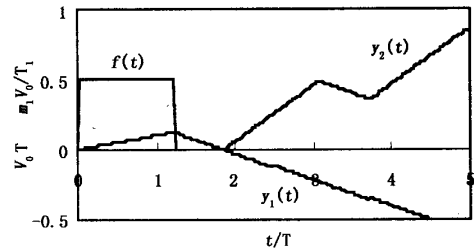
3.2 碰撞实例的数值分析结论

我们分析了等 T 自由弹性杆、非等 T 自由弹性杆、集中质量 - 固定杆、自由杆 - 悬臂梁的碰撞,

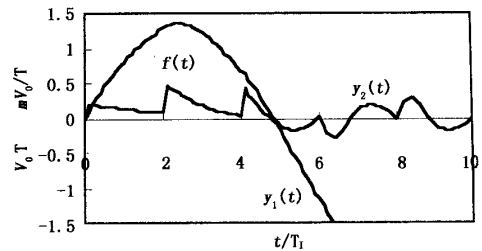
分析中均假定碰撞前的自由运动中没有振动的成分.碰撞的位移响应和接触力如图 4 所示,结论说明如下:



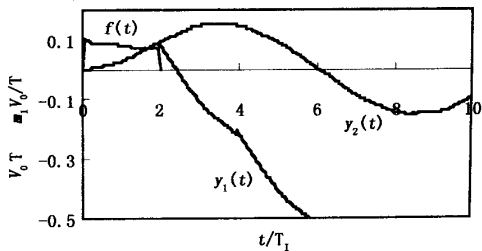
(a)



(b)



(c)



(d)

图 4 碰撞过程的分析实例

Fig. 4 The analysis examples of the impact process

(1) 等 T 自由弹性杆的碰撞中,接触力波形是宽度为 2T 幅值为  $v_{10} m_1 m_2 / (m_1 + m_2) T$  的矩形脉冲,即接触时间是冲击波由碰撞端开始经过非碰撞

端再反射回碰撞端总时间. 在接触期间, 碰撞端等速运动, 速度符合完全非弹性碰撞的速度关系; 脱离接触后, 速度符合完全弹性碰撞的速度关系, 两弹性杆保持平动, 没有残留振动. 典型响应如图 4(a) 所示, 两杆相同, 碰撞前速度等值相反为  $v_0$ .

(2) 非等  $T$  自由弹性杆的碰撞中, 接触力一般是台阶状波形, 其阶跃处也是由冲击波的反射造成的, 阶跃的次数与具体碰撞条件有关. 位移响应波形都为锯齿状波形, 脱离接触后, 除了平动之外都有残留的锯齿状周期振动, 碰撞恢复系数  $e < 1$ . 典型响应如图 4(b) 所示, 两杆  $T_2 = 0.75T_1$ , 碰撞前速度等值相反为  $v_0$ .

(3) 集中质量 - 固定杆的碰撞中, 接触力一般是幅值不规则的锯齿状波形, 锯齿的转折也是由冲击波的反射造成, 转折的次数与具体碰撞条件有关. 碰撞后固定杆中会保留有波形复杂的周期振动, 碰撞恢复系数  $e < 1$ . 典型响应如图 4(c) 所示, 两质量相等为  $m$ , 碰撞前固定杆静止, 集中质量速度  $v_0$ .

(4) 自由杆 - 悬臂梁的碰撞中, 接触力是不规则的单脉冲, 脉冲宽度是自由杆的冲击波反射传播时间  $2T$ . 脱离接触后自由杆和悬臂梁中都有残留的振动, 典型响应如图 4(d) 所示.

#### 4 结语

采用 Lapace 变换方法和时域卷积积分方法进行线性系统碰撞过程分析具有概念清晰、方法简洁, 并具有很强的通用性, 只要知道系统的传递函数或脉冲响应函数即可进行, 传统的结构模态参数识别方法可以容易的得到这些数据. 此外, 该方法还具有很高的数值计算效率. 具体分析表明系统的动态特性和碰撞前的运动状态都强烈地影响着碰撞过程和碰撞后果, 因此, 传统的碰撞恢复系数决不是只取决于碰撞物体的材质, 它不仅与系统的结构参数有关, 还与系统碰撞前的运动状态有关, 除非对

系统碰撞前的运动状态做某种限定(如无内部振动等), 否则不存在确定的恢复系数. 这一点在作者进行的冲击减振器减振理论与实验研究中得到证明, 在较高频率的激励下, 冲击体与主振系统持续发生碰撞, 碰撞的接触时间与激励周期接近, 将观察不到瞬时碰撞现象, 系统处于复杂的非线性运动状态.

#### 参 考 文 献

- 1 张继业, 曾京, 舒仲周. 杆的纵向冲击振动. 振动与冲击, 1999, 18(3): 42 ~ 43 (Zhang Jiye, Zeng Jing, Shu Zhongzhou. Longitudinal Vibration of Prismatic Bar During Impact. *Journal of Vibration And Shock*, 1999, 18(3): 42 ~ 43(in Chinese))
- 2 吴家强, 王宏志. 杆的纵向冲击问题全过程分析. 振动与冲击, 2004, 23(1): 101 ~ 104 (Wu Jiaqiang, Wang Hongzhi. General Procedure for Analysis of Axial Response of Prismatic Bar During Impact. *Journal of Vibration And Shock*, 2004, 23(1): 101 ~ 104(in Chinese))
- 3 邢誉峰. 梁结构线弹性碰撞的解析解. 北京航空航天大学学报, 1998, 24(6): 634 ~ 637 (Xing Yufeng. Analytical Solutions of Linearly Elastic Impact of Beams. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 1998, 24(6): 634 ~ 637(in Chinese))
- 4 金栋平, 胡海岩. 结构碰撞振动的建模与模态截断. 固体力学学报, 2001, 22(2): 205 ~ 208 (Jin Dongping, Hu Haiyan. Modeling and Mode Truncation of Vibro-Impacting Structures. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2001, 22(2): 205 ~ 208(in Chinese))
- 5 王东生, 冯启民, 王国新. 基于直杆共轴碰撞理论的桥梁地震反应邻梁碰撞分析模型. 工程力学, 2004, 21(2): 157 ~ 166 (Wang Dongsheng, Feng qimin, Wang Guoxin. Analysis Model of Pounding Between Adjacent Bridge Girders During Earthquakes Based on Collinear Impact Between Roads. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(2): 157 ~ 166(in Chinese))

## IMPACT PROCESS ANALYSIS OF LINEAR SYSTEM BASED ON LAPLACE TRANSFORM

Zhao Dengfeng

(School of Manufacturing Science and Engineering, Southwest university of science and technology, Mianyang 621000, China)

**Abstract** With the Laplace transform method, the analysis methods of impacting process of linear system were discussed. First, the impact model of the linear system was built, and the basic analysis principle and calculation formula were derived. At the same time, the convolution integral formula was also given. Second, the subsystem's transfer functions, which include mass, elasticity bar, cantilever beam, et, were derived. Lastly, the validity of this analysis method was validated by examples. The results indicated that both system's dynamic characteristics and pre - impacting motion state affected the impacting process and impacting result strongly, and the impacting restitution coefficient can't reveal kinetic phenomenon in impacting process. Compared with other methods, this analysis method have some advantages such as specific conception, higher numeric computing efficiency, and more analytic results.

**Key words** impact, linear system, impacting restitution coefficient