

细长弹箭固有振动特性分析有限元传递矩阵法

何斌 芮筱亭 于海龙

(南京理工大学弹道研究所, 南京 210094)

摘要 使用有限元传递矩阵法分析了某大长径比弹箭的固有振动特性, 成功求得了其固有振动频率和振型函数, 计算结果得到试验验证. 该方法兼备有限元法建模方便、应用范围广和传递矩阵法应用灵活、矩阵阶次低、计算速度快的优点, 易于分析复杂变截面结构弹箭的振动特性, 并且可直接利用商业有限元软件得到该方法仿真所必需的质量矩阵和刚度矩阵.

关键词 大长径比弹箭, 固有振动特性, 有限元传递矩阵法

引言

随着材料科学、加工工艺及控制技术的发展, 为了降低飞行能耗, 弹箭大多采用轻质低密度材料, 合理的设计方案可有效控制其弹性振动固有频率及临界转速, 从而提高飞行性能和射击精度^[1,2], 弹箭横向振动对飞行性能的影响已引起科研及工程设计人员的重视^[3,4]. 而对大长径比弹箭的固有振动特性分析尤为令人关注, 已将经典传递矩阵法、Riccati 传递矩阵法等高效分析方法用于分析弹箭的固有振动特性^[5,6]. 但当经典传递矩阵法随着计算精度要求的提高, 分段数急剧加大, 从而导致计算复杂性、数值精度及稳定性等问题. 通常经典传递矩阵法可直接处理等截面、线性变截面、二次变截面等简单变截面质量分布系统梁的振动特性, 但对于复杂变截面梁, 同样需要分段处理^[7]. 1972年, Dokanish 针对板振动问题, 将有限元法和传递矩阵法有机结合, 形成了有限元传递矩阵法^[8], 与有限元法相比该方法计算量小、易于程序实现, 之后许多学者对其进行了改进^[9~12]. 但都局限于纯理论的板振动或变形分析, 本文将该方法用于解决实际工程中的细长弹箭振动特性分析. 由于有限元传递矩阵法综合了有限元法和传递矩阵法的特性, 可用于复杂变截面梁的振动分析, 特别适合与现代弹箭设计灵巧化、控制智能化引起的机械系统复杂化趋势. 本文应用有限元传递矩阵法分析

大长径比弹箭振动特性, 并且计算结果得到试验验证.

1 弹箭振动模型

1.1 基本假设

为了叙述的方便, 假设弹箭振动服从下面基本假设:

- 1) 弹箭为沿弹轴截面复杂变化的梁, 并且弹性中心线与质量中心线重合;
- 2) 长径比大, 不考虑剪切的影响;
- 3) 轴向刚度远大于横向弯曲刚度, 可忽略拉压变形的影响.

由于有限元法和传递矩阵法建模思想的统一性, 将弹箭作为一般弹性体振动考虑的更复杂物理模型可应用同样方法研究.

1.2 运动学描述

考虑细长弹箭在铅锤面内弯曲振动, 将其视为小变形均质变截面梁. 根据有限元法建模的思想, 将弹箭体分成若干各微元段, 在微元段内通过结点坐标描述梁的变形运动, 如图1所示. 设对于任意单元 i 存在两个节点, 两节点的横向振动位移分别为 u_1 和 u_2 , 小变形情况下, 其对于轴向坐标 x 的导数可近似表示为节点处微元的转角 $u'_1 = \partial u_1 / \partial x$ 和 $u'_2 = \partial u_2 / \partial x$. 于是采用二节点 Hermite 梁元^[13], 该微元轴线上任意点的横向位移可表示为

$$u = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

$$x \in [0, l_i] \quad (1)$$

其中, l_i 为单元 i 的长度. 由于假设的位移场满足边界条件

$$\begin{aligned} u(0) &= u_1, u'(0) = u'_1, \\ u(l_i) &= u_2, u'(l_i) = u'_2 \end{aligned} \quad (2)$$

于是可得

$$\begin{aligned} a_0 &= u_1, \\ a_1 &= u'_1, a_2 = (-6u_1 - 4u'_1 l_i + 6u_2 - \\ &\quad 2u'_2 l_i)/(2l_i^2) \\ a_3 &= (2u_1 + u'_1 l_i - 2u_2 + u'_2 l_i)/(l_i^3) \end{aligned} \quad (3)$$

将式(2)代入式(1)可得

$$u = \psi_1(x)u_1 + \psi_2(x)u'_1 + \psi_3(x)u_2 + \psi_4(x)u'_2, x \in [0, l_i] \quad (4)$$

其中, 型函数

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{l_i^3 - 3l_i x^2 + 2x^3}{l_i^3}, \\ \psi_2(x) &= \frac{l_i^2 x - 2l_i x^2 + x^3}{l_i^2}, \\ \psi_3(x) &= \frac{3l_i x^2 - 2x^3}{l_i^3}, \\ \psi_4(x) &= \frac{-l_i x^2 + x^3}{l_i^2} \end{aligned} \quad (5)$$

将式(4)写成矩阵形式可得

$$u = \psi(x)\delta, x \in [0, l_i] \quad (6)$$

其中, 型函数矩阵和节点坐标列阵

$$\begin{aligned} \psi &= [\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4], \\ \delta &= [u_1, u'_1; u_2, u'_2]^T = [\delta_{i,1}^T; \delta_{i,2}^T]^T \end{aligned} \quad (7)$$

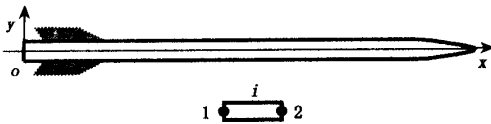


图 1 大长径比弹箭横向振动力学模型

Fig. 1 Transverse vibration model of slender projectile

1.3 单元的刚度及质量矩阵

由于弯曲梁的应变能和动能可表示为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} EI(u'')^2 dx \quad (8)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \rho A (\dot{u})^2 dx \quad (9)$$

其中, EI 为抗弯刚度, ρ 为质量密度, A 为横截面面积, $u'' = \partial^2 u / \partial x^2$, $\dot{u} = du / dt$, t 代表时间. 将式(6)代入式(8)和式(9). 并且由于

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = K\delta \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} = m\dot{\delta} \quad (11)$$

可得刚度矩阵 K , 其元素为

$$k_{ij} = \int_0^{l_i} EI \psi_i'' \psi_j'' dx, i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (12)$$

和质量矩阵 m , 其元素为

$$m_{ij} = \int_0^{l_i} \rho A \psi_i \psi_j dx, i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (13)$$

由于式(12)和式(13)直接对抗弯刚度 EI 和质量线密度 ρA 进行积分确定刚度矩阵和质量矩阵, 没有作任何人为限定, 增加了传递矩阵法的应用范围, 其形式与通常弹性弯曲振动梁的刚度矩阵和质量矩阵形式相同, 于是可直接通过商业有限元软件直接得到^[13].

2 有限元传递矩阵

2.1 基本公式

根据式(12)和式(13)得到的刚度和质量矩阵, 利用动力学原理得单元 i 的动力学方程

$$K_i \delta_i + m_i \ddot{\delta}_i = q_i \quad (14)$$

其中, q_i 为作用在单元 i 上的等效广义力, 可分解为两部分: 节点之间的内力 q_i^j 和外部作用力 $q_i^{[13]}$. 对于自由振动没有外力作用, 可得

$$K_i \delta_i + m_i \ddot{\delta}_i = q_i^j \quad (15)$$

为了进行弹箭固有振动特性分析, 令

$$\begin{aligned} \delta_k &= \delta_k \exp(j\omega t), \\ q_k^j &= q_k^j \exp(j\omega t) \end{aligned} \quad (16)$$

其中, δ_k 和 q_k^j 分别为 δ_k 和 q_k^j 对应的模态型函数, $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位, ω 为系统振动频率. 将式(16)代入式(15)可得

$$K_k \delta_k - \omega^2 m_k \delta_k = q_k^j \quad (17)$$

按照式(7)定义的节点位移坐标列阵, 对式(17)分块处理

$$\left[\begin{array}{cc} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right] - \omega^2 \left[\begin{array}{cc} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \delta_{k,1} \\ \delta_{k,2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} q_{k,1}^j \\ q_{k,2}^j \end{array} \right\} \quad (18)$$

并移项整理可得单元的传递方程

$$\underline{Z}_{k,2} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{11} & \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{21} & \underline{U}_{22} \end{bmatrix}_k \underline{Z}_{k,1} \quad (19)$$

其中,单元 k 传递矩阵的元素为

$$\begin{aligned} \underline{U}_{11} &= -(\underline{K}_{12} - \omega^2 \underline{m}_{12})^{-1}(\underline{K}_{11} - \omega^2 \underline{m}_{11}), \\ \underline{U}_{12} &= (\underline{K}_{12} - \omega^2 \underline{m}_{12})^{-1}, \\ \underline{U}_{21} &= (\underline{K}_{21} - \omega^2 \underline{m}_{21})(\underline{K}_{22} - \omega^2 \underline{m}_{22})^{-1} \underline{U}_{11}, \\ \underline{U}_{22} &= (\underline{K}_{22} - \omega^2 \underline{m}_{22})^{-1} \underline{U}_{12} \end{aligned} \quad (20)$$

节点状态矢量为

$$\underline{Z} = [\underline{\delta}^T \quad \underline{q}^T]^T \quad (21)$$

2.2 求解步骤

计算固有频率时,不考虑外载荷,即节点上无外载荷作用,由于不同单元上的两连接截面的位移连续,内力大小相等,方向相反,可得

$$\begin{bmatrix} \underline{\delta}_{k+1,1} \\ \underline{q}_{k+1,1}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\delta}_{k,2} \\ -\underline{q}_{k,2}^i \end{bmatrix} \quad (22)$$

将式(22)代入式(19)可得从截面 $k, 1$ 到 $k+1, 1$ 形成子系统的传递方程

$$\underline{Z}_{k+1,1} = \underline{U}_k \underline{Z}_{k,1} \quad (23)$$

和传递方程

$$\underline{U}_k = \begin{bmatrix} \underline{U}_{11} & \underline{U}_{12} \\ -\underline{U}_{21} & -\underline{U}_{22} \end{bmatrix}_k \quad (24)$$

最终可得弹箭从输入端到输出端的传递方程

$$\underline{Z}_{n+1,1} = \underline{U}_n \underline{U}_{n-1} \cdots \underline{U}_2 \underline{U}_1 \underline{Z}_{1,1} = \underline{U}_{all} \underline{Z}_{1,1} \quad (25)$$

其中, n 为弹箭的单元总数. 一般而言,系统输入端状态矢量 $\underline{Z}_{1,1}$ 和输出端状态矢量 $\underline{Z}_{n+1,1}$ 的一半元素已知; 对于自由飞行大长径比弹箭, $\underline{Z}_{1,1}$ 和 $\underline{Z}_{n+1,1}$ 中的 $\underline{q}_{1,1}^i$ 和 $\underline{q}_{n+1,1}^i$ 为零,于是可得

$$\underline{0} = \underline{U}_{21,all} \underline{\delta}_{1,1} \quad (26)$$

由于系统存在非零解,所以可得频率方程为

$$|\underline{U}_{21,all}| = 0 \quad (27)$$

其中, $|\cdot|$ 表示求方阵 \cdot 的行列式值. 通过式(27)可求得系统的固有振动频率,再利用式(19)和式(22)求得各阶固有频率对应的系统特征矢量在各个节点值,进一步通过假设的型函数式(4)可得单元内部的值.

3 大长径比弹箭振动特性分析

采用 Matlab 语言编制该算法的计算程序,首先分析了两端自由等截面均质梁,通过与解析解的

比较证明了方法对简单模型有效;其次按某大口径远程弹箭结构特性将其分为二十个微元段,通过该方法求得非零前四阶固有频率及归一化后的振型函数,如图2所示, L 为弹箭轴向总长度. 而试验测得该弹箭非零一阶频率为 15 赫兹,可看出计算值相对于试验值的相对误差小于 1.2%,证明方法有效可行.

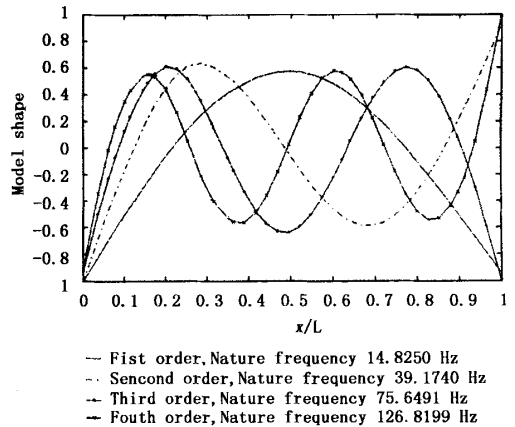


图2 某大长径比远程弹箭横向振动模态

Fig. 2 Vibration model of some slender rockets with large flight range

通常利用传递矩阵法分析系统固有振动特性时,如果固有频率过大,可能出现数值困难,一般可通过 Riccati 传递矩阵法^[6,11]和修正传递矩阵法来克服空间传递稳定性和计算精度等问题,关于这方面的研究将另文讨论.

4 结论

本文采用有限元传递矩阵法成功分析了细长弹箭固有振动特性,该方法兼备了有限元法建模方便及传递矩阵法矩阵阶次低、应用灵活方便的特点,可方便分析复杂变截面弹箭固有振动特性,传递矩阵法中所需的质量矩阵和刚度矩阵直接利用商业有限元软件求得. 计算实例表明该方法有效,为工程设计人员提供参考. 该项研究对将有限元传递矩阵法用于更加复杂的实际工程问题具有参考意义.

参 考 文 献

- 1 荣吉利,杨树兴. 细长自旋弹箭飞行时横向自振特性的

- 有限元法. 北京理工大学学报, 2001, 21(4): 410~414 (Rong Jili, Yang Shuxing. Finite element computation of the characteristic of transverse self-oscillation for a slender spinning rocket. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2001, 21(4): 410~414)
- 2 荣吉利, 李瑞英. 大长径比自旋弹箭横向自振特性的有限元计算方法与结果分析. 兵工学报, 2002, 23(1): 79~82 (Rong Jili, Li Ruiying. Finite element computational method and resultant analysis of the transverse self-oscillation characteristics of a slender spinning rocket. *ACTA ARMAMENTARII*, 2002, 23(1): 79~82)
- 3 臧涛成, 胡焕性. 细长弹箭飞行时的振动模型. 弹箭与制导学报, 1998, (3): 15~19 (Zang Taocheng, Hu Huanxing. Vibration model of slender rocket during flight. *Journal of rocket/shell and Guidance*, 1998, (3): 15~19 (in Chinese))
- 4 臧涛成, 胡焕性. 大长径比脱壳穿甲弹飞行时的横向振动. 兵工学报, 1999, 20(3): 208~211 (Zang Taocheng, Hu Huanxing. Transverse vibration of a projectile having large slenderness ratio in its flight. *ACTA ARMAMENTARII*, 1999, 20(3): 208~211 (in Chinese))
- 5 刘石泉. 导弹横向弯曲振动特性的计算. 宇航学报, 1989, (2): 104~112 (Liu Shiquan. Computation of the lateral bend vibration characteristics of the missile. *Journal of Astronautics*, 1989, (2): 104~112 (in Chinese))
- 6 余旭东, 段德高, 赵伟. 导弹固有特性分析中的 RIC-CATI 法. 弹箭与制导学报, 1994, (2): 47~55 (Yu Xudong, Duan Degao, Zhao Wei. Riccati method used analyzing natural characteristic of missile. *Journal of rocket/shell and Guidance*, 1994, (2): 47~55 (in Chinese))
- 7 刘庆谭, 倪国荣. 结构分析中的传递矩阵法. 北京: 中国铁道出版社, 1997 (Liu Qingtan, Ni Guorong. Transfer matrix method for structure analysis. Beijing: Chinese publishing company of railway, 1997 (in Chinese))
- 8 Dokanish MA. A new approach for plate vibration: combination of transfer matrix and finite element technique. *Journal of mechanical design*, 1972, 94: 526~530
- 9 Degen EE, Shephard MS, Loewy RG. Combined finite element transfer matrix method based on a finite mixed formulation. *Computers & Structures*, 1985, 26: 543~549
- 10 Ohga M, Shiheematsu T. Transient analysis of plates by a finite element transfer matrix method. *Computers & Structures*, 1987, 20: 173~180
- 11 Xue HY. A combined finite element riccati transfer matrix method in frequency domain for transient structural response. *Computers & Structures*, 1997, 62(2): 215~220
- 12 Loewy RG, Bhutani N. Combinend finite element-transfer matrix method. *Journal of sound and vibration*, 1999, 226(5): 1048~1052
- 13 王勖成. 有限单元法. 北京: 清华大学出版社, 2003 (Wang Xucheng. Finite element method. Beijing: Publishing company of Tsinghua University, 2003 (in Chinese))

FINITE ELEMENT TRANSFER MATRIX METHOD FOR ANALYZING NATURAL VIBRATION CHARACTERISTICS OF SLENDER ROCKET/PROJECTILE

He Bin Rui Xiaoting Yu Hailong

(*Nanjing university of science and technology trajectory institute, Nanjing 210094, China*)

Abstract The finite element transfer matrix method was applied to analyze the natural vibration characteristics of some slender rocket/projectile, which was validated by experimental data. The finite element transfer matrix method has not only the merits of finite element method, such as flexible model and wide application, but also the advantages of low matrix order and fast computation of transfer matrix method. So it can be used to easily analyze the vibration characteristics of rocket/projectile with complex variant sections. Stiffness matrices and mass matrices that are essential to simulate can be obtained directly by commercial finite element software.

Key words Slender rocket/projectile, natural vibration characteristic, finite element transfer matrix method