

一类脉冲动力系统的状态反馈控制*

蒋贵荣^{1,2} 陆启韶¹ 钱临宁¹

(1.北京航空航天大学理学院,北京 100083)(2.桂林电子工业学院计算科学与数学系,桂林 541004)

摘要 对一类具有状态反馈控制的脉冲动力系统的动力学性质进行了研究.由周期解的扰动解得到了一个 Poincaré 映射,利用 Poincaré 映射讨论了系统周期解的分岔,并得到了半平凡周期解和正周期-1 解存在和稳定的充分条件.定性分析和数学模拟表明,半平凡周期解通过 fold 分岔分岔出正周期-1 解,正周期-1 解通过 flip 分岔分岔出正周期-2 解,再通过一系列 flip 分岔通向混沌.此外,讨论了脉冲状态反馈控制的效果.

关键词 脉冲动力系统,状态反馈控制,分岔,周期解

引言

在经典的微分方程理论中,常假设物体的运动状态是随时间而连续变化的.但是在物理学,化学,生态学,信息科学等许多学科中,我们会发现系统中的变量在变化过程中的某个时刻会发生突然的变化,例如,运动中的物体的速度由于碰撞会发生剧烈的变化.这种复杂的动力学行为显然不能用连续的动力系统来描述,而是用属于非连续动力系统的脉冲动力系统来描述.脉冲微分方程的理论比较丰富,它开始于 20 世纪 60 年代,在 80 年代,由于 Bainov 和他的同事的努力而得到了很快的发展^[1-3].脉冲微分方程主要有三类:脉冲发生在固定时刻的脉冲微分方程,脉冲发生在变时刻的脉冲微分方程,和脉冲自治微分方程.在讨论脉冲自治微分方程时,要解决依赖于状态的脉冲引起的困难的方法不多,因而在已有的理论大多是关于前两类脉冲微分方程的.又由于在某些实际的控制问题中,脉冲不是发生在固定时刻,而是依赖于状态变量,这样用脉冲自治微分方程建立的模型能更准确地描述实际的问题.

我们知道,连续动力系统的分岔理论已经非常丰富^[4-6],而非光滑动力系统的分岔理论由于系统的不连续性而发展缓慢.脉冲微分方程理论属于非光滑动力系统范畴,并且已有的脉冲动力系统的理论主要是讨论系统的解的性质,如:解的有界性,唯一性,稳定性,振动性,周期解的存在性等^[7-10],

很少讨论分岔情况. A·Lakmeche 在文[11]中将周期解问题转化为不动点问题,讨论了从平凡解和正周期 1 解的分岔情况,但得到的正周期 1 解存在的充分条件非常复杂,难于验证;S. Y. Tang 在文[12]中虽然利用频闪映射得到了正周期 1 解的具体表达式,但只是在数值上而非理论上讨论了正周期解的分岔情况.在文[11,12]中,都用到了离散映射.由于所考虑的脉冲发生在固定的周期时刻,这些离散映射容易得到.而在脉冲自治微分方程中离散映射不容易求出,因而离散化的系统很难得到,没有太多方法可以用来讨论其动力学性质.

下面我们给出一个具有状态反馈控制的脉冲动力系统,利用周期解的扰动解求得 Poincaré 映射,讨论所给出的脉冲动力系统周期解的分岔情况,并且用数值结果加以验证,最后讨论状态反馈控制的效果.

1 脉冲动力系统

考虑如下的常微分方程

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx - cy) \\ \dot{y} = y(-d + ex - fy) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a, b, c, d, e, f > 0$. 尽管(1)没有显式解,但它的动力学性质很清楚,在区域 $\Omega = \{x, y \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ 中,当 $\frac{a}{b} \leq \frac{d}{e}$ 时,系统有一个鞍点 $(0, 0)$ 和一个稳定的结点 $(\frac{a}{b}, 0)$; 当 $\frac{a}{b} > \frac{d}{e}$ 时,系统有两

个鞍点 $(0,0)$, $(\frac{a}{b}, 0)$ 和一个稳定的焦点 $(\frac{af+dc}{bf+ce}, \frac{ae-db}{bf+ce})$. 在某些实际问题中, 我们要控制变量 x, y 的大小, 其中脉冲状态反馈控制就是一种很有效的方法, 其控制过程可用下面脉冲动力系统来描述

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx - cy) \\ \dot{y} = y(-d + ex - fy), x \neq h \\ \Delta x = -px \\ \Delta y = qy, x = h \end{cases} \quad (2)$$

其中 $h, p, q > 0, \Delta x(t) = x(t^+) - x(t), \Delta y(t) = y(t^+) - y(t)$. 当变量 x 增大到某个阈值 h 时, 我们对系统进行控制, 使得变量 x, y 分别突然变为 $(1-p)h, (1-q)y(t(h))$. 在本文中, 系统(2)是在区域 Ω 中考虑的, 控制变量 x 不超过阈值 h 是我们的目的, 并且还假设

$$0 < h < \frac{d}{e} < \frac{a}{b} \quad (3)$$

下面可以看到, 以 q 为参数, 脉冲作用 $\Delta x = -px, \Delta y = qy$ 会导致系统(2) 具有很丰富的动力学性质.

2 动力学性质

2.1 Poincare 映射

为了研究脉冲动力系统(2) 的动力学性质, 我们取 Poincare 截面 $S_0 = \{(x, y) \mid x = h, y \geq 0\}$ 来建立一个 Poincare 映射. 假设系统(2) 存在 T -周期解 $E^+ EE^+ (\xi(t), \eta(t))$ (见图 1), 其中 $E^+ = ((1-p)h, y_0)$. 于是,

$$\xi(0) = (1-p)h, \eta(0) = y_0,$$

$$\xi(T) = h, \eta(T) = y_1 = \frac{y_0}{1+q}$$

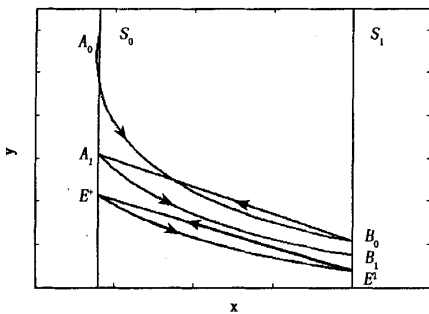


图 1 脉冲动力系统(2) 的相图

Fig. 1 The phase portrait of the impulsive dynamical system (2)

考虑在 $t = 0$ 时刻过初始点 $A_0((1-p)h, y_0 + \delta y_0)$ 的扰动解 $(\bar{\xi}(t), \bar{\eta}(t))$, 在时刻 $t = T + \delta t$ 到达点 $B_0(h, \bar{y}_1)$ 并且由于脉冲跳到点 $A_1((1-p)h, \bar{y})$. 从而 $\bar{\xi}(0) = (1-p)h, \bar{\eta}(0) = y_0 + \delta y_0, \bar{\xi}(T + \delta t) = h, \bar{\eta}(T + \delta t) = \bar{y}_1$. 令 $\delta x = \bar{\xi}(t) - \xi(t), \delta y = \bar{\eta}(t) - \eta(t)$, 则 $\delta x_0 = 0, \delta y_0 = |A_0 E^+|$. 取 $\delta y_1 = |A_1 E^+|, \delta y_0$ 与 δy_1 的关系决定所求的 Poincare 映射. 当 $0 < t < T$ 时, 有下式成立

$$\begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta y(t) \end{pmatrix} = M(t) \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \end{pmatrix} + O(\delta x_0^2 + \delta y_0^2) = M(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \delta y_0 \end{pmatrix} + O \begin{pmatrix} 0 \\ \delta y_0^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

其中基解矩阵 $M(t)$ 满足变分方程

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= A(t)M(t), M(0) = I_2 \\ A(t) &= \begin{pmatrix} a - 2b\xi(t) - c\eta(t) & -c\xi(t) \\ e\eta(t) & -d + e\xi(t) - 2f\eta(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

取 $g_1(t) = \xi(t)(a - b\xi(t) - c\eta(t)), g_2(t) = \eta(t)(-d + e\xi(t) - f\eta(t))$. 我们可以得到扰动解在时刻 $t = T + \delta t$ 的 Taylor 展式

$$\begin{cases} \bar{\xi}(T + \delta t) \approx \xi(T) + \delta x(T) + g_1(T)\delta t \\ \bar{\eta}(T + \delta t) \approx \eta(T) + \delta y(T) + g_2(T)\delta t \end{cases} \quad (6)$$

又由于 $\xi(T) = h, \bar{\xi}(T + \delta t) = h$, 可得 $\delta t = -\frac{\delta x(T)}{g_1(T)}, |B_0 E^+| = \bar{y}_1 - y = \delta y(T) - \frac{g_2(T)\delta x(T)}{g_1(T)}$. 考虑到 $\delta y_1 = |A_1 E^+| = (1+q)|B_0 E^+|$, 于是我们得到 Poincare 映射

$$\delta y_1 = F(q, \delta y_0) = (1+q)(\delta y(T) - \frac{g_2(T)\delta x(T)}{g_1(T)}) \quad (7)$$

其中, $\delta x(T), \delta y(T)$ 由(4) 计算.

2.2 Fold 分岔

假设当 $t \in (0, \infty)$ 时, $y(t) = 0$, 则由(2) 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx), x \neq h \\ \Delta x = -px, x = h \end{cases}$$

方程 $\dot{x} = x(a - bx)$ 的解为 $x(t) = \frac{a(1-p)h \exp(at)}{a - b(1-p)h + b(1-p)h \exp(at)}$. 取 $x_0 = x(0) = (1-p)h, T = \frac{1}{a} \ln \frac{a - b(1-p)h}{(a - bh)(1-p)}$, 则 $x(T) = h, x(T^+) = x_0$. 从而得到(2) 的一个半

平凡周期解

$$\begin{cases} \xi(t) = \frac{a(1-p)h \exp(at)}{a-b(1-p)h + b(1-p)h \exp(at)} \\ \eta(t) = 0, (k-1)T < t < kT \end{cases} \quad (8)$$

令(5)中的 $M(t) = \begin{bmatrix} m(t) & n(t) \\ u(t) & v(t) \end{bmatrix}$, 因为这时的 $\eta(t) = 0, \delta x_0 = 0, g_2(T) = 0$, 我们求 Poincare 映射时只需计算 $v(t)$. 由(5)可得

$$v'(t) = (-d + e\xi(t))v(t), v(0) = 1$$

$$\begin{aligned} v(t) &= c_0 \exp\left(\int_0^t (-d + e\{a(1-p)h \exp(at)\} / \right. \\ &\quad \left. \{a-b(1-p)h + b(1-p)h \exp(at)\} dt\right) = \\ &= c_0(a-b(1-p)h + b(1-p)h \times \\ &\quad \exp(at))^{e/b} \exp(-dt) \end{aligned}$$

考虑到 $v(0) = 1$, 因而可计算得 $c_0 = a^{-e/b}$, 故有:

$$v(t) = a^{-e/b} (a - b(1-p)h + b(1-p)h \exp(at))^{e/b} \exp(-dt). \text{ 考虑到 } T = \frac{1}{a} \ln \frac{a-b(1-p)h}{(a-bh)(1-p)}, \text{ (4) 和 (7), 我们可得到 Poincare 映射的具体表达式}$$

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= F(q, \delta y_0) = (1+q)(\delta y(T) - \\ &\quad \frac{g_2(T)\delta x(T)}{g_1(T)}) = (1+q)(\delta y(T) - 0) = \\ &= (1+q)(u(T) \times 0 + v(T)\delta y_0 = \\ &= (1+q)a^{-e/b} (a - b(1-p)h + b(1-p)h \exp(aT))^{e/b} \exp(-dT) \delta y_0 = \\ &= (1+q)a^{-e/b} \left(\frac{a(a-b(1-p)h)}{a-bh}\right)^{e/b} \times \\ &\quad \left(\frac{a-b(1-p)h}{(a-bh)(1-p)}\right)^{-d/a} \delta y_0 = (1+q) \times \\ &\quad (1-p)^{d/a} \left(\frac{a-b(1-p)h}{a-bh}\right)^{(e/b)-(d/a)} \delta y_0 \end{aligned} \quad (9)$$

并且

$$D_{\delta y_0} F(q, 0) = (1+q)(1-p)^{d/a} \times \left(\frac{a-b(1-p)h}{a-bh}\right)^{(e/b)-(d/a)}.$$

由 $D_{\delta y_0} F(q, 0) = 1$ 得

$$\begin{aligned} q &= (1-p)^{-(d/a)} \times \\ &\quad \left(\frac{a-b(1-p)h}{a-bh}\right)^{-(e/b)+(d/a)} - 1 = q^* \end{aligned} \quad (10)$$

显然是 Poincare 映射(9)的不动点, 它对应于系统(2)的半平凡周期解(8). 当 $0 < q < q^*$ 时 $0 <$

$D_{\delta y_0} F(q, 0) < 1$, 系统(2)的半平凡周期解(8)是稳定的. 当 $q = q^*$ 时, $D_{\delta y_0} F(q, 0) = 1$, 出现 Fold 分岔, 系统(2)的半平凡周期解分岔出正周期-1解, 并且当 $q > q^*$ 时, 半平凡周期解(8)不稳定.

2.3 Flip 分岔

由上面的讨论可知, 当 $q > q^*$ 时, 系统(2)的存在正周期-1解. 不妨设这个周期-1解为 $E^+ EE^+(\xi(t), \eta(t))$, 其中 $E = (h, \eta_0), E^+ = ((1-p)h, (1+q)\eta_0)$. 下面我们利用文[13]中的 Analogue of Poincare criterion 计算 Floquet 乘子 μ , 进而用 μ 来讨论这个正周期-1解的稳定性和分岔情况.

在这里, $P(x, y) = x(a-bx-cy), Q(x, y) = y(-d+ex-fy), a(x, y) = -px, \beta(x, y) = qy, \phi(x, y) = x-h, (\xi(T), \eta(T)) = (h, \eta_0), (\xi(T^+), \eta(T^+)) = (1-p)h, (1+q)\eta_0$. 于是,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = a - 2bx - cy, \frac{\partial Q}{\partial x} = -d + ex - 2fy, \frac{\partial a}{\partial x} = -p, \frac{\partial a}{\partial y} = 0, \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0, \frac{\partial \beta}{\partial y} = q, \frac{\partial \phi}{\partial x} = 1, \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{P^+ \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \\ &\quad Q^+ \left(\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\} / \\ &\quad \{P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi}{\partial y}\} = \{P^+(\xi(T^+), \eta(T^+)) \times \\ &\quad (1+q)\} / \{P(\xi(T), \eta(T))\} = \{(1-p)h(a-b(1-p)h - c(1+q)\eta_0)(1+q)\} / \{h(a-bh - c\eta_0)\} = \{(1-p)(a-b(1-p)h - c(1+q)\eta_0)\} / \{a-bh - c\eta_0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \Delta_1 \exp\left(\int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\xi(t), \eta(t)) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\xi(t), \eta(t))\right) dt\right) = \Delta_1 \exp\left(\int_0^T (a - 2b\xi(t) - c\eta(t) - d + e\xi(t) - 2f\eta(t)) dt\right) = \\ &= \Delta_1 \exp\left(\int_0^T ((a-b\xi(t) - c\eta(t)) + (-d + e\xi(t) - f\eta(t)) - (b\xi(t) + f\eta(t))) dt\right) = \\ &= \Delta_1 \exp\left(\int_{(1-p)h}^h \frac{d\xi(t)}{\xi(t)} + \int_{(1+q)\eta_0}^{\eta_0} \frac{d\eta(t)}{\eta(t)} - \int_0^T (b\xi(t) + f\eta(t)) dt\right) = \\ &= \Delta_1 \exp\left(\ln \frac{1}{1-p} + \ln \frac{1}{1+q} - \int_0^T (b\xi(t) + f\eta(t)) dt\right) = \Delta_1 \frac{1}{1-p} \frac{1}{1+q} \times \end{aligned}$$

$$\exp\left(-\int_0^T (b\xi(t) + f\eta(t))dt\right) = \frac{a - b(1-p)h - c(1+q)\eta_0}{a - bh - c\eta_0} \times$$

$$\exp\left(-\int_0^T (b\xi(t) + f\eta(t))dt\right)$$

μ 是参数 q 的函数, $\frac{\partial \mu}{\partial q} = \frac{-c\eta_0}{a - bh - c\eta_0} \exp\left(-\int_0^T (b\xi(t) + f\eta(t))dt\right)$. 注意到 $\eta_0 > 0, a - bh - c\eta_0 > 0$, 有 $\frac{\partial \mu}{\partial q} < 0$. 这样在我们要讨论的区间 (q^*, ∞) 上, Floquet 乘子 μ 是关于 q 是严格递减的.

当 $q = q^*$ 时, $\eta_0 = 0, T = \frac{1}{a} \ln \frac{a - b(1-p)h}{(a - bh)(1-p)}$, 当 $0 < t < T$ 时, $\xi(t) = \frac{a(1-p)h \exp(at)}{a - b(1-p)h + b(1-p)h \exp(at)}$. 于是利用半平凡周期解(8)可计算时的 Floquet 乘子

$$\mu = \frac{(1-p)(a - b(1-p)h)(1+q^*)}{a - bh} \times \exp\left(-\int_0^T ((a-b) + (c-2b)\xi(t))dt\right) = (1+q^*) \left(\frac{a - b(1-p)h}{a - bh}\right)^{(c/b) - (d/a)} \times (1-p)^{d/a} = 1.$$

假设当 $q = \bar{q}$ 时, 点 $E^+ = ((1-p)h, (1+q)\eta_0)$ 与两直线: $x = (1-p)h, bx + cy = a$ 的交点 $((1-p)h, \frac{a - b(1-p)h}{c})$ 重合. 于是, $(1+q)\eta_0 = \frac{a - b(1-p)h}{c}$, 并且可计算得此时的 Floquet 乘子

$$\mu = \frac{0}{a - bh - c\eta_0} \exp\left(-\int_0^T (b\xi(t) + f\eta(t))dt\right) = 0$$

因为 $\frac{\partial \mu}{\partial q} < 0$ ($q > q^*$), 故当 $q > \bar{q}$ 时, $\mu < 0$. 不妨假设当 $q = q_1$ 时, $\mu = \frac{a - b(1-p)h - c(1+q)\eta_0}{a - bh - c\eta_0} \exp\left(-\int_0^T (b\xi(t) + f\eta(t))dt\right) = -1$. 这样就出现 flip 分岔, 正周期 -1 解会分岔出正周期 -2 解. 当 $q > q_1$ 时, $\frac{\partial \mu}{\partial q} < -1$, 这样 $\left|\frac{\partial \mu}{\partial q}\right| > 1$, 正周期 -1 解失去稳定.

综合起来, 我们有: 脉冲动力系统(2) 在 $q > q^*$ 时存在正周期 -1 解. 当 $q^* < q < q_1$ 时, 这个

正周期 -1 解是稳定的; 当 $q > q_1$ 时, 这个正周期 -1 解是不稳定的; 当 $q = q_1$ 时, 这个正周期 -1 解经过 flip 分岔分岔出一个稳定的正周期 -2 解.

3 数值模拟

为说明脉冲动力系统(2) 的动力学性质, 考虑下列系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - 0.5x - 2y) \\ \dot{y} = y(-2 + 2x - 0.2y), x \neq 0.8 \\ \Delta x = -0.2x \\ \Delta y = qy, x = 0.8 \end{cases} \quad (11)$$

在这里, $a = 2, b = 0.5, c = 2, d = 2, e = 2, f = 0.2, p = 0.2, h = 0.8$. 由(10)有 $q^* = \left(\frac{2 - 0.5(1 - 0.2) \times 0.8}{2 - 0.5 \times 0.8}\right)^{-(2/0.5) + (2/2)} (1 - 0.2)^{-(2/2)} - 1 = 0.0797$.

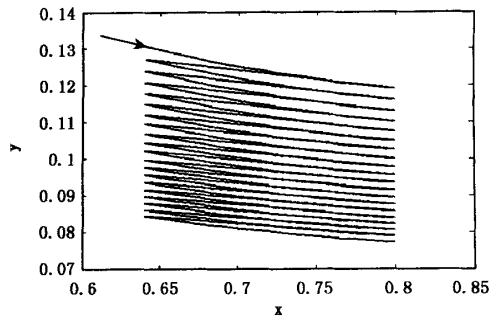


图2 系统(11)在 $q = 0.07$ 时的相图

Fig.2 The phase portrait of system(11) with $q = 0.07$

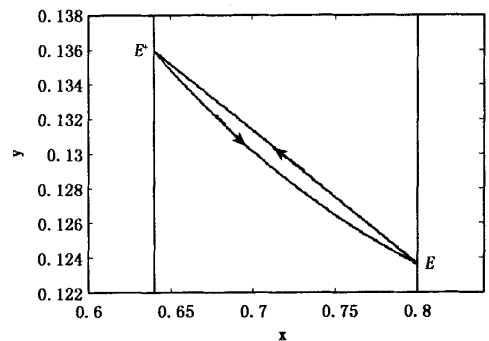


图3 系统(11)在 $q = 0.1$ 时的正周期 -1 解

Fig.3 The positive period-1 solution of system (11) with $q = 0.1$

如图2所示, 当 $q = 0.07 < q^*$ 时, 系统(11)的过初始点 $(0.62, 0.133)$ 的解随着时间 t 的增加而趋向半平凡周期解, 这意味着系统(11)的半平凡周期解在 $q = 0.07$ 时是稳定的; 当 $q = 0.1$ 时,

系统(11)存在一个正周期-1解(见图3, $E = 0.8, 0.1236$), $E^+ = (0.64, 0.136)$; 当 $q = 3.9$ 时, 系统(11)存在一个正周期-2解(见图4).

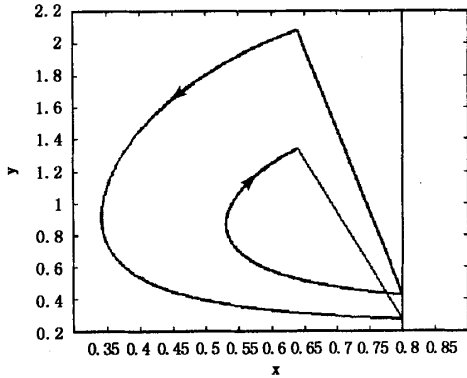


图4 系统(11)在 $q = 3.9$ 时的正周期-2解

Fig. 4 The positive period-2 solution of system (11) with $q = 3.9$

取 Poincare 截面 $S_0 = \{(x, y) \mid x = 0.8, y \geq 0\}$, 我们便得到一个 Poincare 映射(7). 令 q 为参数, 系统(11)的周期解的分岔图见图5. 从图5中可知, 当 $q = 0.0797$ 时, 出现 fold 分岔, 半平凡周期解分岔出正周期-1解; 当 $q = 3.8$ 时, 出现 flip 分岔, 正周期-1解分岔出正周期-2解. 系统(11)还存在混沌解, 它是通过倍周期分岔得到的. 图6给出了一个这样的混沌解.

以脉冲作用 $\Delta x = -px, \Delta y = qy$ 中的 p, q 为参数, 系统(11)稳定周期解的变迁集的数值结果如图7所示, 其中记号 $P-k$ 表示系统(11)的在一个周期里脉冲次数为 k 的稳定周期解.

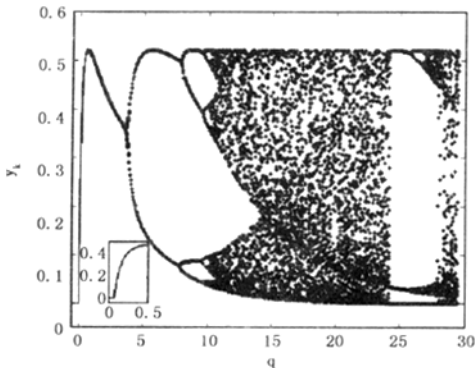


图5 当 $q \in [0, 30]$ 时, 系统(11)周期解的分岔图

Fig. 5 The bifurcation diagram of positive periodic solutions of system(11) for $q \in [0, 30]$

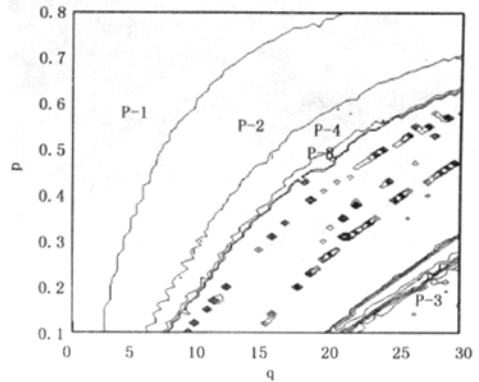


图6 当 $q = 13$ 时, 系统(11)的混沌解

Fig. 6 The chaotic solution of system(11) for $q = 13$

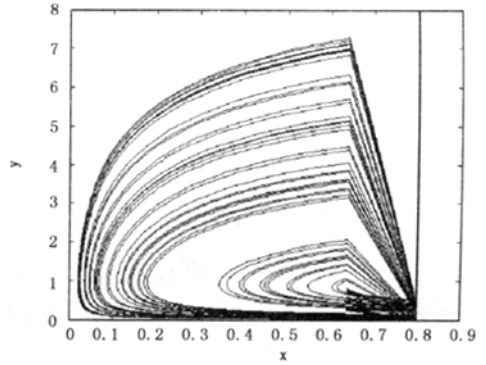


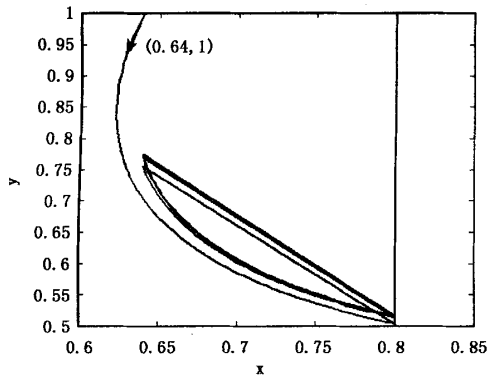
图7 当 $p \in [0, 30]$ 和 $q \in [0, 0.8]$ 时, 系统(11)稳定周期解的变迁集

Fig. 7 The transition sets of stable periodic solution of system (11) versus the parameters $p \in [0, 30]$ and $q \in [0, 0.8]$

4 讨论与结论

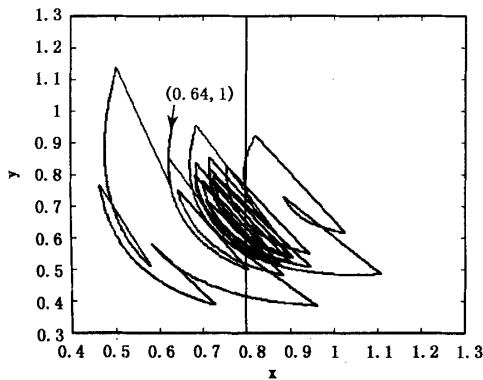
本文讨论脉冲动力系统的状态反馈控制, 当系统(2)的变量 x 达到阈值时, 按 $\Delta x = -px, \Delta y = qy$ 进行控制. 下面我们对照在固定时刻进行脉冲控制的方法, 讨论状态反馈控制的效果. 在系统(11)中, 取脉冲作用为 $\Delta x = -0.2x, \Delta y = 0.5y$, 变量 x 的阈值为 $h = 0.8$. 在图8(a)中, 从初始点 $(0.64, 1)$ 出发的解很快趋向于周期周期为 $T = 0.5001$ 的正周期-1解, 并且变量 x 也被控制住, 没有超过阈值. 考虑到 $T = 0.5001$, 我们在固定时刻 $t = 0.3k (k = 1, 2, \dots)$ 或者 $t = 0.8k (k = 1, 2, \dots)$ 控制变量 x , 图8(b)和图8(c)告诉我们, 在固定时刻进行脉冲控制不能将变量 x 控制在阈值内,

因而状态反馈控制是一种有效的方法.



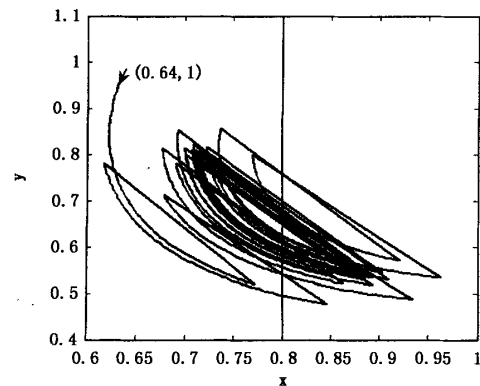
(a) 阈值为 $h = 0.8$ 的状态反馈控制

(a) The state feedback control with the threshold value $h = 0.8$



(b) 在时刻 $t = 0.3k (k = 1, 2, \dots)$ 的固定时刻脉冲控制

(b) The fixed time control at the moments $t = 0.3k (k = 1, 2, \dots)$



(c) 在时刻 $t = 0.8k (k = 1, 2, \dots)$ 的固定时刻脉冲控制

(c) The fixed time control at the moments $t = 0.8k (k = 1, 2, \dots)$

图8 系统(11)在 $q = 0.5$ 时的相图

Fig. 8 The phase portraits of system (11) with $q = 0.5$

我们在上面主要讨论了系统(2)的动力学性

质. 可以看出, 常微系统(1)很简单, 而其相应的脉冲动力系统(2)的动力学性质非常丰富. 通过构造 Poincare 映射, 我们讨论了半平凡周期解和正周期-1解的存在性和稳定性, 得到了出现 fold 分岔, flip 分岔的条件. 由第3节和图6可知, 随着参数 q 的增加, 脉冲动力系统(2)的稳定的半平凡周期解通过 fold 分岔分岔出稳定的正周期-1解. 这个正周期-1解通过 flip 分岔分岔出稳定的正周期-2解, 通向混沌的途径是 flip 分岔系列.

在脉冲状态反馈控制中, 当参数 q 变化时, 系统会出现不同类型的稳定周期解, 如半平凡周期解, 正周期- k 解等, 我们可以根据需要进行调节参数 q 获得. 这为许多领域(如经济, 生态)中的实际应用提供重要的理论依据.

参 考 文 献

- 1 Lakshmikantham V, Bainov DD, Simeonov PS. Theory of Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1989
- 2 Bainov DD, Simeonov PS. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. New York: Longman Scientific, 1993
- 3 Bainov DD, Dishliev AB, Stamova IM. Lipschitz quasistability of impulsive differential-difference equations with variable impulsive perturbations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1996, 70:267~277
- 4 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag, 1983
- 5 陆启韶. 分岔与奇异性. 上海: 上海科技教育出版社, 1995(Lu Qishao. Bifurcation and Singularity. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Press, 1995(in Chinese))
- 6 Kuznetsov YA. Elements of Applied Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag, 1995
- 7 Ballinger G, Liu XZ. Existence and unique results for impulsive differential equations. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 1999, 5:579~591
- 8 Lakshmikantham V, Liu XZ. Stability criteria for impulsive differential equations in terms of two measures. *J. Math. Anal. Appl.*, 1989, 137:591~604
- 9 Yan JR. Asymptotic behavior of impulsive delay differential equations. *Indian J. Pure. Appl. Math.*, 1996, 27:

- 843~851
- 10 Fu XL, Liu XZ. Oscillation criteria for impulsive hyperbolic systems. *Dynam. Contin. Discr. Impuls. Systems*, 1997, 3(2): 225~244
- 11 Lakmeche A, Arino O. Bifurcation of nontrivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2000, 7: 265~287
- 12 Tang SY, Chen LS. Density-dependent birth rate, birth pulses and their population dynamic consequences. *J. Math. Biol.*, 2002, 44: 185~199
- 13 Simeonov PS, Bainov DD. Orbital stability of periodic solutions of autonomous systems with impulse effect. *Int. J. Systems Science*, 1988, 19: 2562~2585

STATE FEEDBACK CONTROL OF A CLASS OF IMPULSIVE DYNAMIC SYSTEMS*

Jiang Guirong^{1,2} Lu Qishao¹ Qian Linning¹

(1. School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

(2. Department of Computing Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract The dynamics of a class of impulsive dynamic systems with impulsive state feedback control was studied. A Poincare map was constructed to discuss the bifurcation of periodic solution, and the sufficient conditions for the existence and stability of semi-trivial periodic solution and positive period-1 solution were obtained. The qualitative analysis and numerical results show that a positive period-1 solution bifurcates from the semi-trivial periodic solution through a fold bifurcation, a positive period-2 solution bifurcates from the positive period-1 solution through a flip bifurcation, and the chaotic solution is generated via a cascade of flip bifurcations. The superiority of the state feedback control strategy was also discussed.

Key words impulsive dynamic system, state feedback control, bifurcation, periodic solution