

# 一类自治系统 Hopf 分叉及极限环幅值的时滞反馈控制\*

钱长照 符文彬

(湖南大学工程力学系,长沙 410082)

**摘要** 对含有非线性时滞位移的 van der Pol-Duffing 方程进行了研究,着重研究了时滞参数对 van der Pol-Duffing 系统 Hopf 分叉及极限环幅值的控制.首先采用摄动法从理论上推导出极限环幅值与时滞参数之间的关系,分析时滞参数对幅值大小的影响,并着重讨论了不改变振动频率情况下对幅值的控制.通过对零解的稳定性分析,得出 Hopf 分叉产生的条件.最后用数值计算的方法验证了理论计算结果,数值计算结果与理论结果相当吻合.

**关键词** 摄动法,分叉控制,时滞动力系统

## 引言

在工程中,许多动力系统可用状态变量随时间演化的微分方程来描述,这其中,有相当一部分动力系统的状态变量存在时间滞后现象,即系统的演化趋势不仅依赖于系统当前的状态,也依赖于系统过去某一时刻或若干时刻的状态.我们将这类动力系统称作时滞动力系统.近年来,时滞动力系统已成为许多研究领域的重要研究对象.在电路、光学、神经网络、生物环境与医学、建筑结构、机械等领域,人们对时滞系统作了大量的研究,取得了许多重要的成果,并巧妙的利用时滞来控制动力系统的行为,如时滞反馈控制已成为控制混沌的主要方法之<sup>[1]</sup>.文[2]从时滞动力系统的特点、研究方法、动力学热点问题出发,对非线性时滞动力系统的研究进展作了综述.

分叉与混沌一直都是非线性动力学研究的重要课题,许多科学工作者在这些方面做了大量的研究,对于混沌的控制研究也取得比较成熟的成果,当前,非线性系统的分叉控制在国际上也正在形成一个专门的、全新的研究方向.分叉控制的主要任务是研究分叉控制理论,提出分叉控制的方法,对具体的工程系统就是设计一个控制器来改变其非线性特性,从而获得需要的动力学行为,Chen G., Moiola J L & Wang H O 对分叉控制的理论、方法和应用前景已经作了详尽的叙述<sup>[3]</sup>.文[4,5]对几

种典型的分叉控制进行了研究.文[6,7]对动力系统的时滞反馈控制进行了研究.

本文研究非线性动力系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon(\mu - \beta x^2)\dot{x} + \alpha x^3 = 0 \quad (1)$$

的时滞反馈控制.事实上,动力系统(1)含有丰富的非线性动力行为,许多科学工作者对其做了研究<sup>[8~10]</sup>.本文研究的目的是设计非线性时滞控制器,对其系统的主共振分叉响应进行控制.受控动力系统可以描述为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon(\mu - \beta x^2)\dot{x} + \alpha \epsilon x^3 = \epsilon[g_1 x(t - \tau_1) + g_2 x^3(t - \tau_2)] \quad (2)$$

## 1 理论分析

对于系统(2),当 $\epsilon$ 为小参数时,由摄动法可得方程(2)的一阶近似解形式

$$x = a \cos(\omega_0 t - \theta) \quad (3)$$

其中 $a$ 和 $\theta$ 是关于时间的函数,对(3)求导可得

$$\dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t - \theta) \quad (4)$$

$$\dot{a} \cos(\omega_0 t - \theta) + a\dot{\theta} \sin(\omega_0 t - \theta) = 0 \quad (5)$$

(4)式再对时间求导则可得

$$\ddot{x} = -\dot{a}\omega_0 \sin(\omega_0 t - \theta) + a\dot{\theta} \omega_0 \cos(\omega_0 t - \theta) + \omega_0^2 a \cos(\omega_0 t - \theta) \quad (6)$$

令 $\psi = \omega_0 t - \theta$ ,将(3)式、(4)式和(6)式代入(2)式整理得

$$-\dot{a}\omega_0 \sin\psi + a\dot{\theta} \omega_0 \cos\psi - \epsilon\mu a\omega_0 \sin\psi +$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\epsilon\beta\alpha^3(\sin\psi + \sin 3\psi) + \frac{1}{4}\epsilon\alpha a^3(3\cos\psi + \\ \cos 3\psi) = \epsilon g^1 a \cos(\psi - \omega_0\tau_1) + \\ \frac{1}{4}\epsilon g_2 a^3[3\cos(\psi - \omega_0\tau_2) + \\ \cos 3(\psi - \omega_0\tau_2)] \end{aligned} \quad (7)$$

由(5)和(7)式可得

$$\begin{aligned} \dot{a} = \frac{\epsilon}{\omega_0} \left[ -\mu a \omega_0 \sin\psi + \frac{1}{4}\beta\alpha^3(\sin\psi + \right. \\ \left. \sin 3\psi) + \frac{1}{4}\alpha a^3(3\cos\psi + \cos 3\psi) - \right. \\ \left. g_1 a \cos(\psi - \omega_0\tau_1) - \frac{3}{4}g_2 a^3 \cos(\psi - \right. \\ \left. \omega_0\tau_2) - \frac{1}{4}g_2 a^3 \cos 3(\psi - \omega_0\tau) \right] \sin\psi \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = \frac{\epsilon}{\omega_0} \left[ \mu a \omega_0 \sin\psi - \frac{1}{4}\beta\alpha^3(\sin\psi + \right. \\ \left. \sin 3\psi) - \frac{1}{4}\alpha a^3(3\cos\psi + \cos 3\psi) + \right. \\ \left. g_1 a \cos(\psi - \omega_0\tau_1) + \frac{3}{4}g_2 a^3 \cos(\psi - \right. \\ \left. \omega_0\tau_2) + \frac{1}{4}g_2 a^3 \cos 3(\psi - \omega_0\tau) \right] \cos\psi \quad (9) \end{aligned}$$

将方程(6)(7)中右边以 $\psi$ 的一个周期中的平均值近似地代替,则得到原方程的平均化方程

$$\begin{aligned} \dot{a} = \frac{\epsilon}{2\omega_0} \left( -\mu a \omega_0 - g_1 a \sin\omega_0\tau_1 + \frac{1}{4}\beta\alpha^3 - \right. \\ \left. \frac{3}{4}g_2 a^3 \sin\omega_0\tau_2 \right) \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = \frac{\epsilon}{2\omega_0} \left( g_1 a \cos\omega_0\tau_1 - \frac{3}{4}\alpha a^3 + \right. \\ \left. \frac{3}{4}g_2 a^3 \cos\omega_0\tau_2 \right) \quad (11) \end{aligned}$$

当存在稳定周期解时 $\dot{a} = 0$ ,即由(10)式可解得稳定周期解幅值

$$a = 2\sqrt{\frac{\mu\omega_0 + g_1 \sin\omega_0\tau_1}{\beta - 3g_2 \sin\omega_0\tau_2}} \quad (12)$$

由(10)式可得稳定周期解的频率

$$\begin{aligned} \omega = \omega_0 - \dot{\theta} = \omega_0 - \frac{\epsilon}{2\omega_0} \left( g_1 \cos\omega_0\tau_1 - \right. \\ \left. \frac{3}{4}\alpha a^2 + \frac{3}{4}g_2 a^2 \cos\omega_0\tau_2 \right) \quad (13) \end{aligned}$$

当 $g_1 = g_2 = 0$ 时,对应于原系统的稳定周期解振幅及频率为

$$a = 2\sqrt{\frac{\mu}{\beta}}, \omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\epsilon\alpha a^2 \quad (14)$$

## 2 零解稳定性分析及稳定周期解的数值计算

由(14)式知原系统存在稳定周期解的必要条件是

$$\mu\beta > 0 \quad (15)$$

对原系统零解稳定性的讨论,可令

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - \epsilon(\mu - \beta x^2)y - \alpha x^3 \end{cases} \quad (16)$$

可得线性特征方程

$$\lambda^2 + \epsilon\mu\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (17)$$

由此可知,原系统在 $\mu = 0$ 处发生 Hopf 分叉, $\mu > 0$ 时,零解稳定, $\mu < 0$ 时,存在稳定的极限环.对应于受控系统的线性部分,特征方程可写成

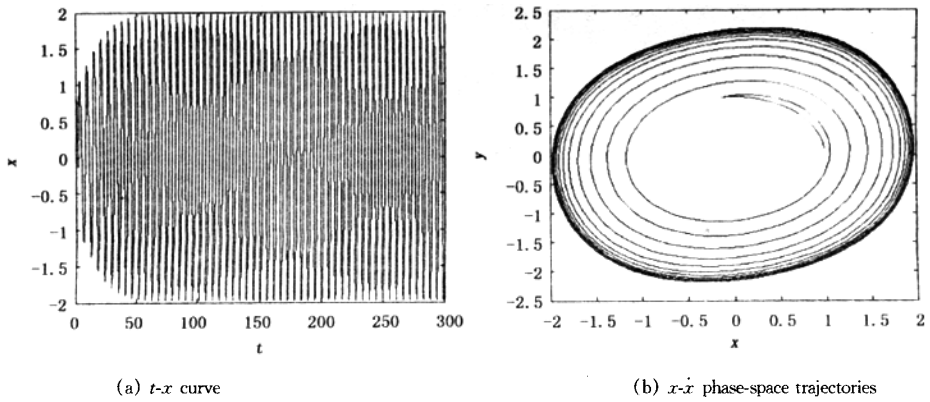
$$\lambda^2 + \epsilon\mu\lambda + \omega_0^2 - \epsilon g_1 \exp(-\lambda\tau_1) = 0 \quad (18)$$

存在 Hopf 分叉的条件是存在纯虚根,假设特征值 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ ,其中 $\omega$ 为实数且 $\omega > 0$ ,代入到方程(18)得受控系统的 Hopf 分叉条件为

$$\mu\omega_0 + g_1 \sin\omega_0\tau_1 = 0 \quad (19)$$

且当 $\mu\omega_0 + g_1 \sin\omega_0\tau_1 < 0$ 时,存在稳定的极限环,且极限环的幅值由(12).方程(19)及方程(12)中均含有时滞参数,显然,适当的调节时滞参数会导致 Hopf 分叉的发生,即可以导致系统极限环的产生或消失,同时还能控制极限环幅值的大小.数值模拟的结果如图 1 所示,计算所取参数为 $\tau_1 = \tau_2 = \pi/2, \omega_0 = 1, \mu = -1, \alpha = 1, \beta = -1$ .

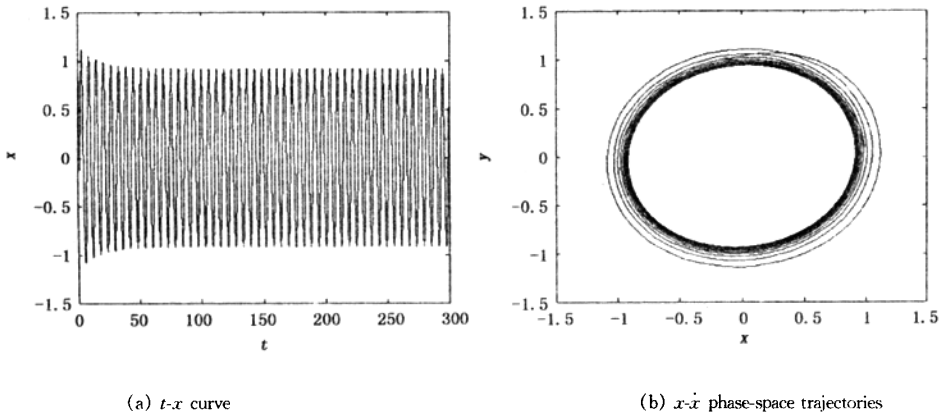
由图可以看出,调节时滞项的参数,可以改变极限环幅值,也可以使得极限环消失,即在原有的 Hopf 分叉点处不再存在 Hopf 分叉,从而可以对这类自治系统的 Hopf 分叉进行控制.本文所讨论的例子中 $\tau_1 = \tau_2 = \pi/2$ 只是满足分叉控制要求的一种情况,在这种条件下,原系统的 Hopf 分叉可以得到控制,极限环幅值可以得到改变的同时,不改变系统的响应频率,这在实际工程中是很有意义的.当然,某些时候也需要对响应频率加以控制,可以利用本文所得公式(11)进行设计,本文这里不作讨论.



(a)  $t-x$  curve (b)  $x-\dot{x}$  phase-space trajectories

图 1 参数  $g_1 = g_2 = 0$  原系统数值解(a) 时间历程图(b) 相图

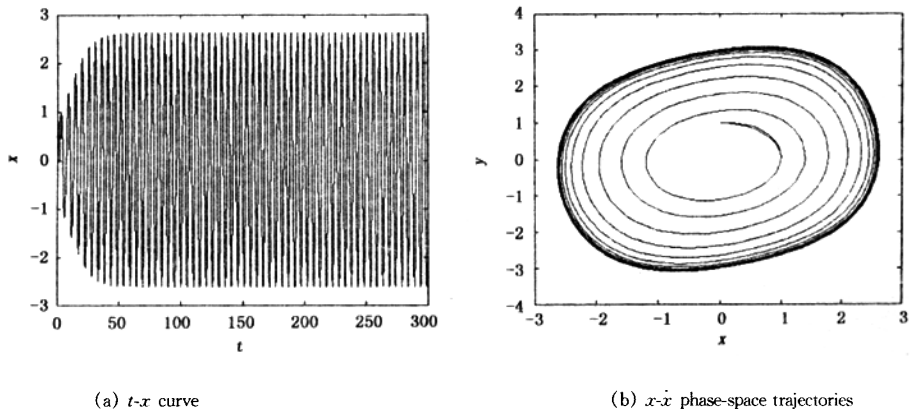
Fig.1 Numerical solutions of original system with parameters  $g_1 = g_2 = 0$



(a)  $t-x$  curve (b)  $x-\dot{x}$  phase-space trajectories

图 2  $g_1 = g_2 = 0.5$  时受控系统数值解(a) 时间历程图(b) 相图

Fig.2 Numerical solutions of controlled system with  $g_1 = g_2 = 0.5$



(a)  $t-x$  curve (b)  $x-\dot{x}$  phase-space trajectories

图 3  $g_1 = -0.5, g_2 = -0.1$  时受控系统数值解(a) 时间历程图(b) 相图

Fig.3 Numerical solutions of controlled system with  $g_1 = -0.5, g_2 = -0.1$

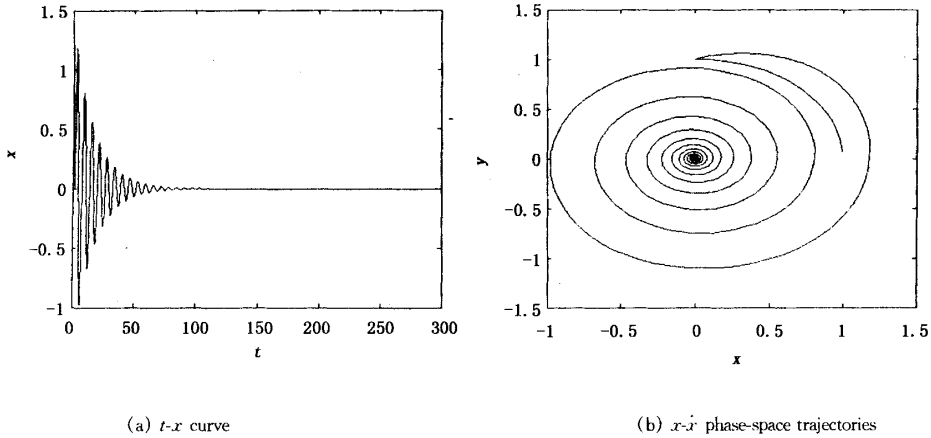


图4  $g_1 = 2, g_2 = -0.1$  时受控系统数值解(a) 时间历程图(b) 相图

Fig.4 Numerical solutions of controlled system with  $g_1 = 2, g_2 = -0.1$

### 3 结论

本文对含有时滞非线性位移的 van der Pol-Duffing 方程进行了研究,着重研究了时滞参数对 van der Pol-Duffing 方程 Hopf 分叉产生条件及极限环幅值的影响.首先采用摄动法从理论上推导出极限环幅值与时滞参数之间的关系,分析时滞参数对幅值大小的影响,并着重讨论了不改变振动频率情况下对幅值的控制.最后用数值计算的方法验证了理论计算结果,结果表明数值计算结果与理论结果相当吻合.本文首次采用含有两个时滞参数的非线性线性控制器对 van der Pol-Duffing 方程极限环幅值控制进行了研究,得到了满意的结果,说明时滞系统在振动控制领域有广泛的应用前景.文中研究还表明,时滞控制不仅能控制极限环幅值的大小,同时还可对振动频率进行控制,本文着重讨论了保持频率不变条件下对幅值的控制,至于其他情况有待于进一步的研究.

### 参 考 文 献

- 1 Just W, et al. Mechanism of time-delayed feedback control. *Physical Review Letters*, 1997, 78(2): 203~206
- 2 胡海岩, 王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展. *力学进展*, 1999, 29(4): 501~512 (Hu Haiyan, Wang Zaihua. Review on nonlinear dynamic systems involving time delays. *Advances in Mechanics*, 1999, 29(4): 501~512 (in Chinese))
- 3 Chen G, Moiola J L, Wang H O. Bifurcation control: theories, methods, and application. *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10: 511~548
- 4 Moiola J L, Colantonio M C, Donate P D. Analysis of static and dynamic bifurcation from a feedback systems perspective. *Dyn. Stab. Syst*, 1997, 12: 293~317
- 5 Alvarez J, Curiel L E. Bifurcations and chaos in a linear control system with saturated input. *Int. J. Bifurcations Chaos*, 1997, 7: 1811~1822
- 6 H Y Hu and Z H Wang Stability analysis of a damped s. d. o. f. system with two time-delays in state feedback. *J. of Sound and Vibration*, 1998, 214: 213~225
- 7 J C Ji and A Y T Leung. Resonances of a non-linear s. d. o. f. system with two time-delays in linear feedback control. *J. of Sound and Vibration*, 2002, 253(5): 985~1000
- 8 徐鉴, 陆启韶. 非自治时滞反馈控制系统的周期解分叉和混沌. *力学学报*, 2003, 35(4): 443~451 (Xu Jian, Lu Qishao. Bifurcations and chaos due to time delay in a delayed control non-autonomous system. *ACTA MECHANICA SINICA*, 2003, 35(4): 443~451 (in Chinese))
- 9 J. Xu, K. W. Chung. Effects of time delayed position feedback on a van der Pol-Duffing oscillator. *Physica D.*, 2003, 180: 17~39
- 10 Maccari A. Vibration control for primary resonance of van der Pol oscillator by a time delay state feedback. *Int. J. Non-linear Mechanics*, 2003, 38: 128~131

## CONTROL OF A KIND OF AUTONOMOUS SYSTEM TO HOPF BIFURCATION AND AMPLITUDE OF LIMIT CYCLE BASED ON TIME DELAYS FEEDBACK\*

Qian Changzhao Fu Wenbin

(*Department of Mechanics Hunan University, Changsha 410082, China*)

**Abstract** A typical dynamics system, van der Pol-Duffing equation with two time delays, was studied. The key aim was to study amplitude control of limit cycle in van der Pol-Duffing system by using time delays feedback controller. Perturbation method was used to obtain the relation equation between amplitude and time-delays. Based on the equation, the controlling of time delays to amplitude were discussed. The stability of normal solution was analyzed, and the Hopf bifurcation condition of the controlled system was obtained. Numerical method was utilized to testify the theoretic results, which indicated the numerical results were in good agreement with the theoretical results.

**Key words** perturbation method, bifurcation control, dynamics systems with time delays