

板类结构动力检测与控制中的一种新方法

李建康 张春利 解辛辛

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

摘要 曲率模态在结构动力检测中具有对动力结构损伤部位非常敏感的特性,传统方法主要是运用中心差分法求解曲率模态.由于中心差分法的计算精度依赖于测点分布的紧密程度,这样就使动力检测结果具有很大的误差.本文利用函数的契贝雪夫多项式的展开式具有很高的逼近特性,提出了板类结构动力检测的曲率模态算法——契贝雪夫多项式算法,构造出了板类结构振型的契贝雪夫多项式函数.对该函数进行求二阶偏导得到 x 和 y 方向的曲率模态,进而求出结构损伤前后的曲率模态差.该方法可为结构损伤检测提供可靠的数据,从而达到良好的检测控制效果.

关键词 契贝雪夫多项式,板,曲率模态,损伤检测

引言

通常来说结构的损伤一定会引起结构某些物理特性的改变(如刚度、质量和阻尼),由模态分析理论可知,伴随系统特性的改变必然有模态参数的改变^[2](如固有频率、模态振型和模态阻尼等).这种关系已经被广泛地运用到工程结构的动力检测和结构健康监测中.早期研究人员通过对同一结构损伤和未损伤两种情况下固有频率和振型的研究,利用他们的改变量来确定损伤部位和损伤程度.1991年 Pandey^[3]首先提出模态曲率是结构检测中的一个很好的指标,并成功地运用在梁式结构检测中.许多研究人员发现曲率模态与固有频率和振型相比较,曲率模态是结构检测中的一个非常灵敏的参数. Raghvedachav^[4]用曲率模态检测了三跨混凝土梁,结果发现,曲率模态对局部损伤更加敏感、可靠.国内一些学者^[5,6]在这方面也作了深入研究.

1 板类结构曲率模态的理论背景

1.1 梁式结构曲率模态的中心差分算法

对于梁式结构,由材料力学可知某一截面的曲率 κ 可表示为

$$\kappa = M/EI \quad (1)$$

式中: M 为截面弯矩; EI 为截面的抗弯刚度.

式(1)表明:梁式结构的截面曲率与截面抗弯

刚度有着密切的关系(反比例关系),截面曲率的显著改变可以反映截面刚度发生改变^[3].从而表明结构的物理特性发生了变化.这样,就可以运用曲率模态检测动力结构的损伤状况.

梁式结构曲率模态的计算,通过得到的实测振型运用中心差分法由下式计算(通常测点等间距 h 布置),对于两端点可以分别运用前/后差分法.

$$\kappa_i = u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (2)$$

式中: h 为测点间距; u_i 为某阶模态下第 i 测点的位移值.

1.2 曲率模态分析在板类结构中的推广

梁式结构曲率模态的求解是一维问题,推广到二维问题中就可得到板类结构曲率模态的计算公式.通常的做法是计算板面 x 和 y 两个方向的曲率模态(3)如下

$$\kappa_x = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h_x^2} \quad (3a)$$

$$\kappa_y = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h_y^2} \quad (3b)$$

式中: κ_x 和 κ_y 分别为板 x 方向和 y 方向的曲率模态, h_x 和 h_y 分别为 x 方向和 y 方向的等间隔步距, $y(x_i, y_j)$ 为某阶振型下 (i, j) 测点的位移值.

2 基于契贝雪夫多项式逼近法计算曲率模态差

差分法的精度依赖于测点布置的疏密程度, 这样曲率模态有明显的误差存在. 运用契贝雪夫多项式逼近法精确性的特点构造出测点位移函数的契贝雪夫多项式函数, 利用该多项式函数值计算曲率模态, 进而求出曲率模态差.

2.1 契贝雪夫多项式的定义以及函数按契贝雪夫多项式的展开式

2.1.1 次契贝雪夫多项式定义为

$$T_n(x) = \cos n\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

通过变换

$$x = \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi; -1 \leq x \leq 1) \quad (5)$$

由式(4)和式(5)可得

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (6)$$

其中 $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$. 利用(6)式可以逐次求出契贝雪夫多项式组

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 - 1 \\ \dots \end{cases} \quad (7)$$

2.1.2 单变量函数按契贝雪夫多项式的展开式

采用契贝雪夫多项式构成正交多项式组, 建立函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小平方逼近多项式为

$$Q_m(x) = c_0(x)T_0(x) + c_1(x)T_1(x) + \dots + c_m T_m(x) \quad (8)$$

则有的次契贝雪夫多项式为

$$f(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i(x) \quad (9)$$

2.2 板类结构测点位移的契贝雪夫多项式表式

根据式(8)和式(9)可推广得到二元函数 $u(x, y)$ 的契贝雪夫多项式形式

$$u(x, y) = \sum_i^n \sum_j^m c_{ij} T_i(x) T_j(y) \quad (-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1) \quad (10)$$

式中: n, m 分别为 $T(x)$ 和 $T(y)$ 的阶次.

为分析计算的方便, 取正方形板类结构平面

(边长 L), $n = m = N$, 且板面测点个数为 $p = N \times N$. 构造标准的契贝雪夫多项式, 通过两个线性变换

$$\xi = \frac{2x}{L} - 1, \eta = \frac{2y}{L} - 1 \quad (11)$$

把实际的物理区域 $\{x, y\} = [0, L] \times [0, L]$ 变换成 $\{\xi, \eta\} = [-1, 1] \times [-1, 1]$. 从而关于变量 x 和 y 的契贝雪夫多项式可表示为

$$\begin{cases} T_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ T_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) \\ T_{i+1}(x) = 2 \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) T_i(x) - T_{i-1}(x) \\ i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \quad (12a)$$

$$\begin{cases} T_1(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ T_2(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2y}{L} - 1 \right) \\ T_{j+1}(y) = 2 \left(\frac{2y}{L} - 1 \right) T_j(y) - T_{j-1}(y) \\ j = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases} \quad (12b)$$

式(10)对所有的实际测点均满足, 把他写成矩阵的形式

$$\{u(x_i, y_j)\}_{p \times l} = [T(x_i)T(y_j)]_{p \times p} \{c_{ij}\}_{p \times l} \quad (13)$$

由式(13)可解得系数向量

$$\{c_{ij}\}_{p \times l} = [T(x_i)T(y_j)]_{p \times p}^{-1} \{u(x_i, y_j)\} \quad (14)$$

采用 $T_{n+1}(x)T_{n+1}(y)$ 的零点

$$x_i = \cos \frac{2i-1}{2(n+1)}\pi, y_j = \cos \frac{2j-1}{2(n+1)}\pi \quad (15)$$

求出系数向量, 效果会更好, 同时它也是下文所要讲的选择布置测点的依据. 把式(15)代入式(10)可得系数

$$c_{ij} = \frac{2}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{m=1}^{n+1} u(x_l, y_m) T_i(x_l) T_j(y_m) \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

2.3 曲率模态差的计算

把式(14)或式(16)代到式(10)中, 可解出位移动模态的具体表达式, 然后对式(10)求二阶偏导, 可分别得到 x 和 y 方向的曲率模态

$$u_{xx}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \frac{\partial^2 T_i(x)}{\partial x^2} T_j(y)$$

$$u_{yy}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \frac{\partial^2 T_j(x)}{\partial y^2} T_i(x) \quad (17)$$

根据式(17)计算出损伤前各方向的曲率模态 u_{xx}^u, u_{yy}^u 和损伤后各方向的曲率模态 u_{xx}^d, u_{yy}^d . 由式(18) 求出相应方向的曲率模态差

$$\begin{cases} \delta_{xx} = u_{xx}^d - u_{xx}^u \\ \delta_{yy} = u_{yy}^d - u_{yy}^u \end{cases} \quad (18)$$

3 实例分析

3.1 分析模型

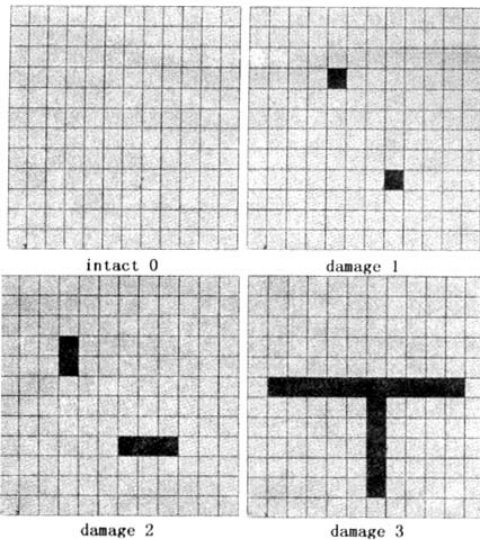


图1 板的模型与不同损伤部位在板中的分布情况 (其中黑色部分表示损伤部位)

Fig.1 The finite element of the model plate and different damage distribution (the black area shows the damage area)

为分析方便取正方形板,其结果适用于任何板类结构. 如图所示,四边固定支撑的正方形板(尺

寸为 $a \times b \times h = 480 \text{ mm} \times 480 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$), 材料的弹性模量为 $E = 2.04 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 密度 $\rho = 7.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. 利用大型商用软件 Ansys 进行模拟计算(单元类型 shell 63 划分为 12×12 单元), 板的损伤通过改变损伤部位单元的抗弯刚度(EI) 值来实现. 假设有 3 种不同的损伤部位和 2 种损伤程度如表所列.

表1 板的损伤情况

Table 1 Damage condition of the plate

Condition	Damage area	Damage degree E^d
Intact 0	Undamaged	
Damage 1	$x \in (160 \text{ mm}, 200 \text{ mm}),$ $y \in (320 \text{ mm}, 360 \text{ mm})$	30 %
	$x \in (280 \text{ mm}, 320 \text{ mm}),$ $y \in (120 \text{ mm}, 160 \text{ mm})$	
Damage 2	$x \in (120 \text{ mm}, 160 \text{ mm}),$ $y \in (280 \text{ mm}, 360 \text{ mm})$	80 %
	$x \in (240 \text{ mm}, 360 \text{ mm}),$ $y \in (120 \text{ mm}, 160 \text{ mm})$	
Damage 3	$x \in (240 \text{ mm}, 280 \text{ mm}),$ $y \in (40 \text{ mm}, 240 \text{ mm})$	
	$x \in (40 \text{ mm}, 240 \text{ mm}),$ $y \in (280 \text{ mm}, 320 \text{ mm})$	

3.2 用契贝雪夫多项式函数计算的曲率模态差进行板类结构的损伤检测

由模态分析理论可知,曲率与固有频率的平方值成反比例关系. 因此固有频率的微小变化可以引起曲率的显著变化. 这表明在实际振动系统中只有少数低阶模态起主要作用^[7]. 本文提取板自由振动的第一阶模态进行曲率模态的计算, 同样具有很好的精度, 对检测结果几乎没有影响. 通过改变材料的杨氏模量 E 改变结构的抗弯刚度来模拟损伤, 由计算机仿真试验得到各种情况下的响应数据, 根据式(18) 计算出各种损伤情况下相应 x 和 y 方向的曲率模态差. 分别绘出 $E^d = 0.3E$ 和 $E^d = 0.8E$ 损伤程度下各种不同损伤部位的曲率模态差曲面图. 如图 2 ~ 图 5.

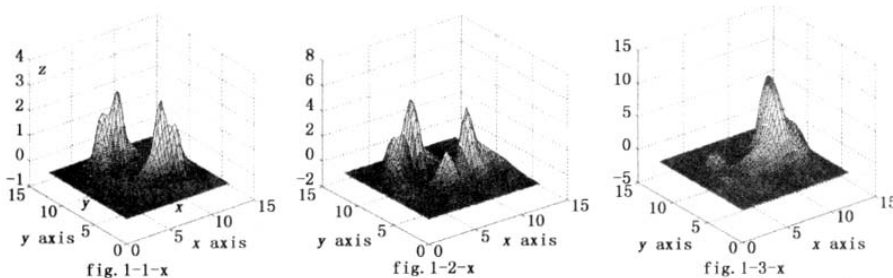


图2 损伤为 $E^d = 0.3E$ 的三种不同部位损伤相应 x 方向的曲率模态差

Fig.2 The curvature difference of the x -direction in three different damage area (damage degree $E^d = 0.3E$)

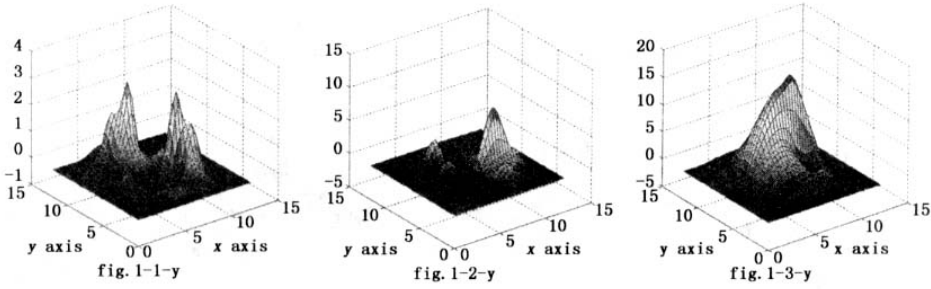


图3 损伤为 $E^d = 0.3E$ 的三种不同部位损伤相应 y 方向的曲率模式差

Fig. 3 The curvature difference of the y -direction in three different damage area (damage degree $E^d = 0.3E$)

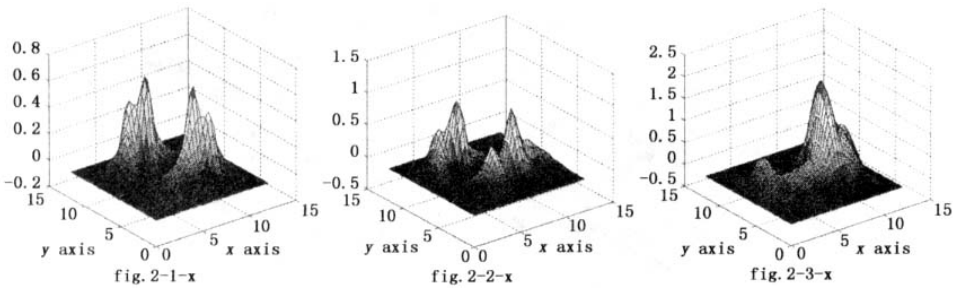


图4 损伤为 $E^d = 0.8E$ 的三种不同部位损伤相应 x 方向的曲率模式差

Fig. 4 The curvature difference of the x -direction in three different damage area (damage degree $E^d = 0.8E$)

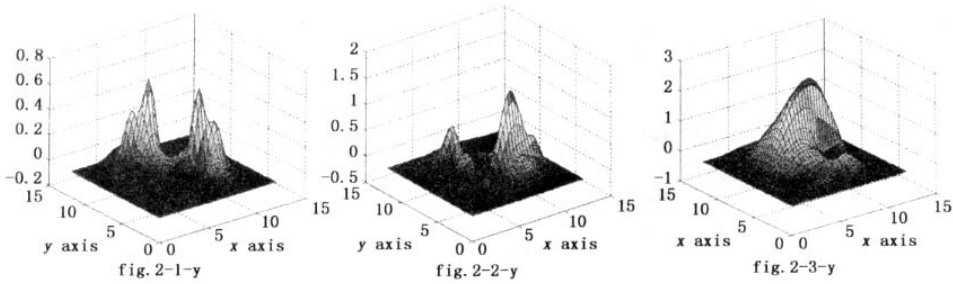


图5 损伤为 $E^d = 0.8E$ 的三种不同部位损伤相应 y 方向的曲率模式差

Fig. 5 The curvature difference of the y -direction in three different damage area (damage degree $E^d = 0.8E$)

3.3 结构损伤部位和损伤程度的判断

曲率模式差值在损伤部位有显著的变化,它在曲率模式差曲面上表现为有陡峭或者尖峰出现.从图2和图3中,可以清楚的看出它们在不同情况下的不同损伤情况.其中尖峰和陡峭出现的位置就是损伤部位,图中尖峰和陡峭的程度(纵坐标值的大小)表现了动力结构的损伤程度.如 fig. 1-1-x 和 fig. 2-1-x 表示在损伤部位 (damage 1) 情况下两种不同损伤程度的曲率模式差曲面图.由 fig. 1-3-x, fig. 1-2-y 或者 fig. 2-3-x, fig. 2-3-y 可以看出 x/y 方向的曲率模式差可以准确地反映垂直 x/y

方向地损伤带.这一点在动力检测中要注意.

测点布置对测试结果影响较大.因此,测试点不应该靠近节点.在实际检测中,可以根据(15)式有目的的选择测点,基本可以满足不靠近节点的条件.由于契贝雪夫多项式具有良好的逼近特性,计算误差对测试结果影响非常小.但在实际检测中有许多环境因素的影响,仍要尽可能使用精度较高的仪器和合理的测试方法,以取得较高精度的测试结果.

4 结论

曲率模式是结构动力检测中一个非常灵敏的

参数,本文通过构造模态振型函数的契贝雪夫多项式表达式,由实验得到的响应数据推导出精度较高的曲率模态函数的具体表达式,计算出曲率模态差值,给板类结构动力检测和动力控制提供了一种较高精度的新方法.

运用本文提供的算法在实际检测中可以有目的性的选择并布置测点,避免了传统方法中要求合理选择测点的麻烦.从而大大提高结构动力检测及控制的效率和经济性.

参 考 文 献

- 1 Zhao J, Dewolf JT. Sensitivity study for vibrational parameters used in damage detection. *Journal of Engineering, American Society of Civil Engineering*, 1999, 125(4): 410~416
- 2 Doebling SW, Farrar CR, Prime MB. A summary review of vibration-based damage identification methods. *The Shock and Vibration Digest*, 1998, 30(2): 91~105
- 3 Pandey AK, Biswas M, Samman MM. Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Sound and Vibration*, 1991, 145(2): 321~332
- 4 Raghavendrachar M, Akan AE. Flexibility of multi-reference impact testing for bridge diagnostics. *Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineering*, 1999, 125(4): 410~416
- 5 李德葆, 陆秋海, 秦权. 承弯结构的曲率模态分析. 清华大学学报, 2002, 42(2): 224~227 (LIDebao, LU Qiu hai, QN Quan. Curvature modal analysis for bending structures. *Journal of Tsinghua University*, 2002, 42(2): 224~227 (in Chinese))
- 6 邓焱, 严普强. 梁及桥梁应变模态与损伤测量的新方法. 清华大学学报, 2000, 4(11): 123~127 (Deng Yan, Yan Puchang. New approach for strain modal measurement and damage detection of bridges. *Journal of Tsinghua University*, 2000, 40(11): 123~127 (in Chinese))
- 7 Yoon MK, Heider D, Gillespie Jr JW, Ratcliffe CP, Crane RM. Local damage detection using the two-dimensional gapped smoothing method. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 279: 119~139

A NEW APPROACH FOR DYNAMIC DAMAGE DETECTION AND CONTROL OF PLATE-LIKE STRUCTURE

Li Jiankang Zhang Chunli Xie Xinxin

(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract Because the curvature mode used in dynamic detection is sensitive to the damaged location of the dynamic structure, the traditional method mainly used the central difference method to solve the curvature mode and its accuracy depends on the density of the measurement grid in dynamic detection, the central difference method will induce a very large error in dynamic damage detection. Taking advantage of the good approximation of the Chebyshev polynomial, we defined a Chebyshev polynomial function of the mode shape, and obtained the corresponding curvature mode by the second derivatives of the Chebyshev polynomial function of the mode shape. The method provided a reliable data for dynamic damage detection and achieved a good effect.

Key words Chebyshev polynomial, plate, curvature mode, dynamic damage detection