

粘弹性传动带的分岔特性和混沌振动分析

刘伟 张劲夫

(西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072)

摘要 研究了粘弹性传动带横向振动的分岔特性和混沌动力学行为. 将传动带视为沿轴向运动的抗弯刚度较小的粘弹性梁模型, 同时考虑变形的几何非线性和材料的非线性因素, 运用弹性力学方法建立了其横向振动的偏微分方程, 利用 Galerkin 方法得到了时空坐标解耦的二阶非线性动力学方程, 重点探讨了带速波动对系统动态特性的影响. 采用数值方法对系统的运动响应进行仿真, 分岔图和 Poincaré 图表明: 随着平均带速和波动幅值的变化, 系统出现周期振动和混沌振动, 倍周期分岔是产生混沌振动的途径.

关键词 粘弹性传动带, Galerkin 方法, 分岔, 混沌

引言

带传动是工程中应用十分广泛的传动装置, 它具有结构简单, 造价低廉, 传动效率高等优点. 但是传动带工作时会产生人们所不期望的横向振动, 不仅会产生噪声, 而且会影响传动精度, 加速传动带的磨损. 所以研究传动带的横向非线性振动及其控制具有重要的实际应用价值. 传动带的动力学模型可以看成是沿轴向运动的连续体, Wickert 和 Mote^[1]研究了轴向运动连续体(线弹性弦和梁)振动的模态函数, Wickert^[2]用 KBM 渐近方法研究运动梁的非线性分岔, Moon^[3]通过实验研究了带轮偏心而引起的传动带的非线性振动, Oz 和 Pakdemirli^[4]研究了轴向运动弹性梁的振动, Chen^[5]采用四阶 Galerkin 方法研究了粘弹性弦线的周期和混沌运动, 李滨城^[6]通过实验指出工作负荷对传动带的振动有着重要的影响, 张伟^[7]将传动带视为粘弹性弦线, 利用 Wickert 提出的模态函数研究了传动带在张力周期变化时的 1:3 内共振情形, 杨晓东^[8]研究了 Leaderman 本构关系的粘弹性运动梁的分岔和混沌动力学行为.

工程中传动带既具有一定的厚度, 又是一个柔性很大的非线性材料的结构, 本文将传动带视为轴向运动的抗弯刚度较小的 Kelvin 本构关系的粘弹性梁模型, 同时考虑了变形的几何非线性和材料的非线性因素, 推导了传动带横向振动的非线性方程, 研究了由于带速波动而引起的传动带的横向振动的响

应, 并且分析了分岔、混沌等非线性动力学特性.

1 粘弹性传动带的运动方程

带传动模型简图如图 1 所示, 设传动带的密度为 ρ , 横截面积为 A , 带的跨度为 L , v 为带速. 为描述传动带的横向振动, 以带的横向振动时的平衡位置为 X 轴, 时间坐标为 T , 以带与带轮节圆的切点为坐标原点, 建立如图 1 所示的直角坐标系 XOY . 张紧在两个带轮之间的传动带的动力学模型可以简化为具有粘弹性特性两端简支的沿轴向运动的梁, 并且承受拉力, 如图 2 所示. 由于本文同时考虑变形的几何非线性和材料特性的非线性, 与现有文献有较大不同, 有必要进行重新建模分析.

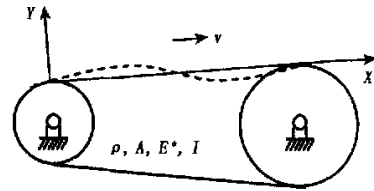


图1 带传动简化模型

Fig. 1 The model of a belt drive

取距离原点 X 处的传动带的微段 ΔX 来分析, 设该处的横向位移为 $W = W(X, T)$, 微段的两端面上分别作用有张力 $P, P + \frac{\partial P}{\partial X}\Delta X$, 剪力 $Q, Q + \frac{\partial Q}{\partial X}\Delta X$ 和弯矩 $M, M + \frac{\partial M}{\partial X}\Delta X$.

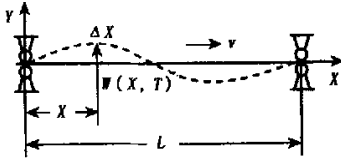


图2 粘弹性传动带的动力学模型
Fig.2 The model of a viscoelastic belt

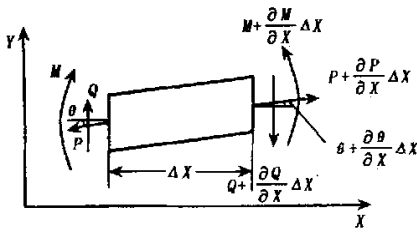


图3 传动带的微段受力图
Fig.3 The force diagram of a segment of the belt

根据传动带微段的受力图3, 写出任意瞬时 T 时, Y 方向的力平衡方程

$$\rho A \Delta X \frac{d^2 W}{dT^2} = (P + \frac{\partial P}{\partial X} \Delta X) \sin(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial X} \Delta X) + Q - P \sin \theta - (Q + \frac{\partial Q}{\partial X} \Delta X) \quad (1)$$

传动带是一个大柔性结构, 工作时会产生不可忽略的几何变形, 由于横向振动位移而产生的轴向应变 ϵ 为

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\frac{\partial W}{\partial X})^2 \quad (2)$$

计入轴向应变对张力的影响, 所以相应的工作张力表示为

$$P = P_0 + E^* \epsilon A \quad (3)$$

上式中 P_0 表示传动带的初张力, E^* 是等价弹性模量, 工程中传动带的材料更多地采用高分子高强度的聚合材料和人造纤维等粘弹性材料, 这里采用 Kelvin 本构关系

$$E^* = E_0 + \eta \frac{\partial}{\partial T} \quad (4)$$

上式中 E_0 是传动带的杨氏模量, η 是动态粘性系数.

考虑到传动带轴向速度的影响, 传动带上研究点处 Y 方向的绝对速度和加速度为

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dT} &= \frac{\partial W}{\partial X} v + \frac{\partial W}{\partial T} \\ \frac{d^2 W}{dT^2} &= v^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + 2v \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T} + \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + \frac{\partial v}{\partial T} \frac{\partial W}{\partial X} \end{aligned} \quad (5)$$

再由剪力与弯矩的关系

$$Q = \frac{\partial M}{\partial X} = E^* I \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} \quad (6)$$

将式(2) ~ 式(6)代入到式(1)中, 对于小变形情况, 有 $\sin \theta \approx \theta \approx \partial W / \partial X$, 化简并略去包含 ΔX 的高阶小量, 得到粘弹性传动带的横向振动的动力学方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + 2v \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T} + \frac{\partial v}{\partial T} \frac{\partial W}{\partial X} + (v^2 - \frac{P_0}{\rho A}) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{E_0 I}{\rho A} \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \frac{\eta I}{\rho A} \frac{\partial^5 W}{\partial X^4 \partial T} - N(W) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $N(W)$ 为非线性项

$$\begin{aligned} N(W) &= \frac{3}{2} \frac{E_0}{\rho} (\frac{\partial W}{\partial X})^2 \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \times \\ &\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T} + \frac{\eta}{\rho} (\frac{\partial W}{\partial X})^2 \frac{\partial^3 W}{\partial X^2 \partial T} \end{aligned} \quad (8)$$

模型的边界条件为

$$\begin{aligned} W(0, T) = W(L, T) &= 0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \Big|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

为方便计算和分析, 引入无量纲变量和参数如下

$$\begin{aligned} x = \frac{X}{L}, y = \frac{W}{L}, t = \frac{T}{L} \sqrt{\frac{P_0}{\rho A}}, \gamma = v \sqrt{\frac{\rho A}{P_0}}, \\ \delta = \sqrt{\frac{E_0 I}{P_0}}, \alpha = \frac{\eta I}{\sqrt{P_0 \rho A}}, E_e = \frac{E_0 A}{P_0}, \\ E_v = \eta \sqrt{\frac{A}{\rho P_0}} \end{aligned} \quad (10)$$

将上述变换代入方程(7), 得到粘弹性传动带无量纲形式的非线性动力学方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} + (\gamma^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \\ \delta^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \alpha \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} - \frac{3}{2} E_e (\frac{\partial y}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \\ E_v \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} - E_v (\frac{\partial y}{\partial x})^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

相应的无量纲形式的边界条件

$$\begin{aligned} y(0, t) = y(1, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=1} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

2 振动分析

传动带在工作过程中, 机器操作人员会时常需要停车或启动, 带速会经常发生变化. 所以研究带

速波动对系统的影响显得十分必要,我们假设无量纲形式的带速 γ 在平均带速 γ_0 (不随时间变化) 附近有波动,用公式表示为

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \sin \Omega t \tag{13}$$

其中 γ_1 表示波动幅值, Ω 表示波动频率.

将式(13)代入到式(11),得到传动带受到带速周期波动激励的振动方程.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\gamma_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + (\gamma_0^2 - 1) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \delta^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \\ & \alpha \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} + 2\gamma_1 \sin \Omega t \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \Omega \gamma_1 \cos \Omega t \frac{\partial y}{\partial x} + \\ & (2\gamma_0 \gamma_1 \sin \Omega t + \gamma_1^2 \sin^2 \Omega t) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \\ & \frac{3}{2} E_r \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - E_v \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} - \\ & E_v \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

对于偏微分振动方程(14)通常难以得到精确解,本文通过数值方法来观察和分析其非线性动力学行为.在进行数值计算前,有必要对方程解耦和简化.这里采用 Galerkin 方法进行离散,方程(14)解的形式可以写成

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \sin(i\pi x) \tag{15}$$

这里取二阶 Galerkin 截断,即 $n = 2$,将式(15)代入到式(14)中,利用模态振型的正交性,在方程两边同乘以 $\sin(j\pi x)$, $j = 1, 2$,然后在区间 $[0, 1]$ 上积分,可以将方程简化为二阶非线性系统

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 - \frac{16}{3} \gamma_0 \dot{q}_2 + \alpha \pi^4 \dot{q}_1 + [\delta^2 \pi^4 - (\gamma_0^2 - 1) \pi^2] q_1 + \\ \frac{3}{8} E_r \pi^4 (q_1^3 + 8q_1 q_2^2) - \frac{16}{3} \gamma_1 \sin \Omega t \dot{q}_2 - \\ \frac{8}{3} \Omega \gamma_1 \cos \Omega t q_2 - \pi^2 (2\gamma_0 \gamma_1 \sin \Omega t + \\ \gamma_1^2 \sin^2 \Omega t) q_1 + \frac{1}{2} E_v \pi^4 (q_1^2 \dot{q}_1 + \\ 4q_1 q_2 \dot{q}_2 + 4q_2^2 \dot{q}_1) = 0 \end{aligned} \tag{16a}$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 + \frac{16}{3} \gamma_0 \dot{q}_1 + 16\alpha \pi^4 \dot{q}_2 + [16\delta^2 \pi^4 - \\ 4\pi^2 (\gamma_0^2 - 1)] q_2 + 3E_r \pi^4 (q_1^2 q_2 + 2q_2^3) + \\ \frac{16}{3} \gamma_1 \sin \Omega t \dot{q}_1 + \frac{8}{3} \Omega \gamma_1 \cos \Omega t q_1 - \\ 4\pi^2 (2\gamma_0 \gamma_1 \sin \Omega t + \gamma_1^2 \sin^2 \Omega t) q_2 + \\ 2E_v \pi^4 (4q_2^2 \dot{q}_2 + q_1 q_2 \dot{q}_1 + q_1^2 \dot{q}_2) = 0 \end{aligned} \tag{16b}$$

上式中上标点号表示关于时间求导数.

式(16)为二阶截断简化后的粘弹性传动带经受带速周期变化的非线性振动方程,可以看出传动带振动具有非线性时变和非线性耦合特性的连续陀螺动力学特性.

3 粘弹性传动带的混沌振动

本节采用数值方法对粘弹性传动带系统的非线性动力学特性进行研究.这里所选取的参数为: $\Omega = 0.4, \delta = 0.1, \alpha = 0.0005, E_r = 50, E_v = 0.04$. 初始位置和速度为 $q_1 = 0.1, \dot{q}_1 = 0.1, q_2 = 0.1, \dot{q}_2 = 0.1$. 考查 $\gamma_0 = 0.74, \gamma_1 = 0.5$ 时系统的响应,代入以上变量和参数到式(16)中,运用四阶 Runge-Kutta 法,得到传动带中点处的时间历程曲线(图4)和功率谱(图5),由图可见,系统产生了混沌振动.

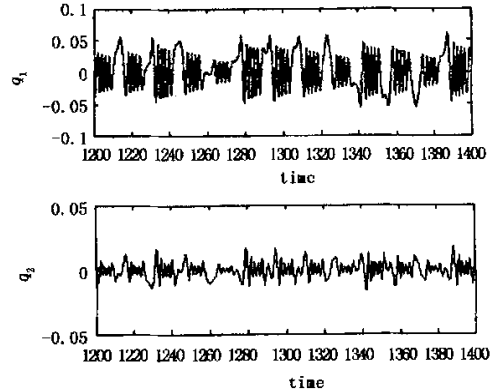


图4 传动带混沌振动时间历程曲线

Fig. 4 Time history curve for chaotic motion

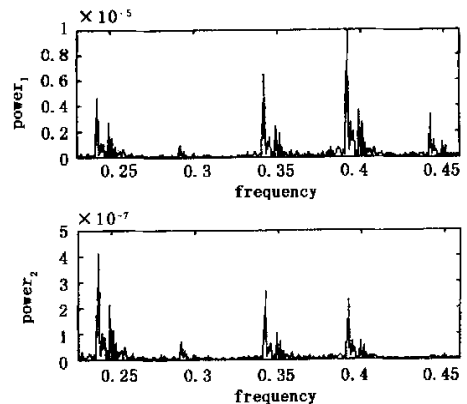


图5 混沌振动的功率谱图

Fig. 5 Power spectrum for chaotic motion

3.1 平均带速大小对系统的影响

分岔图和 Poincaré 图是研究系统非线性动力学行为的有效工具. 令 γ_0 为可变参数, 取上述基本参数值, 图 6 表示平均带速 γ_0 从 0.5 变化到 0.8 时振动位移 q_1 的分岔图, 系统在带速 $\gamma_0 < 0.536$ 时做周期 1 的运动, 当 $\gamma_0 > 0.536$ 时, 系统产生分岔变为周期 2 运动, 当 $\gamma_0 = 0.604$ 时, 变为 4 周期运动, 其吸引子由两个变成了四个, 倍周期分岔过程如图 8 所示, 当 $\gamma_0 \geq 0.605$ 以后, 系统进入了第一个比较窄的混沌区域, 当 $\gamma_0 = 0.625$ 时, 系统离开混沌区, 进入周期 2 振动, 继续增大 γ_0 会产生倍周期分岔, 直至 0.645 后系统进入了第二个混沌区域. 在区间 $[0.66, 0.703]$ 上系统再次离开混沌区, 又回到周期 2 振动, 继续增大 γ_0 会产生倍周期分岔, 当 $\gamma_0 \geq 0.703$ 以后, 系统持续产生混沌振动, 图 7 显示的是混沌振动的 Poincaré 图.

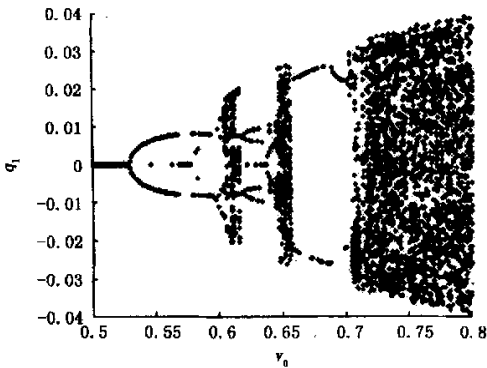


图 6 平均带速 γ_0 变化时横向位移的分岔图

Fig. 6 Bifurcation plot for average velocity γ_0

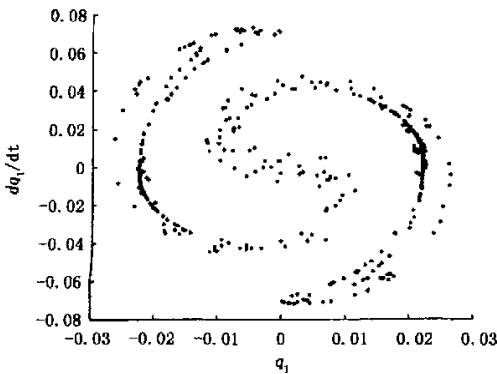
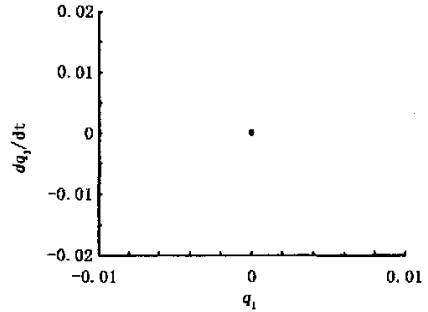


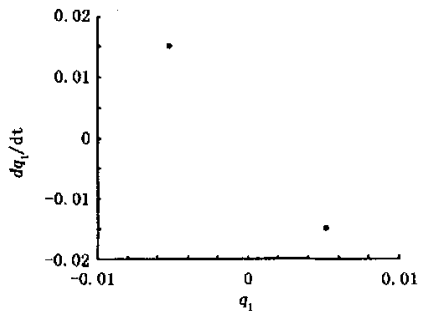
图 7 混沌振动的 Poincaré 图 ($\gamma_0 = 0.74$)

Fig. 7 Poincaré map for chaotic motion



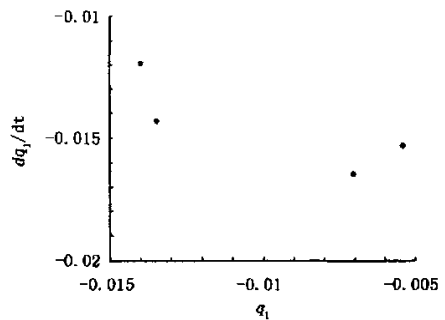
(a) 周期 1 运动 ($\gamma_0 = 0.5$)

(a)



(b) 周期 2 运动 ($\gamma_0 = 0.54$)

(b)



(c) 周期 4 运动 ($\gamma_0 = 0.604$)

(c)

图 8 倍周期分岔及其吸引子

Fig. 8 Period double bifurcation and attractor

3.2 带速波动幅值大小对系统的影响

这里为了研究带速波动幅值大小对系统动态特性的影响, 取平均带速 $\gamma_0 = 0.5$, 令 γ_1 从 0.5 变化到 0.8, 位移 q_1 的分岔图如图 9 所示. 由图可见, 随着 γ_1 的增加, 在 0.553 附近出现倍周期分岔, 变化到 0.607 时, 再次倍周期分岔, 继续增大波动幅值后, 迅速倍周期分岔后系统进入了混沌运动状态, 混沌运动的 Poincaré 图如图 10 所示.

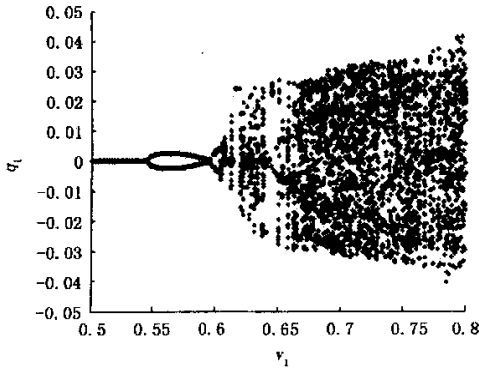


图 9 波动幅度 γ_1 变化时横向位移的分岔图

Fig. 9 Bifurcation for perturbation amplitude γ_1

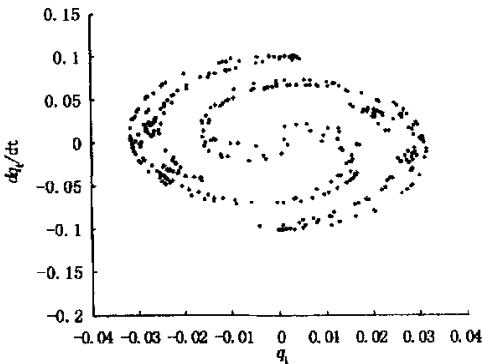


图 10 混沌振动的 Poincaré 图 ($\gamma_1 = 0.7$)

Fig. 10 Poincaré map for chaotic motion

4 结论

本文将传动带视为沿轴向运动的抗弯刚度较小的粘弹性梁,建模过程中同时考虑了变形的几何非线性和材料非线性,运用弹性力学方法推导了传动带的横向振动的偏微分方程,通过对方程进行二阶 Galerkin 离散后得到了时空坐标解耦的非线性动力学方程,在此基础上重点探讨了带速波动对传动带动力学特性的影响,采用数值方法模拟了传动带的动力学响应,分岔图和 Poincaré 图表明,当带速连续变化的过程中,系统出现周期运动和混沌运

动,倍周期分岔是产生混沌的途径.并且当平均带速或波动幅值增大到某个值后,系统将持续产生混沌振动.

参 考 文 献

- 1 Wickert JA, Mote Jr CD. Classical vibration analysis of axially-moving continua. *J Appl Mech*, 1990, (57): 738~744
- 2 Wickert JA. Non-linear vibration of traveling tensioned beam. *Int J Non-linear Mech*, 1992, 27(3): 503~517
- 3 Moon J, Wickert JA. Nonlinear vibration of power transmission belts. *J Sound Vibration*, 1997, 200: 419~431
- 4 OzHR, Pakdemirli M. Vibration of an axially moving beam with time-dependent velocity. *J Sound Vibration*, 1999, 227(2): 239~257
- 5 Chen LQ, Zhang NH, Zu JW. The regular and chaotic vibrations of axially moving viscoelastic string based on fourth order Galerkin truncation. *J Sound Vibration*, 2003, 261: 764~773
- 6 李滨城, Andreas HIRSCH 等. 机床带传动装置的横向振动及其影响因素. 华东船舶工业学院学报(自然科学版), 2004, 18(6): 66~70 (Li Bincheng, HIRSCH Andreas. Transverse Vibration in Belt Drives of Machine Tool and Influence Factors. *Journal of East China Shipbuilding Institute (Natural Science Edition)*, 2004, 18(6): 66~77(in Chinese))
- 7 张伟,温洪波等. 粘弹性传动带 1:3 内共振时的周期和混沌运动. 力学学报, 2004, 36(4): 443~454 (Zhang Wei, Wen Hongbo. Periodic and Chaotic Oscillation of a Parametrically Excited Viscoelastic Moving Belt With 1:3 Internal Resonance. *ACTA Mechanica Sinica*, 2004, 36(4): 443~454(in Chinese))
- 8 杨晓东,陈立群. 粘弹性轴向运动梁的非线性动力学行为. 力学季刊, 2005, 26(1): 157~162 (Yang Xiaodong, Chen Liqun. Nonlinear Dynamical Behaviors of an Axially Moving Visco-Elastic Beam. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2005, 26(1): 157~162(in Chinese))

ANALYSIS OF BIFURCATION AND CHAOTIC MOTION ON TRANSMISSION VISCO-ELASTIC BELTS

Liu Wei Zhang Jinfu

(*School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

Abstract The bifurcation behaviors and chaotic vibrations of transmission visco-elastic belts were investigated. An improved model of axially moving visco-elastic beam with small stiffness was introduced; the nonlinear effects of deflection and material were considered simultaneously, the partial differential dynamical equations for the visco-elastic belt were established using elastic mechanics method. The method of Galerkin approach was applied to obtain the second-order nonlinear equations, which decoupled in time and space coordinates. The effect of the velocity perturbation of the belts was discussed emphatically. Numerical simulation method was used to yield the response of the system; the bifurcation figure and Poincaré map show that the belts may undergo periodic and chaotic motions around different equilibrium in certain parameter regions, and the chaotic motion will occur through period double bifurcation.

Key words visco-elastic belts, the Galerkin method, bifurcation, chaos