

非线性磁悬浮控制系统的周期运动稳定性研究

施晓红 余龙华

(国防科技大学三院磁悬浮中心,长沙 410073)

摘要 通过分析基于串级PID控制器的非线性磁悬浮系统的hopf分岔现象,从控制参数与系统周期解稳定性的关系角度阐述磁悬浮系统产生振动的原因之一,给出了串级PID控制算法,建立了四阶磁悬浮系统动力学模型,并得出了控制参数的渐近稳定范围和hopf分岔条件.采用中心流形定理方法得到二阶降维模型,通过计算其PB规范形得到hopf分岔的稳定性以及对极限环的振动频率.分析结果表明基于串级PID控制的磁悬浮系统具有一个不稳定的hopf分岔点,在该点附近系统将会产生频率约为5~7赫兹、持续但最终发散的振动.

关键词 磁悬浮, hopf分岔, 中心流形, PB规范形

引言

随着磁悬浮列车正式运营,目前对其动力学特性的分析逐步增多,针对运行过程中出现的静止振动和运行振动现象解释可谓众说纷纭^[1-3].由于磁悬浮是一个集控制、机械、电磁等多个学科领域的复杂系统,影响其动态特性的非线性因素很多,本文试图从悬浮控制器角度出发,从控制参数与系统振动的关系这一角度探讨这一问题.经长沙中低速磁悬浮示范线长期的实验情况表明,虽然试用于磁悬浮系统的控制算法多种多样,但是串级PID控制^[4]是一种最简单而有效的控制方案.文献[4]利用劳斯判据给出了基于状态反馈的三阶磁悬浮控制系统hopf分岔条件以及相应的稳定自激振动频率.本文在此基础上利用中心流形定理以及PB规范形分析了四阶基于串级PID控制的磁悬浮系统hopf分岔条件并分析了分岔点的稳定性.

1 非线性磁悬浮系统PID控制模型

磁悬浮系统遵循的动力学方程在式(1)和式(2)中给出^[5],其中 m 表示悬浮对象的质量, z 表示悬浮间隙, N 表示悬浮电磁铁线圈匝数, A 表示电磁铁有效极面积, I 表示悬浮电流, U 表示悬浮电压, R 和 L 分别表示悬浮电磁铁线圈的电阻和电感

$$m\ddot{z} = -\frac{\mu_0 N^2 A I^2}{4z^2} + mg \quad (1)$$

$$U_a = RI + \frac{d(LI)}{dt} = RI + 2k(I/\dot{z}) \quad (2)$$

采用串级PID控制律对悬浮系统输出的电压进行调节

$$U = k_{c1}[k_p \dot{z} + k_d \ddot{z} + k_i \int (z - z_0) dt - k_{c2} I] \quad (3)$$

其中 k_{c1} 表示电流环增益, k_{c2} 表示电流反馈系数, k_p 表示比例增益, k_d 表示微分增益, k_i 表示积分增益, z_0 表示额定间隙.

根据以上动力学方程就可以建立悬浮系统的状态方程.取状态变量

$$x = [z - z_0 \quad \dot{z} \quad I/\dot{z} - \sqrt{mg/k} \quad (I/\dot{z})]$$

由式(1)~式(3)可得基于串级PID控制的非线性悬浮系统模型

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_3^2 - \frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_{c1}}{2k} \left[k_p x_2 - k_d \left(\frac{k}{m}x_3^2 + \frac{2k}{m}\sqrt{\frac{mg}{k}}x_3 \right) + \right. \\ &\quad \left. k_i x_1 + (R/k_{c1} + k_{c2})((x_1 + z_0)x_4 - (x_3 + \sqrt{mg/k})x_2) \right] \quad (4) \end{aligned}$$

分析可知,当控制参数满足以下条件时,系统全局渐近稳定

$$\begin{aligned} k_i > 0, k_{c1} > 0, k_{c2} > -\frac{R}{k_{c1}}, \\ k_p > \frac{(k_{c1}k_{c2} + R)}{k_{c1}} \sqrt{\frac{mg}{k}}, \\ k_d > \frac{(k_{c1}k_p - (k_{c1}k_{c2} + R)\sqrt{mg/k})}{k_{c1}(k_{c1}k_{c2} + R)z_0} + \\ & \frac{k_k z_0 (k_{c1}k_{c2} + R)\sqrt{mk/g}}{2k(k_{c1}k_p - (k_{c1}k_{c2} + R)\sqrt{mg/k})} \end{aligned} \quad (5)$$

2 磁悬浮系统 hopf 分岔条件

分岔是结构不稳定的非线性系统受到任意小扰动时,系统拓扑结构发生根本变化的一种特殊现象.静态分岔是指摄动参数导致平衡点数目变化的情况,而动态分岔是指摄动参数导致系统拓扑结构(流形)发生结构变化的现象.对于磁悬浮系统而言,可以证明,只要存在控制,那么系统就只能出现动态 hopf 分岔.下面分析磁悬浮系统出现 Hopf 分岔的条件.

由(4)可以得到系统的线性化矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{gk/m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_i & K_p & -K_d & RR \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{k_{c1}k_i}{2k} \\ K_d &= k_{c1}k_d \sqrt{g/mk} \\ K_p &= \frac{k_{c1}(k_p - (R/k_{c1} + k_{c2})\sqrt{mg/k})}{2k} \\ RR &= -\frac{(R + k_{c1}k_{c2})z_0}{2k} \end{aligned}$$

矩阵 A 的特征多项式为

$$\lambda^4 + RR\lambda^3 + K_d\lambda^2 + 2K_p\sqrt{gk/m}\lambda + 2K_i\sqrt{gk/m} = 0 \quad (7)$$

根据(7)可知,若 K_p, K_d, K_i, RR 均不为 0,那么以下条件满足时,系统存在一个 hopf 分岔点

$$K_d = \frac{RR \cdot K_i}{K_p} + \frac{2K_p\sqrt{gk/m}}{RR} \quad (8)$$

Hopf 分岔处的特征值分别为 $\pm \omega_i, \lambda_1$ 和 λ_2

$$\omega^2 = \frac{2K_p\sqrt{gk/m}}{RR} \quad (9)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-RR \pm \sqrt{RR^2 - 4RR \cdot K_i/K_p}}{2} \quad (10)$$

根据式(5)和(8)可以看出,当控制参数 K_d 位于其稳定下限时,系统出现 hopf 分岔,这说明即使控制参数能够保证系统全局渐近稳定,系统仍有可能发生振动.虽然理论上说可以避免分岔现象的出现,但是实际上由于系统能力有限, K_d 的调节范围有一定限制,因此常会出现分岔现象.

3 Hopf 分岔点的稳定性分析

分岔点附近的系统流形是非常复杂的.为此,首先利用线性变换 $U = TX$ 将系统降维^[6]

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} \omega_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \\ g_3(u) \\ g_4(u) \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 $g_i(u)$ 表示变换后微分方程的非线性项,且

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_i & -\omega_i & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \frac{\omega^2\sqrt{m}}{2\sqrt{gk}} & \frac{\omega^2\sqrt{m}}{2\sqrt{gk}} & \frac{-\lambda_1^2\sqrt{m}}{2\sqrt{gk}} & \frac{-\lambda_2^2\sqrt{m}}{2\sqrt{gk}} \\ \frac{\omega_i^3\sqrt{m}}{2\sqrt{gk}} & \frac{-\omega_i^3\sqrt{m}}{2\sqrt{gk}} & \frac{\lambda_1^3\sqrt{m}}{2\sqrt{gk}} & \frac{\lambda_2^3\sqrt{m}}{2\sqrt{gk}} \end{bmatrix} \quad (12)$$

此时系统的模态已经解耦,系统的高阶非线性模态主要有 u_1 和 u_2 决定.假设

$$\begin{aligned} u_3 &= m_1 u_1^2 + n_1 u_1 u_2 + j_1 u_2^2 + O(u_1, u_2) \\ u_4 &= m_2 u_1^2 + n_2 u_1 u_2 + j_2 u_2^2 + O(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (13)$$

根据中心流形定理可知,式(13)中的未知参数满足以下条件

$$\begin{bmatrix} 2m_1 u_1 + n_1 u_2 & n_1 u_1 + 2j_1 u_2 \\ 2m_2 u_1 + n_2 u_2 & n_2 u_1 + 2j_2 u_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_i * u_1 + g_1(u_1, u_2) \\ -\omega_i * u_2 + g_2(u_1, u_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1(m_1 u_1^2 + n_1 u_1 u_2 + j_1 u_2^2) + g_3(u_1, u_2) \\ \lambda_2(m_2 u_1^2 + n_2 u_1 u_2 + j_2 u_2^2) + g_4(u_1, u_2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

将根据式(14)计算得出的参数 m_i 和 n_i 代入原系统(11),计算降维系统的三阶 PB 规范型^[7]

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\omega u_2 + [c\mu + a(u_1^2 + u_2^2)]u_1 - \\ &\quad [e\mu + b(u_1^2 + u_2^2)]u_2 \\ \dot{u}_2 &= -\omega u_1 + [e\mu + b(u_1^2 + u_2^2)]u_1 - \\ &\quad [c\mu + a(u_1^2 + u_2^2)]u_2 \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $c = \dot{a}(0)$ 表示分岔点附近实际特征值实部的导数,同时

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{16}[g_{1,xxx} + g_{1,xyy} + g_{2,xyx} + \\ &\quad g_{2,yyx}]_{(0,0,0)} + \frac{1}{16\omega}[g_{1,xy}(g_{1,xx} + g_{1,yy}) - \\ &\quad g_{2,xy}(g_{2,xx} + g_{2,yy}) - g_{1,xx}g_{2,xx} + \\ &\quad g_{1,yy}g_{2,yy}]_{(0,0,0)} \end{aligned} \quad (16)$$

根据 c 和 a 的符号就可以判断在 hopf 分岔点处对应的极限环特性. 大量的数值计算表明, 无论控制参数 k_p, k_d 和 k_i 如何取值, 始终有 $c < 0, a > 0$. 这就说明, 当 $|\mu|$ 充分小时, 如果 $\mu > 0$ (与 a/c 异号), 那么在平衡点附近存在惟一的极限环, 且当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 极限环趋于平衡点; 当 μ 足够小时, 极限环振幅 $A \approx \sigma \sqrt{|\mu|}$, 其中 σ 为比例常数, 极限环频率为 $f \approx \omega/2\pi$. 表 1 给出了以下系统参数条件下, 控制参数对应的振动频率: $k = 0.007; R = 1.5; m = 500; z_0 = 0.01; k_{c1} = 10; k_{c2} = 1.5$.

表 1 控制参数与振动频率关系列表

Table 1 The connection between the control parameters and vibration frequency

k_p	k_i	k_d	f
10	300	1953.8	7.0356
110	600	1875.7	6.8935
210	900	1797.6	6.7483
310	1200	1719.5	6.6
410	1500	1641.4	6.4482
510	1800	1563.3	6.2928
610	2100	1485.2	6.1335
710	2400	1407.1	5.9699
810	2700	1329.1	5.8017
910	3000	1251	5.6285

从表 1 中可以看出, 极限环的频率基本上在 5 hz ~ 7 hz 之间, 这一频率很有可能引起与轨道的共振现象, 非常值得注意.

4 仿真分析

图 1 给出了采用表 1 中第一组数据进行仿真时, 磁悬浮系统间隙在零初始位置的动态响应曲线, 图 2 则是对应的相轨迹曲线.

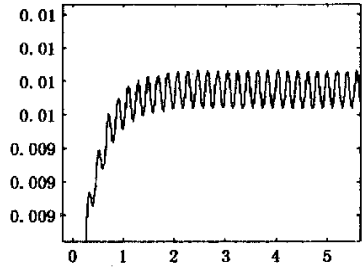


图 1 零初始位置的悬浮间隙动态响应曲线

Fig. 1 The suspension gap dynamic response curve with zero initial position

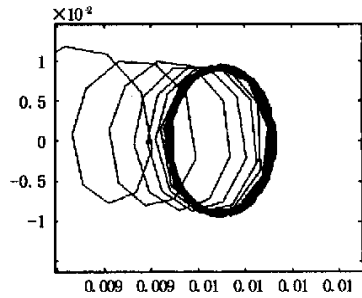


图 2 零初始位置的悬浮间隙相轨迹

Fig. 2 The gap phase trajectory with zero initial position

理论分析和仿真结果均表明, 由于 $a > 0$, 所以该极限环不稳定, 系统流形将很慢的速度发散, 表现为持续振动直至失稳. 这一点与实验情况吻合.

5 总结

本文通过分析基于串级 PID 控制的磁悬浮系统动态 hopf 分岔条件以及稳定性, 说明控制参数与 Hopf 分岔对应极限环频率之间的关系, 说明控制参数在较大范围内都有可能出幅值很小的振动现象. 虽然这一振动并不稳定, 但是很多时候振动的持续时间很长, 因此很有可能诱发与轨道等弹性系统的共振, 因此在控制参数设计时应该避免控制参数满足式(8)给定的 Hopf 分岔条件.

参 考 文 献

1 Cai Y, Chen SS, Rote DM, Coffey HT. Vehicle/Guideway Interaction for High Speed Vehicles on a Flexible Guideway. *Journal of Sound and Vibration*, 1994, 175(5): 625 ~ 646

- 2 Zheng Xiaojing, Wu Jianjun, Zhou Youhe. Numerical Analyses on Dynamic Control of Five Degree of Freedom Maglev vehicle Moving on Flexible Guideways. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 235(1): 43~61
- 3 武建军, 郑晓静, 周又和. 弹性轨道上二自由度磁悬浮列车的动力特性分析. *振动工程学报*, 1999, 12(4): 439~446 (Wu Jianjun, Zheng Xiaojing, Zhou Youhe. Dynamic Characteristic Analysis of Maglev Vehicle with Two Degrees of Freedom on Flexible Guideway. *Journal of Vibration Engineering*, 1999, 12(4): 439~446 (in Chinese))
- 4 柳贵东, 余龙华. Hopf 分岔的劳斯判据及磁悬浮系统的振动分析. *振动、测试与诊断*, 2003, 23(4): 276~278 (Liu Guidong, She Longhua. Louts Criterion for Hopf Bifurcation and Analysis of Vibration of Maglev System. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2003, 23(4): 276~278 (in Chinese))
- 5 施晓红, 余龙华, 常文森. EMS 磁浮列车车/轨耦合系统的分岔现象研究. *力学学报*, 2004, 36(5): 634~640 (Shi Xiaohong, She Longhua, Chang Wensen. The Bifurcation Analysis of the EMS Maglev Vehicle-Coupled-Guideway System. *ACTA Mechanica Sinica*, 2004, 36(5): 634~640 (in Chinese))
- 6 陈予恕. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 2002 (Chen Yushu. *Nonlinear Vibrations*. High Education Press, 2002 (in Chinese))
- 7 曹建福, 韩崇昭, 方洋旺. 非线性系统理论及应用. 西安: 西安交通大学出版社, 2001 (Cao Jianfu, Han Chongzhao, Fang Yangwang. *The Theory and Applications of the Nonlinear systems*. Xi'an Jiaotong University Press, 2001 (in Chinese))

THE PERIODIC MOTION STABILITY ANALYSIS OF THE NONLINEAR MAGLEV CONTROL SYSTEM

Shi Xiaohong She Longhua

(School of electromechanical and automation, National university of defence technology, Changsha 410073, China)

Abstract Based on the research of nonlinear Maglev system's Hopf bifurcation, one factor which leads to the system vibrations, was studied by analyzing the connection between the cascade PID parameters and the periodic motion. The cascade PID control arithmetic was given, the four rank system dynamic model was constructed, the stability range of the control parameters was deduced, and the condition of the Hopf bifurcation was proved. We got the reduced two rank model using the center manifold theorem, and obtained the stability of the Hopf point and the corresponding vibration frequency of the limit circle with PB normal form. The result shows that the Maglev system based on the cascade PID controller has one unstable Hopf bifurcation point, and the system vibrates in 5~7Hz, which will emanate eventually.

Key words maglev, hopf bifurcation, center manifold, PB normal form