

一种检测动力系统振动频率的新方法

刘 彬 张玉存

(燕山大学,秦皇岛 066004)

摘要 为了检测动力系统的振动频率,建立了动力系统的拓扑空间 u 和非平稳正弦函数空间 M .采用拓扑反变理论把空间 u 映射到已知的空间 M 中,通过拓扑反变算子 $f: u \rightarrow M$ 检测未知的空间 u 振动频率.求出这个反变算子后,通过 Poincaré 映射给出该反变算子稳定的存在条件.通过此方法即能够检测出动力系统振动特征频率的瞬变性,同时该方法具有较强的抗干扰能力.实验测试结果表明该方法是可行的.

关键词 动力系统,拓扑反变算子,瞬变性,Poincaré 映射

引言

频率是描述动力系统振动特征的基本要素之一,实际中,系统复杂且影响因素多,导致动力系统的振动频率是瞬变的,用经典建模求解的方法很难完成.近十年来,瞬时频率的研究取得一系列的成果:峰值比较方法,这种方法在信号的信噪比较低时,由噪声产生的虚假峰值高于真实的峰值,这将对瞬时频率造成较大的误差^[1-3];Streit 提出基于 HMM(隐马尔可夫模型)的频率跟踪方法,需要建立 HMM 模型,模型中的状态转移矩阵的阶数直接影响整个计算量,如何确定状态转移矩阵的阶数是关键^[4,5];Nordeng E·Huang 提出了基于 Hilbert-Huang 变换的瞬时频率跟踪方法,这种方法要求信号满足固有模态的条件,为了满足这个条件需要对信号进行模态分解,增加了计算量^[6-9];还有其它基于时频分析的瞬时频率方法,如小波分解,维纳分布等^[10-13].

本文利用拓扑反变的理论,把未知的动力系统空间通过拓扑反变算子映射到已知的非平稳正弦函数空间,通过拓扑反变算子跟踪动力系统振动频率瞬变性.

1 拓扑空间的建立

实际的动力系统为具体 n 个不同频率点 $(\omega_1, \dots, \omega_2)$ 构成的未知空间 u ,每个频率点的函数值能够用无数个非平稳正弦信号的叠加来近似,即

$$u = \{(\omega_1 \dots \omega_2) \mid u_{\omega_i}(t) = \sum_{j \in Z_+} A_j(t) \sin(\omega_i(t)t + \delta_j(t)) + n_i(t) \quad i, j \in Z_+\} \quad (1)$$

式中: ω_i 为频率点, $u(t)$ 为每个频率点的幅值, $A_j(t)$ 为幅值, $n(t)$ 表示噪声,而且所有参数是随时间变化的. $u \in R^n$ 空间,显然 u 是拓扑空间.

设已知空间为从 $A = [A_{\min}, A_{\max}] \times [\omega_{\min}, \omega_{\max}] \times [\delta_{\min}, \delta_{\max}]$ 到 R 中 n 个不同频率所有正弦波函数构成的空间,即为 $MOR(A, R)$

$$MOR(A, R) = \left\{ (y_1 \dots y_n) \mid \begin{cases} y_i = A_i(t) \sin \times \\ (\omega_i(t)t + \delta_i(t)) \\ i \in Z_+ \end{cases} \right\} \quad (2)$$

式中:振幅 A ,角频率 ω 和初相位 $\delta(\phi(t) = \omega t + \delta)$,理想情况这三个参数是固定不变的,但是,实际中它们是变化的.显然 $MOR(A, R)$ 是连续映射构成的空间.如果自然引入拓扑 R, R 为 M 中所有开集构成的集族,它满足拓扑的条件.则 $(MOR(A, R), R)$ 变成拓扑空间.

2 反变算子的推导

要想求未知实际空间 u 振动特征-瞬时频率,通过拓扑反变算子的理论,把空间 u 映射到空间 $MOR(A, R)$,通过反变算子 $f: u \rightarrow MOR(A, R)$ 研究空间 u 的频率.所以关键就是求反变算子 f .本文通过最小距离,得到空间 u 和空间 M 之间的算子关系.

设非平稳正弦波函数为

$$y_i(t, \theta(t)) = A(t)\sin(\omega(t)) + \delta(t) \quad (3)$$

$\theta(t) = [A(t), \omega(t), \delta(t)]^T$ 属于空间

$$\Theta = \left\{ [A, \omega, \delta]^T \left| \begin{array}{l} A \in [A_{\min}, A_{\max}] \\ \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}] \\ \delta \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}] \end{array} \right. \right\} \quad (4)$$

那么 $y_i(t)$ 也是从空间

$$[A_{\min}, A_{\max}] \times [\omega_{\min}, \omega_{\max}] \times [\delta_{\min}, \delta_{\max}] \rightarrow R \quad (5)$$

的映射。

首先证明最小距离的是反变拓扑,然后再求最小距离。

反变拓扑的定义:空间 X 上的拓扑 ξ 是由函数族 $F = \{f: X \rightarrow M\}$ 诱导的拓扑,若每个 M 是拓扑空间且 ξ 是使得一切 $f \in F$ 都连续的最小拓扑,则称 ξ 由函数族 $F = \{f: X \rightarrow M\}$ 诱导的反变拓扑。

证明最小距离能够诱导反变拓扑。

理论依据:

(1) 如果 (X, d) 是一个度量空间,则 d 是拓扑空间积 $X \times X$ 上的一个连续映射。

证明 设 (x_0, y_0) 是 $X \times X$ 的一点研究领域

$$V_\epsilon(x_0, y_0) = \hat{B}_\epsilon(x_0) \times \hat{B}_\epsilon(y_0) \quad (6)$$

若 (x, y) 属于此领域,则

$$|d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq |d(x, y) - d(x, y_0)| +$$

$$|d(x, y_0) - d(x_0, y_0)| \leq |d(x, y_0) - d(x, x_0)| + |d(x, x_0) - d(x_0, x_0)| \leq 2\epsilon \quad (7)$$

所以, d 在 $X \times X$ 内是连续的。

(2) 如果 A 和 B 是两个空间,他们之间的距离函数定义为

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \quad (8)$$

如果 A 和 B 是紧的,则 $A \times B$ 也是紧的,从而由依据 1 可知,此下确界是最小,使得拓扑 ξ 是使得一切 $f \in F$ 都连续的最小拓扑,根据定义可知 ξ 由函数族 $F = \{f: u \rightarrow M\}$ 诱导的反变拓扑。

证明 也就是证明空间 u 和 $MOR(A, R)$ 是紧的。

U 是 n 维欧氏空间的子集,只要证明它是有界的闭空间即可。显然实际的测试信号是有界的。

$MOR(A, R)$ 是空间 $[A_{\min}, A_{\max}] \times [\omega_{\min},$

$\omega_{\max}] \times [\delta_{\min}, \delta_{\max}] \times R$ 到空间的映射空间,如果空间 R 是紧的,那么 M 是紧的。空间 R 虽然不是紧的,但是它是局部紧的。所以空间 M 是紧的。

求最小距离

根据自然度量定义,有

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i - y_i|^2} \quad (9)$$

在实际中,是在实数范围内,所以度量函数为

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |u_i - y_i|^2} \quad (10)$$

最小距离时的参数为

$$\theta_{op} = \arg\rho(x, y) \quad (11)$$

定义

$$d^2(t, \theta(t)) = \rho(x, y)^2 = \sum_{i=0}^n [u_i(t) - y_i(t, \theta_i(t))]^2 \quad (12)$$

定义函数

$$J(\theta(t), t) = d^2(t, \theta(t)) \quad (13)$$

使用梯度下降法,求出参数 θ 。

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\mu \frac{\partial [J(\theta(t), t)]}{\partial \theta(t)} = -\mu \sum_{i=0}^n \frac{\partial [u_i(t) - y_i(t, \theta_i(t))]^2}{\partial \theta_i} \quad (14)$$

为了控制收敛性和稳定性,在式中加入一个对角矩阵 μ 。

当提取的非平稳正弦信号确定后,此时的参数 θ 为

$$\theta(t) = [\hat{A}(t), \hat{\omega}(t), \hat{\delta}(t)]^T \quad (15)$$

式中: $\hat{A}(t)$, $\hat{\omega}(t)$ 和 $\hat{\delta}(t)$ 分别为振幅,角频率和初相位。也就是参数向量 $\theta(t)$ 中有一个元 $\theta_i(t) = \hat{\theta}(t)$,求导数中,只有 $\theta_i(t) = \hat{\theta}(t)$ 时导数不为 0,对其它 $\theta_j(t) \quad j \neq i$ 求导为 0,所以方程进一步简化。

设控制矩阵 μ 为

$$\mu = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

将式(14)进一步简化得

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{A}(t)}{dt} \\ \frac{d\hat{\omega}(t)}{dt} \\ \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial [J(\hat{\theta}(t), t)]}{\partial \hat{A}(t)} \\ \frac{\partial [J(\hat{\theta}(t), t)]}{\partial \hat{\omega}(t)} \\ \frac{\partial [J(\hat{\theta}(t), t)]}{\partial \hat{\delta}(t)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{A}(t)} [u(t) - \hat{A}(t)\sin(\hat{\omega}(t)t + \hat{\delta}(t))]^2 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\omega}(t)} [u(t) - \hat{A}(t)\sin(\hat{\omega}(t)t + \hat{\delta}(t))]^2 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\delta}(t)} [u(t) - \hat{A}(t)\sin(\hat{\omega}(t)t + \hat{\delta}(t))]^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

将上式分开写为

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = 2m_1 e(t) \sin(\hat{\omega}(t)t + \hat{\delta}(t)) \quad (17)$$

$$\frac{d\hat{\omega}(t)}{dt} = 2m_2 e(t) \hat{A}(t) \cos(\hat{\omega}(t)t + \hat{\delta}(t)) \quad (18)$$

$$\frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = 2m_3 e(t) \hat{A}(t) \cos(\hat{\omega}(t)t + \hat{\delta}(t)) \quad (19)$$

式中

$$e(t) = u(t) - \hat{A}(t)\sin(\hat{\omega}(t)t + \hat{\delta}(t)) \quad (20)$$

定义 $\hat{\phi}(t) = \hat{\omega}(t)t + \hat{\delta}(t)$. 那么有

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\phi}(t)}{dt} &= \hat{\omega}(t) + t \frac{d\hat{\omega}(t)}{dt} + \frac{d\hat{\delta}(t)}{dt} = \\ &\hat{\omega}(t) + t \frac{d\hat{\omega}(t)}{dt} + \frac{m_3}{m_2} \frac{d\hat{\omega}(t)}{dt} = \\ &\hat{\omega}(t) + (t + \frac{m_3}{m_2}) \frac{d\hat{\omega}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (21)$$

式中出现时间变量 t , 由于所有参数都是随时间变化的, 在不影响结果的前提下, 将这个时间 t 用常数 m_4 代替. 则原微分方程组变为

$$\begin{cases} \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = 2\mu_1 e(t) \sin(\hat{\phi}(t)) \\ \frac{d\hat{\omega}(t)}{dt} = 2\mu_2 e(t) \hat{A}(t) \cos(\hat{\phi}(t)) \\ \frac{d\hat{\phi}(t)}{dt} = \hat{\omega}(t) + \mu_3 \frac{d\hat{\omega}(t)}{dt} \end{cases} \quad (22)$$

式中

$$e(t) = u(t) - \hat{A}(t)\sin(\hat{\phi}(t)) \quad (23)$$

$$\mu_1 = m_1 \quad (24)$$

$$\mu_2 = m_2 m_4 \quad (25)$$

$$\mu_3 = m_4 + \frac{m_3}{m_2 m_4} \quad (26)$$

式(22) 就是就是我们求出的反变算子. 式中 $\hat{\omega}(t)$ 为正弦函数的角频率, 把角频率转化为频率 f 就是动力系统的振动频率.

3 Poincaré 映射

对于具有周期激励的 n 维非自治动力系统, Γ 是其闭轨, 周期为 T , 可以表示为

$$\dot{x} = f(x, t, u)$$

$$x \in R^n \quad t \in R \quad u \in R^n$$

$$f(x, t + T, u) = f(x, t, u)$$

定义 n 维 Poincaré 截面为

$$\Sigma = \{(x, t) \mid \text{mot}(t, T) = 0\}$$

定义在 Σ 上的 Poincaré 映射为

$$p(x) = x + \varphi_t(x) \mid_{x \in \Sigma}$$

式中, $\varphi_t(x)$ 代表由 x 出发在 t 时刻的相轨线.

4 反变算子实现的条件

首先对系统(22) 进行变换, 再求出系统的 Poincaré 映射. 式(22) 坐标变换为

$$\begin{cases} \frac{d\rho(t)}{dt} = -2\mu_1 \rho(t) \sin^2 \phi(t) + \\ \quad 2\mu_1 A_0 \sin(\omega_0 t + \delta_0) \sin \phi(t) + \\ \quad 2\epsilon \mu_1 \sin \phi(t) u_1(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} = -2\mu_2 \rho^2(t) \sin(2\phi(t)) + \\ \quad 2\mu_2 A_0 \sin(\omega_0 t + \delta_0) \rho(t) \cos \phi(t) + \\ \quad 2\epsilon \mu_2 \rho(t) u_1(t) \\ \frac{d\phi(t)}{dt} = \theta(t) + \mu_3 \frac{d\theta(t)}{dt} \end{cases} \quad (27)$$

设集合

$$S_\epsilon = \left\{ (\rho(t), \theta(t), \phi(t)) \mid \begin{cases} |\rho(t) - A_0| < \epsilon \\ |\theta(t) - \omega_0| < \epsilon \\ |\phi(t) - \delta_0| < \epsilon \end{cases} \right\} \quad (28)$$

假设初始值为 $(\rho_1, \theta_1, \delta_0) \in S_\epsilon$, 经过时间 t^* 后, 轨线再次到达 Poincaré 截面, 此时的点为 $(\rho_2, \theta_2, \delta_0 + 2\pi) \in S_\epsilon$, 则 Poincaré 映射为

$$\begin{bmatrix} \rho_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\pi\mu_1 & 0 \\ 0 & A_1\mu_2 \end{bmatrix} F(\rho_1, \theta_1, \epsilon) \quad (29)$$

式中: $F(\rho_1, \theta_1, \epsilon)$ 为

$$\begin{pmatrix} \frac{A_0 - \rho_1}{\theta_1} + o(\epsilon) \\ H \end{pmatrix}$$

其中

$$H = \rho_1 \frac{\cos\left(\frac{2\pi\omega_0}{\theta_1}\right) - 1}{\theta_1 - \omega_0} + \rho_1 \frac{\cos(2\delta_0) - \cos\left(2\delta_0 + 2\pi\frac{\omega_0}{\theta_1}\right)}{\omega_0 + \theta_1} + o(\epsilon) \quad (30)$$

则不动点处 Jacobi 矩阵为

$$D_\lambda P(0, u) = \frac{\partial P(\rho(t), \theta(t))}{\partial(\rho(t), \theta(t))} \Big|_{(A_0, \omega_0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\pi\mu_1 & 0 \\ 0 & A_0\mu_2 \end{pmatrix} \times \frac{\partial F(\rho(t), \theta(t))}{\partial(\rho(t), \theta(t))} \Big|_{(A_0, \omega_0)} \quad (31)$$

根据 Poincaré 映射原理,若 $D_\rho P(x, u)$ 的特征值 λ_r 的模小于 1, 即特征根全部位于单位圆内, 则系统是渐近稳定的, 可以得到系统稳定的条件. 即

$$\begin{cases} \left| 1 - \frac{2\pi\mu_1}{\omega_0} \right| < 1 \\ \left| 1 - \frac{\pi^2 A_0^2 \mu_2}{\omega_0^2} \left(2 + \frac{\sin 2\delta_0}{\pi} \right) \right| < 1 \end{cases} \quad (32)$$

解得

$$\begin{cases} 0 < \mu_1 < 2f_0 \\ 0 < \mu_2 < \frac{2\pi}{2\pi - 1} \left(\frac{2f_0}{A_0} \right)^2 \end{cases} \quad (33)$$

式中

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

5 测试结果

对某电动机(最大转速 3000 r/min, 转子加偏心质量)升速阶段测试, 输入转速 500 r/min, 采样率 50 kHz, 数据长度 1000x1024 点(包含整个升速阶段), 结果如图 1 和图 2, 算法中的参数为 $u_1 = 100$, $u_2 = 1000$, $u_3 = 0.08$, 频率初始值为 180 Hz.

图 1 是测试到的电机在升速阶段的振动信号, 从图中可以看到, 信号是非平稳的, 且频率是变化的.

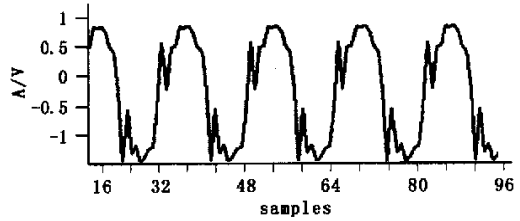


图 1 系统振动信号

Fig.1 The vibration signal of the system

图 2 是采用本文的算法进行检测的结果, 从图中可知, 电机的振动频率在 180 Hz 上下波动. 由结果可知, 本文提出的方法能够检测出未知动力系统振动的瞬时频率.

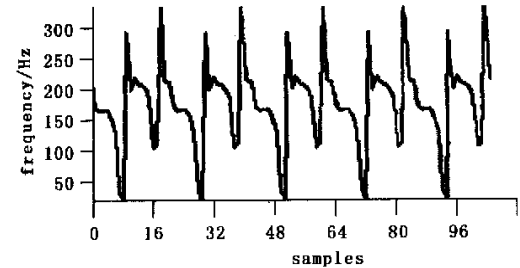


图 2 系统的振动频率

Fig.2 The vibration frequency of the system

6 结论

为了检测动力系统振动特征频率的瞬变性, 建立了拓扑空间, 提出了一种拓扑反变算子的瞬时频率检测方法, 给出了算法的实现的条件, 通过实际测试, 验证了该方法可行.

参 考 文 献

- 1 邹岩崑, 马孝江, 朱泓. 论局域波法中瞬时频率分析. 大连理工大学学报, 2003, 43(6): 775~778(Zou Yanbi, Ma Xiaojiang, Zhu Hong. The analysis on the Instantaneous Frequency in Local Wave. *DaLianLiGongDaXueXueBao*, 2003, 43(6): 775~778(in Chinese))
- 2 梁玉前, 秦树人, 郭瑜. 旋转机械升降速信号的瞬时频率估计. 机械工程学报, 2003, 39(9): 75~80(Liang Yuqian, Qin Shuren, Guo Yu. Instantaneous Frequency Estimation of Run-up or Run-down Signal of Rotating Machinery. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2003, 39(9): 75~80(in Chinese))
- 3 冯松立, 陈高平. 瞬时频率估计的相位建模法及 Matlab

- 的实现. 中国测试技术, 2003, 29(3): 38~38, 41 (Feng Songping, Chen Gaoping. The Phasic Model of Instantaneous Frequency and the Realization using Matlab. *China Measurement Technology*, 2003, 29(3): 38~38, 41 (in Chinese))
- 4 Jerzy Dydak. Covariant and contravariant points of view in topology with applications to function spaces. *Topology and its Applications*, 1999, (94): 87~125
- 5 Arens A, Dugundji J. Topologies for function spaces. *Pacific J Math*, 1951, (1): 5~31
- 6 Fox RH. On topologies for function spaces. *Bull Amer*, 1945: 429~432
- 7 Vold H, Leuridan J. High resolution order tracking at extreme slewwates using Kalman filters. *SAE Paper*, 1993: 219~226
- 8 Vold H, Mains M, Blough J. Theoretical foundations for highperformance order tracking with the vold-Kalman tracking filter. *SAE Paper*, 1997, :1083~1088
- 9 Bai MR, Jeng J, Chen C. Adaptive order tracking technique using recursive least - square algorithm. *Trans ASME J Vib Acoust*, 2002, (124): 502~511
- 10 张海勇. 一种新的非平稳信号分析方法——局域波分析. 电子与信息学报, 2003, 25(10): 1327~1333 (Zhang Haiyong. A New Method For Analyzing Nonstationary Signal-Local Wave Anaysis. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2003, 25(10): 1327~1333 (in Chinese))
- 11 郭瑜, 秦树人, 等. 基于瞬时频率估计的旋转机械阶比跟踪. 机械工程学报, 2003, 39(3): 32~36 (Guo Yu, Qin Shuren, Baoping, Ji Yuebo. Order Tracking of Rotating Machinery Based on Instantaneous Frequency Estimating. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2003, 39(3): 32~36 (in Chinese))
- 12 钟佑明, 秦树人, 等. Hibert-Huang 变换中的理论研究. 振动与冲击, 2002, 21(4): 13~17 (Zhong Zuoming, Qin ShuRen. The Study for Hibert-Huang Transform. *Journal of Vibration and Shock*, 2002, 21(4): 13~17 (in Chinese))
- 13 林敏, 陈希武. 基于正交小波包的瞬时频率检测. 计量学报, 2000, 21(3): 227~231 (Lin Min, Chen Xiwu. Detection of Instantaneous Frequency Based on Orthogonal Wavelet Packet. *Acta Meterologica Sinica*, 2000, 21(3): 227~231 (in Chinese))

A NEW APPROACH TO DETECT THE CHARACTERISTIC FREQUENCY OF DYNAMICAL SYSTEMS

Liu Bin Zhang Yucun

(Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract To detect the vibration frequency of dynamical systems, the corresponding topology space u and space M were founded. The topology contravariant functor was used to map the unknown space u to the known space M , and the vibration frequency of the unknown space was investigated by the contravariant functor ($f: u \rightarrow M$). After solving the contravariant functor, we studied its stability using the Poincaré map. By this approach the vibration frequency of dynamical systems could be detected, and the approach has strong constraint to noise immunity. The experiments showed the feasibility of the approach.

Key words dynamical systems, topology contravariant functor, instantaneous characteristic, Poincare map