T-S模糊时滞系统的时滞相关鲁棒稳定新判据*

陈志盛 张泰山 孙克辉
(中南大学信息科学与工程学院,长沙 410083)

摘要 研究了基于Takagi-Sugeno(T-S)模糊模型描述的非线性时滞系统的稳定性和H_∞扰动抑制问题.利用线性矩阵不等式(LMI)技术,导出了一种满足优化H_∞性能的时滞相关稳定新判据.该判据不仅适用于系统时滞变化率大于1的情形,且与现有方法相比具有更小的保守性.数值仿真结果证明了所提方法的有效性.

关键词 非线性时滞系统,T-S模糊模型,时滞相关稳定性,线性矩阵不等式

引言

近年来,利用T-S模糊模型对非线性时滞系统进行建模和描述,进而实现系统的稳定性分析与控制,已成为非线性控制领域中的一个重要研究方向[1~4].时滞系统的稳定性问题可以分为两类,即时滞无关稳定性和时滞相关稳定性.一般认为,时滞相关稳定性分析方法与时滞无关稳定性分析方法相比具有较小的保守性,特别是当系统时滞的值较小时[5].对于内在本质是非线性的T-S模糊时滞系统,由于分析困难,很少有文献给出时滞相关稳定性研究结果.最近,Li等[6]针对一类具有时变时滞的T-S模糊系统,首次提出了一种基于LMI的时滞相关稳定性判据.但是,文献[6]没有考虑在外界扰动作用下系统的稳定性问题,而且其结果仅适用于系统时滞变化率小于1的情形,故存在一定的局限性.

本文针对一类具有时变时滞的非线性系统,首先建立其T-S模糊模型.然后通过恰当地构造Lyapunov函数和引入等式变换,提出了一种新型的时滞相关鲁棒稳定性判据,与现有文献结果相比更具一般性,且保守性更小.最后通过一个数值仿真实例验证了本文方法的可行性和有效性.

1 系统描述

考虑一类由T-S模糊模型描述的连续时间非线性时滞系统,其中第i个模糊动态子系统可用If-then语句表示为:

Rule i: If $\mu_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $\mu_g(t)$ is M_{ig} then

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t-d(t)) + B_i w(t) \\ z(t) = C_i x(t) + D_i w(t) \\ x(t) = \phi(t), t \in [-\tau, 0], i = 1,2,\cdots,r \end{cases} \tag{1}$$

其中:t为模糊规则数,$M_{ij}(j=1,\cdots,g)$为模糊语言值集合,$\mu_1(t),\cdots,\mu_g(t)$为模糊规则的前件变量;$x(t)\in R^n$为系统的状态向量,$w(t)\in R^{m_1}$为干扰输入向量且$w(t)\in L_2[0,\infty)$,$z(t)\in R^p$为受控输出向量;A_i,A_{di},B_i,C_i,D_i是具有适当维数的常数矩阵;系统状态时滞$d(t)$是满足如下条件的时变连续函数

$$0 < d(t) \leqslant \tau, \dot{d}(t) \leqslant v \tag{2}$$

这里τ和v为已知常数;$\phi(t), t\in[-\tau,0]$为给定的系统初始状态.

采用单点模糊化、乘积推理机及中心模糊去除法,可获得系统(1)的全局模糊模型表达式:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\mu(t))[A_i x(t) + \\ \qquad A_{di} x(t-d(t)) + B_i w(t)] \\ z(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(\mu(t))[C_i x(t) + D_i w(t)] \\ x(t) = \phi(t), t\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{3}$$

式中:

$$\mu(t) = [\mu_1(t),\cdots,\mu_g(t)],$$

2005-06-06收到第1稿,2005-06-20收到修改稿.
*湖南省自然科学基金资助项目(04JJ3077)

$$\omega_i(\mu(t))=\prod_{j=1}^{g}M_{ij}(\mu_j(t)),$$

$$h_i(\mu(t))=\omega_i(\mu(t))/\sum_{i=1}^{r}\omega_i(\mu(t)) \tag{4}$$

这里 $M_{ij}(\mu_j(t))$ 表示 $\mu_j(t)$ 对应于 M_{ij} 的隶属度，$\omega_i(\mu(t))$ 为第 i 条模糊规则的权重. 显然 $\omega_i(\mu(t))\geqslant 0,\sum_{i=1}^{r}\omega_i(\mu(t))>0,\forall t$,因此第 i 个模糊动态子系统的规范化隶属度函数 $h_i(\mu(t))$ 满足：$h_i(\mu-t))\geqslant 0,\sum_{i=1}^{r}h_i(\mu(t))=1,\forall t$.

2 主要结果

引理 1[7] 对于具有适当维数的矩阵 X,Y 和正定矩阵 R，总有 $X^TY+Y^TX\leqslant X^TRX+Y^TR^{-1}Y$.

引理 2[8] 给定标量 $\lambda>0$ 和正定对称矩阵 M,则对于向量函数 $\omega:[t,t+\lambda]\to R^n$,有

$$\left(\int_t^{t+\lambda}\omega(s)\mathrm{d}s\right)^TM\left(\int_t^{t+\lambda}\omega(s)\mathrm{d}s\right)\leqslant \lambda\int_t^{t+\lambda}\omega^T(s)M\omega(s)\mathrm{d}s$$

首先考虑在扰动输入 $w(t)=0$ 时系统(1)的时滞相关稳定性充分条件：

定理 1 设系统扰动输入 $w(t)=0$,给定正标量 τ 和 v,如果存在具有适当维数的权矩阵 H_1,H_2,H_3,N_1,N_2,N_3 和权矩阵 $P=P^T>0,Q=Q^T>0,Z=Z^T>0$,对于 $i=1,2,\cdots,r$,有如下 LMI 成立：

$$\begin{bmatrix} H_1A_i+A_i^TH_1^T+N_1+N_1^T+Q & H_1A_{di}+A_i^TH_2^T-N_1+N_2^T & P-H_1+A_i^TH_3^T+N_3^T & N_1\\ * & H_2A_{di}+A_{di}^TH_2^T-N_2-N_2^T-(1-v)Q & -H_2+A_{di}^TH_3^T-N_3^T & N_2\\ * & * & -H_3-H_3^T+\tau^2Z & N_3\\ * & * & * & -Z\end{bmatrix}<0 \tag{5}$$

式中：* 表示矩阵对称位置元素的转置,则时滞满足条件式(2)的 T-S 模糊系统(1)是渐近稳定的.

证明 由系统(1)的状态方程可知,对于具有合适维数的待定权矩阵 H_1,H_2 和 H_3,有

$$E(x)=2[x^T(t)H_1+x^T(t-d(t))H_2+\dot{x}^T(t)H_3]\left\{\sum_{i=1}^{r}h_i(\mu(t))[A_ix(t)+A_{di}x(t-d(t))]-\dot{x}(t)\right\}=0 \tag{6}$$

另一方面，根据等式 $x(t)-x(t-d(t))=\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s$,则对于具有合适维数的待定权矩阵 N_1,N_2 和 N_3,有

$$\Gamma(x)=2[x^T(t)N_1+x^T(t-d(t))N_2+\dot{x}^T(t)N_3][x(t)-x^T(t-d))-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s]=0 \tag{7}$$

对系统(1)构造如下形式的 Lyapunov 函数

$$V(t)=x^T(t)Px(t)+\int_{t-d(t)}^{t}x^T(s)Qx(s)\mathrm{d}s+\tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \tag{8}$$

这里 P,Q,Z 是待定的正定对称权矩阵.

计算 $V(t)$ 沿系统(1)的导数,并加入零等式(6)(7),则有

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)&=2x^T(t)P\dot{x}(t)+x^T(t)Qx(t)-(1-\dot{d}(t))x^T(t-d(t))Qx(t-d(t))+\\&\quad\tau^2\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t)-\tau\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s\\&\leqslant 2x^T(t)P\dot{x}(t)+x^T(t)Qx(t)-(1-v)x^T(t-d(t))Qx(t-d(t))+\\&\quad\tau^2\dot{x}^T(t)Z\dot{x}(t)-\tau\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s+E(x)+\Gamma(x)\end{aligned} \tag{9}$$

为便于描述，记 $\eta(t)=[x^T(t),x^T(t-d(t)),\dot{x}^T(t)]^T,\tilde{N}=[N_1^T,N_2^T,N_3^T]^T$. 根据引理1和引理2,有

$$2\eta^T(t)\tilde{N}\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant\eta^T(t)\tilde{N}Z^{-1}\tilde{N}^T\eta(t)+\left(\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right)^TZ\left(\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right) \tag{10}$$

$$\left(\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right)^TZ\left(\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right)\leqslant d(t)\left(\int_{t-d(t)}^{t}\dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s\right)\leqslant\tau\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)\mathrm{d}s \tag{11}$$

综合式(6)～式(11),经整理可得

$$\dot{V}(t)\leqslant\sum_{i=1}^{r}h_i(\mu(t))\eta^T(t)(\Psi^i+$$

$\tilde{N}Z^{-1}\tilde{N}^{\mathrm{T}})\eta(t)$ (12)

式中

$$\Psi_i=\begin{bmatrix} H_1A_i+A_i^{\mathrm{T}}H_1^{\mathrm{T}}+N_1+N_1^{\mathrm{T}}+Q & H_1A_{di}+A_i^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}}-N_1+N_2^{\mathrm{T}} & P-H_1+A_i^{\mathrm{T}}H_3^{\mathrm{T}}+N_3^{\mathrm{T}} \\ * & H_2A_{di}+A_{di}^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}}-N_2-N_2^{\mathrm{T}}-(1-v)Q & -H_2+A_{di}^{\mathrm{T}}H_3^{\mathrm{T}}-N_3^{\mathrm{T}} \\ * & * & -H_3-H_3^{\mathrm{T}}+\tau^2Z \end{bmatrix}$$

显然,若 LMI(5) 成立,则由 Schur 补引理可导出 $\dot V(t)<0$,模糊时滞系统(1)在Lyapunov意义下是全局渐近稳定的.证毕.

注1　通过在 $\dot V(t)$ 中保留 $\dot x(t)$ 项,并引入零等式(6) 和式(7),可以很好地分离系统矩阵 A_i,A_{di} 与 Lyapunov 矩阵 P,从而有效地解决了系统(1) 基于 LMI 的时滞相关稳定性分析问题.另外,当系统时滞变化率 $v>1$ 时,通过合理选择权矩阵 Q,N_2 和 H_2,LMI(5) 中的 (3,3) 项 $H_2A_{di}+A_{di}^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}}-N_2-N_2^{\mathrm{T}}-(1-v)Q$ 仍可保证是负定的,即可保证 LMI(5) 有解,这就克服了文献[6] 结果的局限性.在 Matlab 的 LMI 工具箱环境下,LMI(5) 中的矩阵变量 $H_1,H_2,H_3,N_1,N_2,N_3,P,Q,Z$ 可一次性求出,求解非常方便.

注2　在定理1中,若设定 $v<1,H_1=P,H_2=H_3=0,N_1=N_2=N_3=0,Q=(1-v)^{-1}S$,$Z=\varepsilon I$,这里 ε 为足够小的正数,则LMI(5) 正好与 Cao 等[1] 提出的时滞无关稳定性判据(文献[1] 中的定理1) 等价,故本文的定理1蕴含了Cao等的主要结果.

进一步考虑扰动输入 $w(t)\neq 0$ 时系统(1) 的鲁棒稳定性.引入 H_∞ 扰动抑制性能指标函数[9]

$$\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|w(t)\|_2 \tag{13}$$

利用引理1可以推导出

$$\begin{aligned} z^{\mathrm{T}}(t)z(t)=&(\sum_{i=1}^{r}h_i(\mu(t))[C_ix(t)+D_iw(t)])^{\mathrm{T}}\times\\ &(\sum_{j=1}^{r}h_j(\mu(t))[C_jx(t)+D_jw(t)])\leqslant\\ &\sum_{j=1}^{r}h_j(\mu(t))[x^{\mathrm{T}}(t)C_i^{\mathrm{T}}C_ix(t)+\\ &2x^{\mathrm{T}}(t)C_i^{\mathrm{T}}D_iw(t)+w^{\mathrm{T}}(t)D_i^{\mathrm{T}}w(t)] \end{aligned} \tag{14}$$

于是我们可获得以下结果:

定理2　给定正标量 τ 和 v,如果存在具有适当维数的权矩阵 H_1,H_2,H_3,N_1,N_2,N_3 和权矩阵 $P=P^{\mathrm{T}}>0,Q=Q^{\mathrm{T}}>0,Z=Z^{\mathrm{T}}>0$,使得如下满足 LMI(15) 约束的优化问题有解

$$\min\sigma$$

$$\text{s.t.}:\sigma>0$$

$$\begin{bmatrix} \Phi & H_1A_{di}+A_i^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}}-N_1+N_2^{\mathrm{T}} & P-H_1+A_i^{\mathrm{T}}H_3^{\mathrm{T}}+N_3^{\mathrm{T}} & H_1B_i+C_i^{\mathrm{T}}D_i & N_1 \\ * & H_2A_{di}+A_{di}^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}}-N_2-N_2^{\mathrm{T}}-(1-v)Q & -H_2+A_{di}^{\mathrm{T}}H_3^{\mathrm{T}}-N_3^{\mathrm{T}} & H_2B_i & N_2 \\ * & * & -H_3-H_3^{\mathrm{T}}+\tau^2Z & H_3B_i & N_3 \\ * & * & * & D_i^{\mathrm{T}}D_i-\sigma I & 0 \\ * & * & * & * & -Z \end{bmatrix}<0,i=1,\cdots,r \tag{15}$$

式中:$\Phi=H_1A_i+A_i^{\mathrm{T}}H_1^{\mathrm{T}}+N_1+N_1^{\mathrm{T}}+Q+C_i^{\mathrm{T}}C_i$,$*$ 表示矩阵对称位置元素的转置,则时滞满足条件式(2) 的T-S模糊系统(1) 是内部渐近稳定的,且 H_∞ 扰动抑制优化性能指标上界为$\sqrt{\sigma}$.

利用定理1的证明过程和文献[9] 即可完成定理2的证明,此略.

3　数值仿真

为便于比较,考虑如下具有时变时滞的非线性系统

$$\begin{cases} \dot x_1(t)=-2x_1(t)-x_1(t-d(t))\\ \dot x_2(t)=x_1(t)x_2(t)-0.9x_2(t)-\\ \qquad 0.8x_1(t-d(t))-x_2(t-d(t)) \end{cases} \tag{16}$$

设 $x_2(t)$ 可测,且 $x_2(t)\in[-1.1]$.利用边界条件局部线性化,可将上述非线性系统用 T-S 模糊模型表示为

R_1: If $x_2(t)$ is $M_1(x_2(t))$ then

$$\dot x(t)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & -0.9\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -0.8 & -1\end{bmatrix}x(t-d(t))$$

R_2 : If $x_2(t)$ is $M_2(x_2(t))$ then

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -0.8 & -1 \end{bmatrix} x(t - d(t))$$

式中，$x(t) = [x_1^T(t), x_2^T(t)]^T$，$M_1(x_2(t)) = (1 + x_2(t))/2$，$M_2(x_2(t)) = 1 - M_1(x_2(t))$. 对于上述T-S模糊时滞系统，不管 $d(t)$ 和 $\dot{d}(t)$ 如何取值，采用时滞无关稳定性分析方法[1,4] 均无法判断其稳定性. 而采用时滞相关稳定性分析方法，即文献[6]的定理1和本文的定理1，当时滞变化率上界 v 取不同的值时，利用Matlab计算得出系统(16)保持渐近稳定的最大允许时滞上界 τ 值如表1所示. 通过仿真结果可以看出，本文定理1不仅适用于时滞变化率上界 $v > 1$ 的情形，而且在 $v < 1$ 时所获得的结果也比现有方法具有更小的保守性.

表1 保证系统稳定的时滞上界 τ

Table 1 Maximal admissible time delay τ for stability

v	0	0.5	1.2
Li([6])	4.353	1.741	—
Theorem 1	4.472	2.007	0.996

4 结论

作者为研究T-S模糊时滞系统与稳定性相关的问题提供了一个新方法. 与现有的时滞相关稳定性判据相比，文中定理不仅适用对象更广泛，而且所获得的结果具有更小的保守性. 如何将有关结果推广到系统存在建模不确定性的情形，并进行相应的鲁棒控制器设计是下一步需要开展的研究工作.

参 考 文 献

1 Cao YY, Frank PM. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 124(2): 213～229

2 Zhang Y, Heng PA. Stability of fuzzy control systems with bounded uncertain delays. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, 10(1): 92～96

3 Wang RJ, Lin WW, Wang RJ. Stabilizability of Linear Quadratic State Feedback for Uncertain Fuzzy Time-Delay Systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2004, 34(2): 1288～1292

4 Chen B, Liu XP. Fuzzy guaranteed cost control for nonlinear systems with time-varying delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, 13(2): 238～249

5 Wu M, He Y, She JH, et al. New delay-dependent stability criteria and stabilizing method for neutral systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(12): 2266～2271

6 Li CG, Wang HJ, Liao XF. Delay-dependent robust stability of uncertain fuzzy systems with time-varying delays. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2004, 151(4): 417～421

7 Xie L, Souza C. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1188～1191

8 Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems . 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney, Australia, 2000: 2805～2810

9 黄琳. 稳定性与鲁棒性的理论基础. 北京：科学出版社，2003(Huang L. Theoretic Foundation of Stability and Robustness. Beijing: Science Press, 2003(in Chinese))

A NEW CRITERIA ON ROBUST DELAY-DEPENDENT STABILITY FOR T-S FUZZY SYSTEMS WITH TIME-DELAY*

Chen Zhisheng　Zhang Taishan　Sun Kehui

(*School of Information Science & Engineering, Central South University, Changsha 410083, China*)

Abstract The stability and disturbance attenuation for nonlinear time-delay systems represented by Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models were studied. A new criteria on delay-dependent stability with optimal performance for the nonlinear delay systems was presented in terms of linear matrix inequality (LMI). The criteria is less conservative than some previous results and can still be used even if the time-derivative of the time-delay is larger than 1. The practical applicability of the proposed method was illustrated by a numerical example.

Key words nonlinear time-delay system, T-S fuzzy model, delay-dependent stability, linear matrix inequality

Received 06 June 2005, revised 20 June 2005.

* Project supported by Science Foundation of Hunan Province, China(04JJ3077)