

# 谐和激励与随机噪声作用下具有势的 Duffing 振子的混沌运动\*

孙中奎 徐伟 杨晓丽

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

**摘要** 本文研究了具有同宿轨道、异宿轨道  $\phi^6$  势的 Duffing 振子在谐和激励与高斯白噪声激励联合作用下的混沌运动. 基于同宿分叉和异宿分叉, 由 Melnikov 理论推导了系统存在混沌的必要条件以及出现分形域边界的充分条件. 结果表明: 噪声的存在, 降低了混沌运动的阈值, 增大了参数空间的混沌域. 进一步的研究发现, 随着噪声幅值的增大, 导致混沌运动的谐和激励的临界幅值单调减小. 最后, 数值模拟了系统的 Lyapunov 指数, 由最大 Lyapunov 指数为零得到了系统产生混沌运动的另一个阈值, 并且发现此阈值也随着噪声幅值单调减小. 最后进一步用 Poincare 截面研究了噪声对系统运动的影响.

**关键词** 噪声, 混沌运动,  $\phi^6$  势, 随机 Melnikov 方法, 分形域

## 引言

谐和激励下具有势的非线性系统<sup>[1-4]</sup>已得到广泛的研究, 其势函数为

$$V(x) = \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{4}cx^4$$

其中  $b$  和  $c$  为常数. 随着人们借助于奇怪吸引子、Lyapunov 指数、分形域、Poincare 截面等工具研究系统的混沌运动以来, 目前很有必要对高次非线性系统的混沌运动进行研究. 本文考虑谐和激励与高斯白噪声摄动下具有  $\phi^6$  势的 Duffing 振子, 其运动方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -bx - cx^3 - dx^5 - ay + \gamma \cos \Omega t + \sigma \xi(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $b, c$  和  $d$  为常数,  $a > 0$  是阻尼系数, 为单位强度的高斯白噪声,  $\gamma$  和  $\sigma$  分别为谐和激励和噪声的幅值. 方程(1)有广泛的应用背景, 物理、工程以及生物等领域中的许多问题都可以模型化为该方程. 系统(1)具有  $\phi^6$  势, 即

$$V(x) = \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{4}cx^4 + \frac{1}{6}dx^6$$

根据参数  $b, c$  和  $d$  的不同取值, 该系统可以具有: 单势井、双势井、三势井. 本文仅考虑三势井的情形.

谐和激励或噪声摄动下非线性系统的混沌运动已有不少研究, 特别是系统(1)的一些特例也有

大量的研究<sup>[5-12]</sup>. 当系统(1)仅受谐和激励时, 文献[5~7]对系统的响应、分叉、混沌运动等给出了详细的研究. 然而相对于谐和激励, 噪声作用下系统(1)混沌运动研究并不多. 本文作者<sup>[8]</sup>研究了有界噪声对谐和激励下具有三个稳定的平衡点和两个不稳定的平衡点的弹性梁的混沌运动的影响. 由随机 Melnikov 方法推导了系统可能存在混沌运动的参数域, 结果表明: 当 Wiener 过程的强度参数大于一定值时, 噪声增大了出现混沌的有界噪声的临界幅值, 缩小了参数空间的混沌域, 而且产生混沌运动的有界噪声的临界幅值随着噪声强度的增大而增大. 数值计算最大 Lyapunov 指数的结果也表明在 Wiener 过程的强度参数大于一定值后, 临界幅值也随着噪声强度的增大而增大. 但是对于较小的强度参数, 两种方法得到的结果却不一致. 当系统(1)仅含立方非线性项时, Wei 和 leng<sup>[9]</sup>计算了系统的最大 Lyapunov 指数, 发现噪声在某种程度对系统有一定的稳定作用. Lin 与 Yim<sup>[10]</sup>用随机 Melnikov 方法研究了谐和力与白噪声外激下 Duffing 系统的混沌运动, 发现弱噪声降低了出现混沌的谐和力幅值, 扩大了参数空间中的混沌域; Xie<sup>[11]</sup>用修正的 Melnikov 函数导出了白噪声参激下谐和激励的 Duffing 振子出现混沌的必要条件, 发现弱噪声增大出现混沌的谐和力幅值, 而计算最大 Lyapunov 指数却发现噪声减小了出现混沌的谐

2005-01-20 收到第 1 稿, 2005-03-04 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金项目(10472091)、国家重点自然科学基金项目(10332030)和陕西省自然科学基金资助

和力幅值,两个结论正好相反.因此,噪声对于系统混沌运动的影响有待进一步地研究.

鉴于此本文研究了谐和激励与高斯白噪声扰动下具有同宿轨道、异宿轨道  $\phi^6$  势的 Duffing 振子的混沌运动,对此问题目前尚未见到研究.首先基于系统的同宿分叉和异宿分叉,由 Melnikov 方法推导系统可能出现混沌运动的参数域及系统出现分形域边界的充分条件,进一步用数值计算系统最大 Lyapunov 指数和分形域边界以检验随机 Melnikov 方法预测的结果,并通过 Poincare 截面研究噪声对系统响应的影响.

### 1 随机 Melnikov 过程

在下面的讨论中,参数取值为  $b = 1.0, c = -0.5$  和  $d = 0.038$ . 当时  $a = \gamma = \sigma = 0$ , 与系统(1)相应的未扰系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -bx - cx^3 - dx^5 \end{cases} \quad (2)$$

系统(2)为 Hamilton 系统, Hamilton 函数为

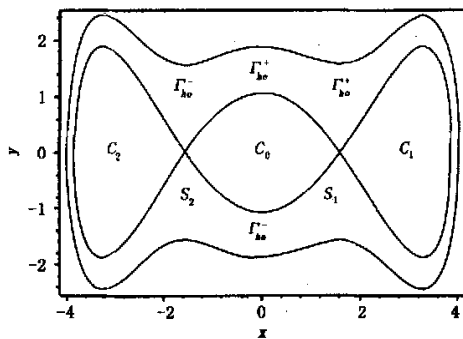
$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{4}cx^4 + \frac{1}{6}dx^6 \quad (3)$$

系统(2)的相轨图和势函数图分别如图 1(a), 1(b)所示. 通过对系统(2)的平衡点的稳定性分析可知: 系统具有 5 个平衡点, 如图 1(a)所示: 其中  $S_i (i = 1, 2)$  为鞍点,  $C_i (i = 0, 1, 2)$  为中心,  $\Gamma_{ho}^+$  为通过鞍点  $S_1$  的同宿轨道,  $\Gamma_{ho}^-$  为通过鞍点  $S_2$  的同宿轨道, 且异宿轨道  $\Gamma_{ho}^+$  和  $\Gamma_{ho}^-$  由鞍点  $S_1, S_2$  相连接.

Melnikov 方法可以给出受到小扰动的可积系统出现横截同宿(异宿)轨道的解析条件, 并作为预测系统出现混沌运动的必要条件. 存在同(异)宿轨道的平面可积的系统, 在受到小扰动时, 同(异)宿轨道发生分裂, Melnikov 函数是度量分裂后的稳定流形和不稳定流形之间距离的函数. 由 Poincare 理论<sup>[4]</sup>, 如果 Melnikov 函数有简单零点, 则系统稳定流形与不稳定流形横截相交, 一旦相交就有无数次相交, 吸引子的相空间发生形变, 不停的伸缩与折叠, 从而产生 Smale 马蹄意义下的混沌.

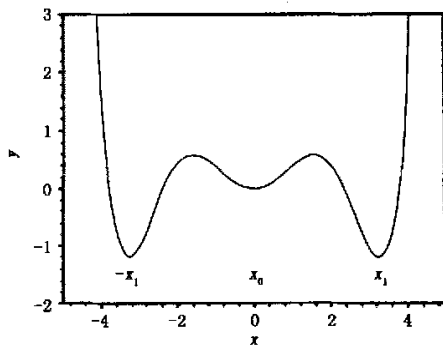
Holmes<sup>[12]</sup> 首次应用 Melnikov 方法研究负线性刚度的谐和激励的 Duffing 振子的混沌运动. Wiggins<sup>[13,14]</sup> 将 Melnikov 方法推广到激励为多种频率的系统中; 随后 Frey 和 Simu<sup>[15]</sup> 提出广义随机 Melnikov 方法. 下面用随机 Melnikov 方法研究系统

(1) 混沌运动.



(a) 相轨图

(a) Phase portrait



(b) 势函数图

(b) Potential

图 1 系统(2)在  $b = 1.0, c = -0.5, d = 0.038$  的相轨图及势函数图

Fig. 1 Phase portrait and potential of system (2) with  $b = 1.0, c = -0.5, d = 0.038$

设  $\alpha, \gamma$  和  $\sigma$  同为  $\epsilon$  阶小量, 即  $\alpha = \epsilon\bar{\alpha}, \gamma = \epsilon\bar{\gamma}, \sigma = \epsilon\bar{\sigma}$ , 且  $(x_0, y_0) = (x_0(t), y_0(t))$  为未扰系统(2)的同(异)宿轨道. 由于白噪声  $\xi(t)$  可以表示成一簇具有随机频率和相位的谐和函数之和的形式<sup>[15]</sup>, 由 Wiggins<sup>[13]</sup> 可得系统(1)的随机 Melnikov 过程为

$$M(t_1, t_2) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{a} y_0^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\gamma} y_0 \cos \Omega(t_1 - t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma} y_0 \xi_{t_2 - t} dt = -I + Z(t_1) + Z_{t_2} \quad (4)$$

上式中的前两个积分为随机 Melnikov 过程的均值部分, 由系统(1)的阻尼和谐和激励产生, 最后一个积分为随机 Melnikov 过程的随机部分, 由系统(1)的随机噪声产生. 将  $h(t) = \bar{\sigma} y_0(t)$  看作轨道滤波器  $F$  的脉冲响应函数,  $Z = \xi * h$  是关于  $h$  的

卷积, 是输入  $\xi$  经过滤波器  $F$  的输出. 易知  $Z_{t_2}$  是一个平稳的随机过程, 均值为零, 方差为

$$\sigma_Z^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_\xi(\omega) d\omega \quad (5)$$

其中  $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma} y_0 e^{-j\omega t} dt$ ,  $S_\xi(\omega)$  是随机噪声  $\xi(t)$  的谱密度.

从系统(2)很难求出  $y_0$  的解析表达式, 我们用数值积分方法求解  $y_0$  (具体的算法见第 2.1 部分). 注意到  $y_0$  是  $t$  的函数, 且  $t \in (-\infty, +\infty)$ , 当  $(x_0, y_0)$  为同宿轨道时, 由图 1(a) 易知, 选积分的初始点  $p_1$  为同宿轨道  $\Gamma_{ho}^+$  与  $x$  轴的交点, 从而  $y_0(t)$  为  $t$  的奇函数, 方程(4) 可简化为

$$M_{hom}(t_1, t_2) = -2\bar{a}A + 2\bar{\gamma}\sin\Omega t_1 I_{hom}(\Omega) + Z_{t_2} \quad (6)$$

其中  $A = \int_0^{+\infty} y_0^2 dt$ ,  $I_{hom}(\Omega) = \int_0^{+\infty} y_0 \sin\Omega t dt$ . 当  $y_0$  给定时,  $A$  为一个积分常数,  $I_{hom}(\Omega)$  为  $\Omega$  的函数. 从而随机 Melnikov 函数在均方意义下出现简单零点的条件是

$$\langle 2\bar{a}A \rangle^2 = \langle 2\bar{\gamma}\sin\Omega t_1 I_{hom}(\Omega) \rangle^2 + \frac{(2\bar{\sigma})^2}{\pi} \times \int_0^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} y_0 \sin\omega t dt \right|^2 d\omega \quad (7)$$

即

$$\langle \bar{a}A \rangle^2 \leq \langle \gamma I_{hom}(\Omega) \rangle^2 + \frac{\sigma^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} y_0 \sin\omega t dt \right|^2 d\omega \quad (8)$$

当  $(x_0, y_0)$  为异宿轨道时, 选积分的初始点  $p_2$  为异宿轨道  $\Gamma_{he}^+$  与  $y$  轴的交点, 从而  $y_0(t)$  为  $t$  的偶函数, 方程(4) 可简化为

$$M_{her}(t_1, t_2) = -2\bar{a}B + 2\bar{\gamma}\cos\Omega t_1 I_{her}(\Omega) + Z_{t_2} \quad (9)$$

其中  $B = \int_0^{+\infty} y_0^2 dt$ ,  $I_{her}(\Omega) = \int_0^{+\infty} y_0 \cos\Omega t dt$ , 当  $y_0$  给定时,  $B$  为一个积分常数,  $I_{her}(\Omega)$  为  $\Omega$  的函数. 从而随机 Melnikov 函数在均方意义下出现简单零点的条件是

$$\langle 2\bar{a}B \rangle^2 = \langle 2\bar{\gamma}\cos\Omega t_1 I_{her}(\Omega) \rangle^2 + \frac{(2\bar{\sigma})^2}{\pi} \times \int_0^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} y_0 \cos\omega t dt \right|^2 d\omega \quad (10)$$

即

$$\langle \bar{a}B \rangle^2 \leq \langle \gamma I_{her}(\Omega) \rangle^2 + \frac{\sigma^2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} y_0 \cos\omega t dt \right|^2 d\omega \quad (11)$$

当系统(1) 仅受谱和激励时, 对于同宿轨道  $\Gamma_{ho}^+$  和异宿轨道  $\Gamma_{he}^+$ , 其 Melnikov 函数可简化为

$$M_{hom}(t_1) = -2\bar{a}A + 2\bar{\gamma}\sin\Omega t_1 I_{hom}(\Omega) \quad (12)$$

$$M_{her}(t_1) = -2\bar{a}B + 2\bar{\gamma}\cos\Omega t_1 I_{her}(\Omega) \quad (13)$$

从而在参数空间  $(\gamma, \Omega, a)$ , 系统基于同宿分叉与异宿分叉, 可能出现混沌的参数域分别为

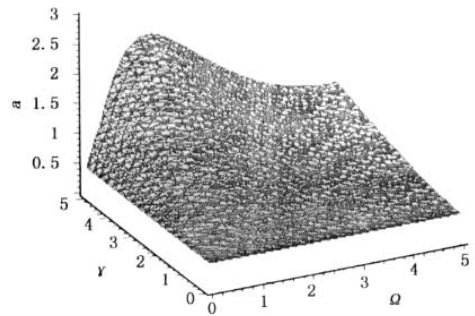
$$|aA| \leq |\gamma I_{hom}(\Omega)| \quad (14)$$

$$|aB| \leq |\gamma I_{her}(\Omega)| \quad (15)$$

## 2 数值计算

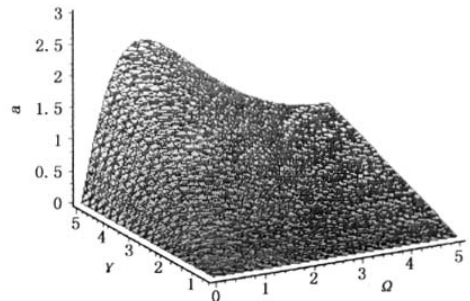
### 2.1 同宿分叉及异宿分叉

对于同宿分叉条件的计算, 首先需要对方程(2) 用四阶 Runge-Kutta 数值求解  $y_0(t)$  (步长取为 0.001), 然后用数值积分方法 (步长取为 0.1) 求积分常数  $A$  和  $I_{hom}$ . 由图 1(a) 知,  $y_0(\infty) = 0$ , 即  $y_0(t)$  以指数速度收敛于鞍点  $S_1$ , 因此只需选择有限的区间  $[0, 10]$  来计算  $y_0(t)$ , 从而  $A$  和  $I_{hom}$  是在有限区间上的有限次的求和. 在参数空间  $(\gamma, \Omega,$



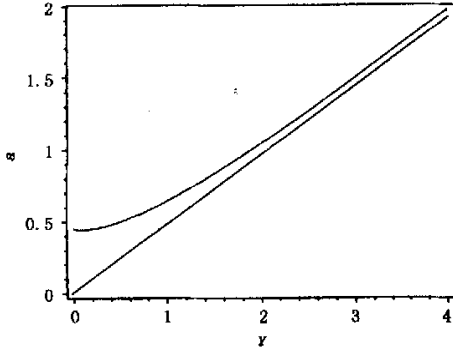
(a) 空间  $(\gamma, \Omega, a)$  同宿分叉曲面  $(\sigma = 1.0)$

(a) Upper surface in  $(\gamma, \Omega, a)$  space with  $\sigma = 1.0$

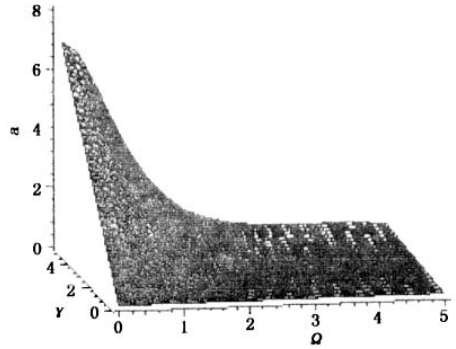


(b) 空间  $(\gamma, \Omega, a)$  同宿分叉曲面  $(\sigma = 0.0)$

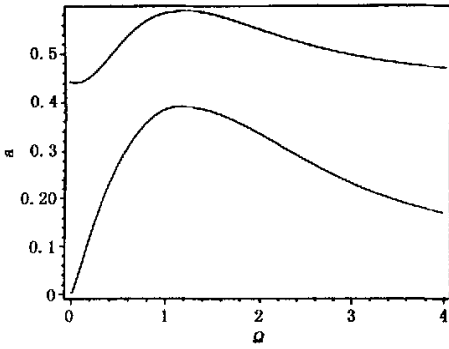
(b) Upper surface in  $(\gamma, \Omega, a)$  space with  $\sigma = 0.0$



(c) 空间 $(\gamma, a)$ 同宿分叉曲线( $\Omega = 1.0$ )  
 (c) Upper bound in  $(\gamma, a)$  plane with  $\Omega = 1.0$



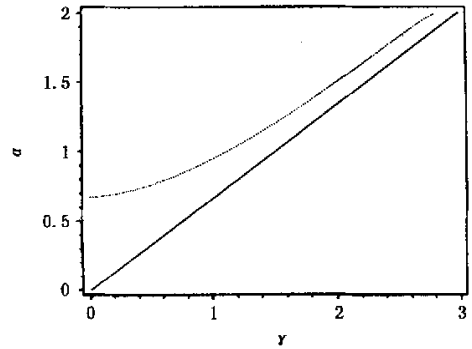
(b) 空间 $(\gamma, \Omega, a)$ 异宿分叉曲面( $\sigma = 0.0$ )  
 (b) Upper surface in  $(\gamma, \Omega, a)$  space with  $\sigma = 0.0$



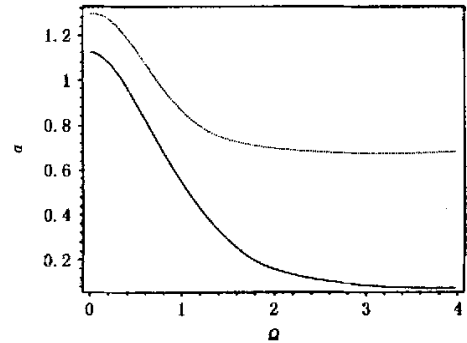
(d) 空间 $(\Omega, a)$ 同宿分叉曲线( $\gamma = 0.8$ )  
 (d) Upper bound in  $(\Omega, a)$  plane with  $\gamma = 0.8$

图2 系统(1)的同宿分叉曲面和曲线  
 $-\sigma = 0.0, --\sigma = 1.0$

Fig.2 Upper bound for possible chaotic domain due to homoclinic bifurcation  $\sigma = 0.0$ (solid line) and  $\sigma = 1.0$ (dashed line)



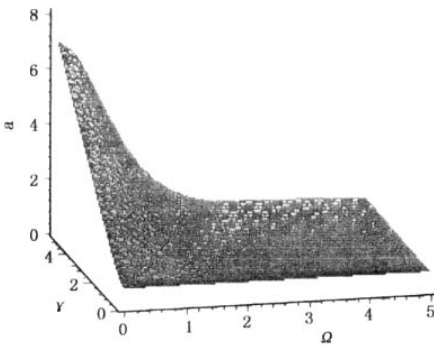
(c) 空间 $(\gamma, a)$ 异宿分叉曲线( $\Omega = 1.0$ )  
 (c) Upper bound in  $(\gamma, a)$  plane with  $\Omega = 1.0$



(d) 空间 $(\Omega, a)$ 异宿分叉曲线( $\gamma = 0.8$ )  
 (d) Upper bound in  $(\Omega, a)$  plane with  $\gamma = 0.8$

图3 系统(1)的异宿分叉曲面和曲线  
 $-\sigma = 0.0, --\sigma = 1.0$

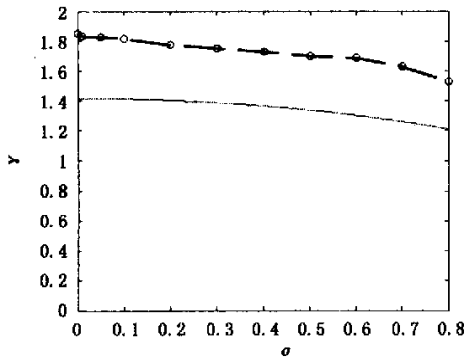
Fig.3 Upper bound for possible chaotic domain due to heteroclinic bifurcation  $\sigma = 0.0$ (solid line) and  $\sigma = 1.0$ (dashed line)



(a) 空间 $(\gamma, \Omega, a)$ 异宿分叉曲面( $\sigma = 1.0$ )  
 (a) Upper surface in  $(\gamma, \Omega, a)$  space with  $\sigma = 1.0$

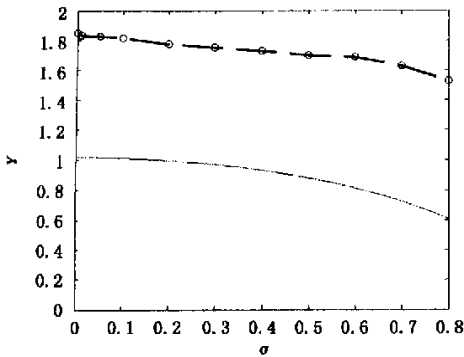
$a$ ) 中,可能出现混沌运动的临界值的上界(式(8)和式(14)中的不等式取为等式)之间的关系分别如图2(a)和图2(b)所示;在平面 $(\gamma, a)$ 和 $(\Omega, a)$ 中,可能出现混沌运动的临界值的上界之间的关系如图2(c)及图2(d)所示。

系统(1) 异宿分叉条件(式(11) 和式(15)) 也可类似地讨论, 可能出现混沌运动的临界值的上界之间的关系见图 3. 由图 2 与图 3 知, 噪声的出现减小了出现混沌的谐和激励的临界幅值, 增大了参数空间混沌域. 另外, 当  $a = 0.678, \Omega = 1.0$  时, 式(8) 和式(11) 也分别描绘了可能出现混沌运动的谐和激励的临界幅值与噪声幅值之间的关系, 如图 4 中的实线所示.



(a) 同宿分叉

(b) homoclinic bifurcation



(b) 异宿分叉

(b) heteroclinic bifurcation

图 4 临界幅值  $\gamma$  与噪声幅值  $\sigma$  之间的关系

- 理论解, -- 数值解

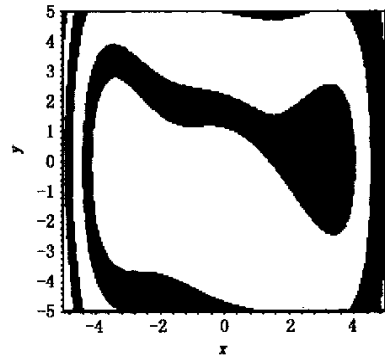
Fig. 4 The threshold amplitude  $\gamma$  vs noise intensity  $\sigma$  for

- analytic results, -- numerical result

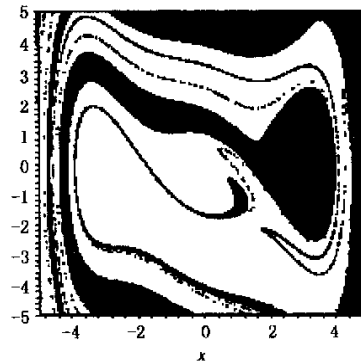
### 2.2 分形边界

检验同宿分叉和异宿分叉的另一有效工具是数值计算系统的分形域边界, 同宿分叉或异宿分叉的临界值是系统出现分形边界的充分条件<sup>[6,7,16,17]</sup>. 当系统出现分形边界时, 即使系统处于非混沌运动状态, 系统对初始条件也极端敏感.

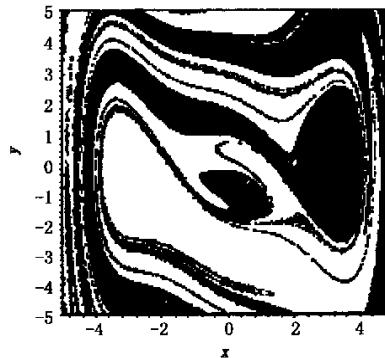
取  $a = 0.3, \Omega = 1.0$  和  $\sigma = 0$ , 当  $\gamma$  小于同宿分叉的临界值 0.6255 时, 系统(1) 将在势井  $x = x_0$  或  $x = \pm x_1$  内做周期运动, 当  $\gamma$  略大于同宿分叉的临界值时, 系统仍有可能作周期运动. 图 5, 6, 7 分别是系



(a)  $\gamma = 0.35$



(b)  $\gamma = 0.6258$



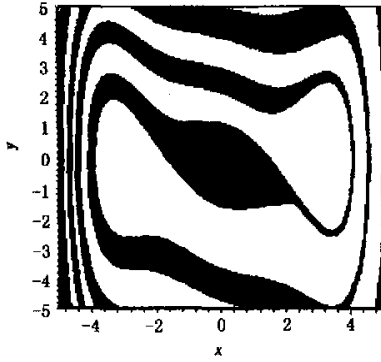
(c)  $\gamma = 0.7$

图 5 系统运动处在势井  $x = x_1$  周围的吸引域

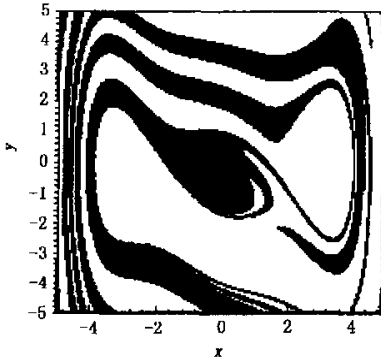
Fig. 5 Basins of attraction for motion around  $x = x_1$

统运动处在势井  $x = x_1, x = x_0$  和  $x = -x_1$  周围的吸引域. 由图 5 ~ 图 7 可看出, 当  $r < 0.6255$  时,

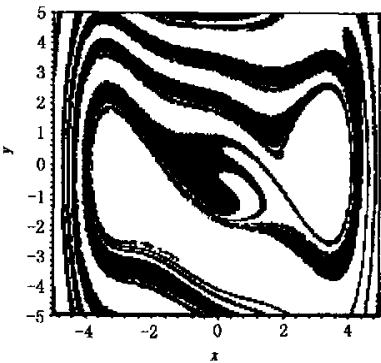
吸引域有规则的边界(见图 5(a), 图 6(a) 和图 7(a)), 随着  $\gamma$  的增大, 吸引域的规则边界被破坏, 分形吸引域边界越来越明显(见图 5(b), (c), 图 6(b), (c) 和图 7(b), (c)).



(a)  $\gamma = 0.35$

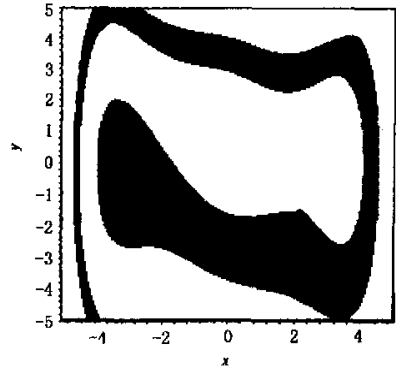


(b)  $\gamma = 0.6258$

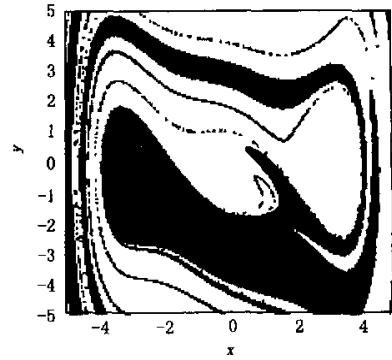


(c)  $\gamma = 0.7$

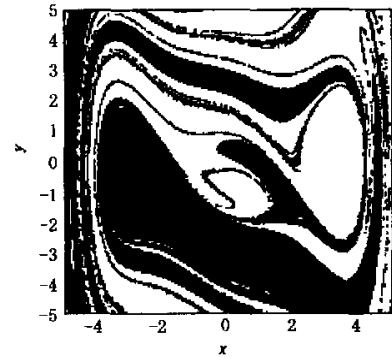
图6 系统运动处在势井  $x = x_0$  周围的吸引域  
Fig. 6 Basins of attraction for motion around  $x = x_0$



(a)  $\gamma = 0.35$



(b)  $\gamma = 0.6258$



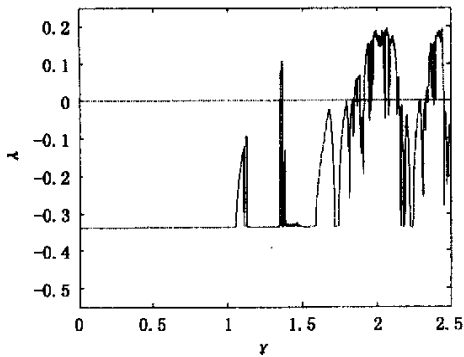
(c)  $\gamma = 0.7$

图7 系统运动处在势井  $x = -x_1$  周围的吸引域  
Fig. 7 Basins of attraction for motion around  $x = -x_1$

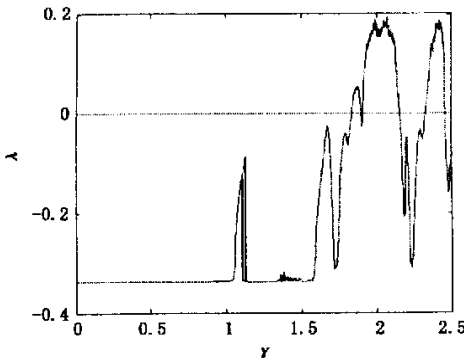
### 2.3 最大 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数表示相空间中动力系统两条邻近轨道之间距离的平均指数收敛和发散的变化率, 常用来表征系统是否存在混沌运动. 一个系统有一个或多个正的 Lyapunov 指数就被称为混沌系

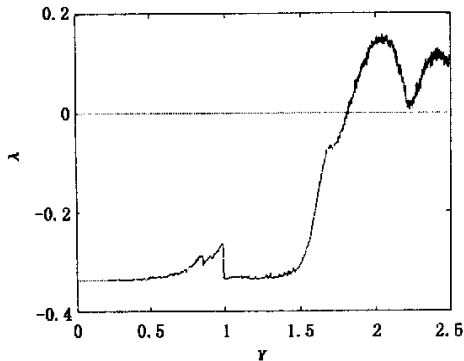
统. 为了检验由随机 Melnikov 过程的均方值准则得到的可能出现混沌的谐和激励的阈值  $\gamma$  与噪声幅值  $\sigma$  关系, 下面采用 Wolf 等<sup>[18]</sup> 的 ODE 算法计算系统(1)的最大 Lyapunov 指数, 由最大 Lyapunov 指数为零, 得到系统产生混沌运动的谐和激励的临界幅值.



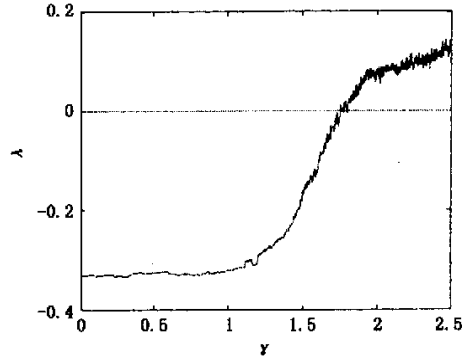
(a)  $\sigma = 0$



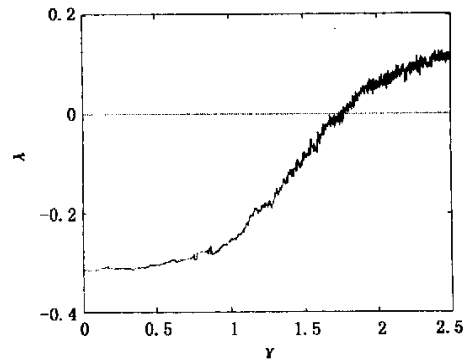
(b)  $\sigma = 0.01$



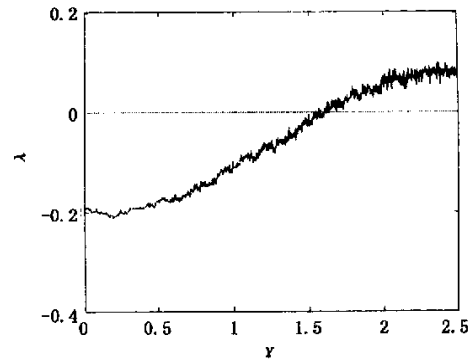
(c)  $\sigma = 0.1$



(d)  $\sigma = 0.3$



(e)  $\sigma = 0.5$



(f)  $\sigma = 0.8$

图8 系统(1)的最大 Lyapunov 指数  $\lambda$  与谐和激励的幅值  $\gamma$  之间的关系

Fig. 8 The top Lyapunov exponent vs. the harmonic excitation amplitude for noise-free system (1)

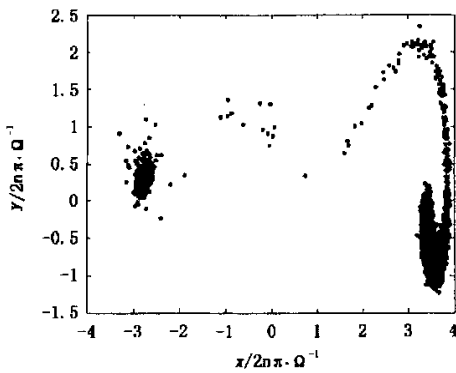
固定参数  $\alpha = 0.678, \Omega = 1.0$ , 当  $\sigma = 0$  及  $\sigma = 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.8$ , 系统的最大 Lyapunov 指数如图 8 所示. 由最大 Lyapunov 指数为零, 得到产生混沌运动的阈值与噪声幅值的关系如图 4 中

的虚线所示.由图8可知:对于较小的幅值 $\gamma$ ,最大Lyapunov指数为负,随着 $\gamma$ 的增大,最大Lyapunov指数由负变为正,表明系统出现混沌.在谐和激励下,当 $\gamma$ 值超过临界值之后,最大Lyapunov指数还有许多负值出现,表明系统又回到周期运动;在随机噪声摄动下( $\sigma > \sigma_c, \sigma_c \approx 0.098$ ),噪声的作用是将这些周期运动去掉.从图4可知,随机Melnikov方法预测系统出现混沌运动阈值与噪声幅值之间的关系与数值计算最大Lyapunov指数的结果是一致的:出现混沌运动的阈值随着噪声幅值的增大而减小,即噪声对混沌起到诱导作用.

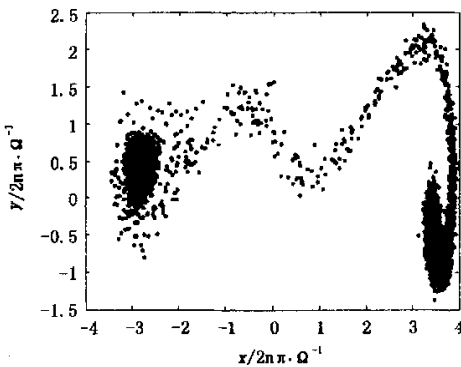
2.4 Poincare 截面

为验证上述数值计算最大Lyapunov指数结果的正确性及说明随机噪声对系统响应的影响,下面研究系统(1)的Poincare截面.取连续迭代的Poincare截面

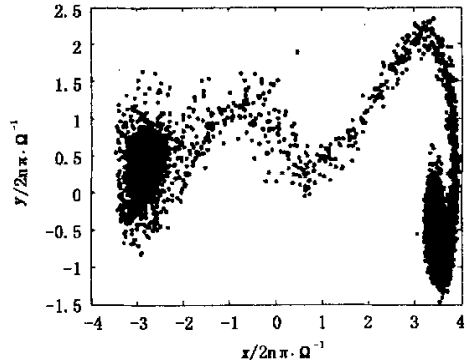
$$P: \sum \rightarrow \sum, \sum = \{(x(t), \dot{x}(t)) \mid t = 0, 2\pi/\Omega, 4\pi/\Omega, \dots\} \subseteq R^2$$



(a)  $\sigma = 0.06, \gamma = 1.6$



(b)  $\sigma = 0.08, \gamma = 1.6$

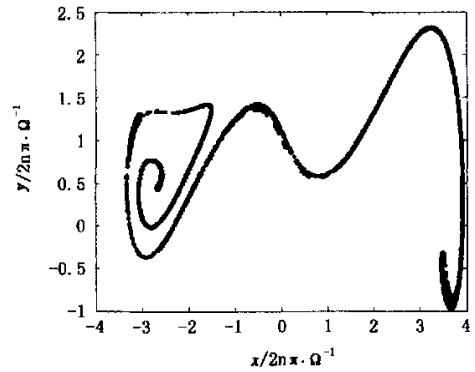


(c)  $\sigma = 0.1, \gamma = 1.6$

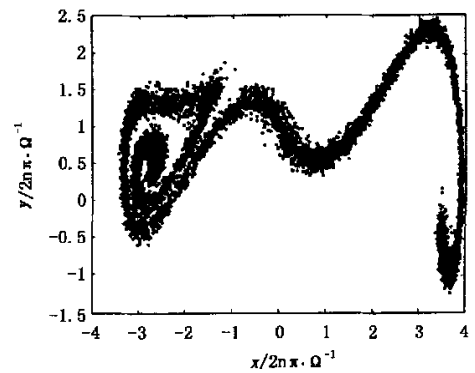
图9 系统(1)的Poincare截面

Fig. 9 Poincare maps for noise-free system (1)

在相平面上选取100个初始点,对于每一个初始点,用四阶的Runge-Kutta方法对系统(1)求解,且迭代每经过一个周期取一个相点,对每一个初始点取20000个相点,选后19000个相点做Poincare截面.从系统的最大Lyapunov指数可知:当 $\gamma = 1.6$ ,



(a)  $\sigma = 0.0, \gamma = 2.0$



(b)  $\sigma = 0.05, \gamma = 2.0$



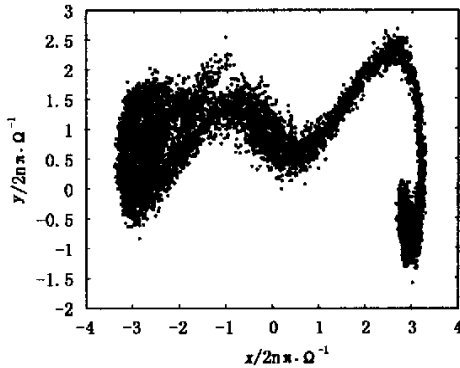
(c)  $\sigma = 0.1, \gamma = 2.0$ 

图10 系统(1)的Poincaré截面

Fig. 10 Poincaré maps for noise-free system (1)

$\sigma = 0$  时, 最大 Lyapunov 指数小于零, 系统处于周期状态; 当  $\gamma = 1.6, \sigma = 0$  时, 最大 Lyapunov 指数大于零, 系统处于浑沌状态. 取参数  $\gamma = 1.6, \sigma = 0.06, 0.08, 0.1$ , 其 Poincaré 截面的结果见图 9; 取参数  $\gamma = 2.0, \sigma = 0.0, 0.05, 0.1$ , 其 Poincaré 截面的结果见图 10. 由图 9、10 易知, 随机噪声使系统的拟周期吸引子和混沌吸引子的面积有所扩散.

### 3 结论和讨论

本文讨论了高斯白噪声对谐和激励下具有同宿轨道、异宿轨道  $\phi^6$  势的 Duffing 系统的混沌运动的影响. 首先基于同宿分叉和异宿分叉, 由 Melnikov 方法推导了系统存在混沌运动的必要条件及出现分形域边界的充分条件, 并根据此条件模拟了系统的分叉曲面、分叉曲线和吸引域. 结果表明: 噪声的出现, 减小了系统出现混沌运动的谐和激励的临界幅值, 从而增大了参数空间的混沌域, 且出现混沌运动的临界幅值随着噪声幅值的增大而减小. 其次数值计算了系统的最大 Lyapunov 指数, 由最大 Lyapunov 指数为零得到产生混沌运动的谐和激励的临界幅值也随着噪声幅值的增大而减小, 这与有界噪声和谐和激励摄动下具有三势井 Duffing 振子的混沌运动的阈值变化趋势截然相反<sup>[8]</sup>. 另外, 对 Poincaré 截面的数值模拟结果表明随机噪声能使拟周期吸引子和混沌吸引子的面积有所扩散.

### 参 考 文 献

- 1 Thompson JM, Stewart HB. Non-linear Dynamics and Chaos. New York: Wiley, 1986
- 2 Hayashi. Non-linear oscillations in physical system. New York: McGraw-Hill, 1964
- 3 Moon FC. Chaotic and Fractal Dynamics. New York: Wiley, 1992
- 4 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical System, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer-Verlag, 1983
- 5 Jing ZJ, Wang RQ. Complex dynamics in Duffing system with two external forcing. *Chaos solitons & Fractal*, 2005, 22, (3): 887~900
- 6 Li GX, Moon FC. Criteria for chaos of a three-well potential oscillator with homoclinic and heteroclinic orbits. *J Sound Vib*, 1990, 136, (1): 17~34
- 7 Tchoukuegno R, Nana Bbendjio B R, Wofo P. Resonant oscillations and fractal basin boundaries of a particle in  $\phi^6$  apotential. *Physica A*, 2002, 34: 362~378
- 8 Yang XL, Xu W, Sun ZK, Fang T. Effect of bounded noise on chaotic motion of the triple-well potential system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 25: 415~424
- 9 Wei JG, Leng G. Lyapunov exponent and chaos of Duffing's equation perturbed by white noise. *Appl Math compu*, 1997, 88: 77~93
- 10 Lin H, Yim SCS. Analysis of a nonlinear system exhibiting chaotic, noisy chaotic and random behaviors. *J Appl Mech ASME*, 1996, 63: 509~516
- 11 Xie WC. Effect of noise on chaotic motion of buckled column under periodic excitation. *Nonlinear and stochastic Dynamics*, 1994, AMD-192(DF-73): 215~225
- 12 Holmes PJ. A nonlinear oscillator with a strange attractor. *Philos Trans R Soc*, 1979, A292: 419~448
- 13 Wiggins S. Global bifurcations and chaos: Analytical - Methods. New York: Springer-Verlag, 1988
- 14 Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos. New York: Springer-Verlag, 1990
- 15 Frey M, Simiu E. Noise-induced chaos and phase space flux. *Physica D*, 1993, 63: 321~340
- 16 Moon FC, Li GX. Fractal basin boundaries and homoclinic orbits for periodic motion in a two-well potential. *Phys Rev Lett*, 1985, 55: 1439~1442

- 17 Grebogi C, Macdonald S, Ott E, Yorke J. Final state sensitivity: An obstruction to predictability. *Phys Lett A*, 1983, 99: 415~418
- 18 Wolf A, Swift J, Swinney H, Vastano A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 1985, 16: 285~317

## EFFECT OF RANDOM NOISE ON CHAOTIC MOTION OF A PARTICLE IN A POTENTIAL \*

Sun Zhongkui Xu Wei Yang Xiaoli

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** The chaotic behaviors of a particle in a triple potential well possessing both homoclinic and heteroclinic orbits under harmonic and Gaussian white noise excitations were studied. Following the Melnikov theory, the conditions for the existence of transverse intersection on the surface of homoclinic or heteroclinic orbits for the triple potential well case were derived, and were complemented by the numerical simulations, from which we showed the bifurcation surfaces and the fractality of the basins of attraction. The results revealed that the threshold amplitude of harmonic excitation for onset of chaos moved downwards as the noise intensity increased, which was further verified by the top Lyapunov exponents of the original system. Thus the larger the noise intensity, the more possible chaotic domain in the parameter space. Moreover, the effect of noise on Poincare maps was also investigated.

**Key words** noise, chaotic motion, potential, random Melnikov technique, fractal basin boundaries