

多体系统传递矩阵法不须进行违约修正的验证*

李春明¹ 芮筱亭²

(1. 中国石油大学(华东)机电工程学院机械设计系, 东营 257061; 2. 南京理工大学, 南京 210094)

摘要 对一含有完整约束的多体系统在平面、空间中的运动规律进行了计算机仿真研究. 采用通常动力学方法, 以卡尔丹角作为位置角建立和求解动力学方程, 并对进行和不进行违约修正的仿真结果进行了比较. 然后采用多体系统离散时间传递矩阵法进行了计算机仿真. 仿真结果表明多体系统传递矩阵法在不进行违约修正的情况下, 仍能保证完整约束不被违反. 与通常动力学方法相比, 多体系统传递矩阵法不需进行违约修正.

关键词 多体动力学, 完整约束, 违约修正, 离散时间传递矩阵法

引言

多体系统动力学是航空、航天、兵器、车辆等领域解决许多技术难题的重要理论. 随着系统复杂程度的增加, 其动力学方程的建立越来越繁琐. 通常动力学方法有两个共同的特征: (1) 须建立总体动力学方程, 这对于一些工程技术人员较为困难; (2) 随着系统复杂程度的增加, 总体动力学方程的自由度数大幅度地增加, 所涉及的矩阵相应地增大^[1]. 采用通常动力学方法, 系统结构发生变化, 其动力学方程通常需要重新推导. 多体系统离散时间传递矩阵法是一种较新的动力学方法, 具有简捷、高效、计算工作量小等优点. 该方法的建模灵活性较强、程式化程度较高. 对结构改变的多体系统, 只需进行少量的工作即可进行动力学研究. 本文分别采用该方法和通常动力学方法对一含有完整约束的多体系统在平面、空间中的运动规律进行计算机仿真. 两者的对比表明, 该方法不需进行违约修正.

1 多体系统模型及其动力学方程

图1为一含有完整约束的多体系统, 包括由光滑铰链连接的6个刚体, 系统受到重力作用, 图中箭头表示传递方向.

该系统做平面运动的动力学方程可通过 Lagrange 方程建立, 令刚体 2, 8, 9, 10 的转角为独立坐标, 其第 2 类拉格朗日方程可表示为(本文略去其具体形式)

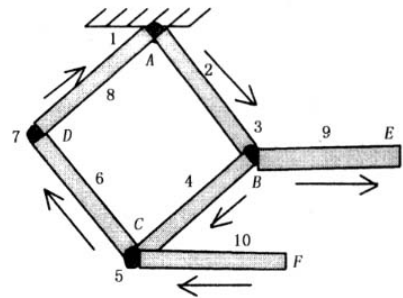


图1 多体系统模型

Fig. 1 Model of a Multi-body system

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i = 2, 8, 9, 10) \quad (1)$$

其中, T, U 分别为系统的动能和势能, θ_i 为体 i 的转角.

系统包含闭环结构, 其约束方程为

$$\begin{cases} l_2 \cos \theta_2 + l_4 \cos \theta_4 + l_6 \cos \theta_6 + l_8 \cos \theta_8 & 0 \\ l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin \theta_4 + l_6 \sin \theta_6 + l_8 \sin \theta_8 & 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中, l_i 为体 i 的长度. 如闭环结构中各体的长度相等, 则: $\theta_4 = \theta_8 - \pi, \theta_6 = \theta_2 + \pi$. 式(2)对时间的二阶导数和式(1)联立, 可导出系统的运动微分方程

$$E_{6 \times 6} \ddot{\Theta} = f_{6 \times 1} \quad (3)$$

其中, $\ddot{\Theta}$ 为 $[\ddot{\theta}_2 \ \ddot{\theta}_4 \ \ddot{\theta}_6 \ \ddot{\theta}_8 \ \ddot{\theta}_9 \ \ddot{\theta}_{10}]^T$, 系数矩阵 $E_{6 \times 6}$ 为 Θ 的确定函数, $f_{6 \times 1}$ 为 Θ 和 $\dot{\Theta}$ 的确定函数. 给定 Θ 和 $\dot{\Theta}$ 的初始条件, 可对(3)式进行数值积分求解.

该多体系统做空间运动的动力学方程可由各

2005-05-24 收到第 1 稿, 2005-07-02 收到修改稿.

* 中国石油天然气集团公司青年创新基金和中国石油大学科研基金(Y030306)资助

体的动力学方程和约束方程对时间的二阶导数组成(直接增广法).各体的动力学方程包括由动量矩定理导出的转动方程和由动量定理导出的平动方程.体*i*的动力学方程为

$$-m_i \ddot{\mathbf{X}}_{C_i} + \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_{O_i} + \mathbf{F}_{C_i} = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\mathbf{M}_{C_i} - \mathbf{J}_{C_i} \dot{\bar{\omega}}_i - \bar{\omega}_i \times \mathbf{J}_{C_i} \bar{\omega}_i + \mathbf{r}_{I_i} \times \mathbf{Q}_i - \mathbf{r}_{O_i} \times \mathbf{Q}_0 + \mathbf{M}_{I_i} - \mathbf{M}_{O_i} = \mathbf{0} \quad (5)$$

其中, m_i 为该体质量, \mathbf{Q} , \mathbf{M} 分别为力 $[Q_x, Q_y, Q_z]^T$,力矩 $[M_x, M_y, M_z]^T$; \mathbf{F}_{C_i} , \mathbf{M}_{C_i} 分别为质心处受到的外力和外力矩; \mathbf{J}_{C_i} 为刚体对质心的惯量张量; $\bar{\omega}$ 为角速度; \mathbf{r}_{I_i} , \mathbf{r}_{O_i} 分别为输入端、输出端相对质心的矢径.

系统的约束方程为

$$\mathbf{l}_{AB} + \mathbf{l}_{BC} + \mathbf{l}_{CD} + \mathbf{l}_{DA} = \mathbf{0} \quad (6)$$

其中, \mathbf{l}_{AB} 为*B*点相对*A*点的矢径.

2 多体系统离散时间传递矩阵法

根据自然属性将多体系统分解为刚体、弹性体、铰、阻尼器等一系列元件.各元件端点处的状态向量由位移、转角、内力矩和内力组成,内力矩、内力的方向按以下规则确定:体的输入端(铰的输出端),沿坐标轴方向为正,体的输出端(铰的输入端)沿坐标轴方向为负.根据当前时刻的运动参数可基于经典力学理论分别建立下一时刻各元件的传递方程,导出系统总传递方程.给定系统初始运动状态,可求得系统的运动规律.各元件输出端与输入端状态向量之间的关系由该元件的传递矩阵表示.采用将速度、加速度表示为位移的线性函数的方法(可简称逐步时间积分方法)可求得速度、加速度^[1-4].

该方法具有以下特点:

(1) 该方法提供了一种较灵活的多体系统建模方法,可避免建立多体系统的总体动力学方程.通过建立各类元件的传递矩阵库,可对复杂的多体系统进行建模;

(2) 该方法建立在时间离散化的基础上,可对具有时变系统参数、时变受力函数、大位移运动及其他非线性因素的多体系统进行研究;

(3) 该方法的数值计算算法较简单,建立的总体传递方程是代数方程;

(4) 该方法有较广的应用范围,例如不需做太

多工作,即可对多体系统进行振动分析.

通常刚体上某点的位移可由其坐标表示,在较短时间内角位移可视为矢量.对于作平面运动的多体系统,刚体某端点的状态向量为

$$\mathbf{Z}_{i,j} = [x, y, \theta, M, Q_x, Q_y, 1]^T \quad (7)$$

其中,下标*i, j*分别为与该点相连的体、铰链的编号; x, y 为该点在惯性参考坐标系中的坐标; θ 为体*i*相对于*x*轴的转角; M 为该点处内力矩; Q_x, Q_y 分别为该点处内力在*x, y*轴上的投影.

对于作空间运动的刚体,刚体某端点的状态向量为

$$\mathbf{Z}_{i,j} = [x, y, z, \theta_1, \theta_2, \theta_3, M_x, M_y, M_z, Q_x, Q_y, Q_z, 1]^T \quad (8)$$

其中, x, y, z 为该点在惯性参考坐标系下的坐标; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 分别为表示刚体姿态的角度坐标(卡尔丹角 α, β, γ 或者欧拉角 ϕ, θ, φ 等); M_x, M_y, M_z 分别为该点处内力矩在*x, y, z*轴上的投影; Q_x, Q_y, Q_z 为该点处内力的投影.

(角)速度、加速度可由 Fox-Euler 方法、Newmark- β 方法、Wilson- θ 方法、Houbolt 方法等逐步时间积分法表示为(角)位移的线性函数.

$$\dot{\zeta}(t_i) = \mathbf{A}(t_i)\zeta(t_i) + \mathbf{B}_\zeta(t_i) \quad (9)$$

$$\ddot{\zeta}(t_i) = \mathbf{C}(t_i)\zeta(t_i) + \mathbf{D}_\zeta(t_i) \quad (10)$$

忽略相邻时刻之间角坐标、角速度差的高次幂,将角速度和角坐标的高次幂转化为一次幂的线性函数,将几何方程中包含当前时刻角坐标的项表示为保留一阶项的泰勒展开式,根据泰勒展开式将动力学方程中作为系数的当前时刻角坐标的正、余弦函数值表示为前一时刻参数及时间步长的函数.为提高计算精度设计角坐标的迭代循环,根据等加速度假设确定其初值,增加几何方程中的高阶项、适当选取角坐标等^[3].这样,刚体和光滑铰链具有统一形式的传递矩阵,采用多体系统离散时间传递矩阵法求解多刚体系统动力学响应的计算步骤如下:

1) 给定系统参数、初始状态、逐步时间积分法参数、计算参数等;

2) 令仿真步数的序号 $i = 1$ (代表离散时间的序号);

3) 根据第 $i - 1$ 时刻的角坐标及其对时间的一、二阶导数,计算第 i 时刻的逐步时间积分法的

系数,并设定第 i 时刻的初值;

- 4) 令迭代循环的循环变量 $k = 1$;
- 5) 计算各刚体、铰传递矩阵在当前时刻的值;
- 6) 根据系统结构的特点,拼装出总体传递方程(代数方程);

7) 求解总体传递方程,推导出各元件端点在第 i 时刻的状态变量;

8) 判定收敛准则.如果第 $k, k - 1$ 次迭代的角坐标之差的平方和大于给定精度值或者迭代循环未达到给定次数,则令 $k = k + 1$,转至 E);

9) 采用逐步时间积分法,求得当前时刻各元件端点的速度、加速度,和角坐标对时间的一、二阶导数;

10) 若达到指定仿真时间,则终止程序,否则令 $i = i + 1$,转至 3).

图 1 多体系统的数学建模仅仅是矩阵的拼装,其完整约束可表示为体 8 的输出端位移为零,该方法将其作为边界条件,因此约束总是满足的.

3 通常动力学方法

通常动力学方法研究多体系统的运动规律,通常是根据系统各刚体的转角及角速度(初始条件),通过求解动力学方程,得到各刚体的角加速度,然后采用特定的积分方法求得下一时刻的各刚体转角及角速度,循环进行以上步骤可得到系统的运动规律.定步长四阶龙格-库塔法是一种精度较高的积分方法.

图 1 所示系统的动能通常不能完全表示为独立坐标的函数,无法建立严格的第二类拉格朗日方程.采用式(3)表示的动力学方程求解的系统运动,不能保证约束方程成立.对于平面运动可通过重新对 $\theta_4, \theta_6, \dot{\theta}_4$ 和 $\dot{\theta}_6$ 重新赋值实现其违约修正^[2].本文采用式(11)和(12)重新赋值.

$$\begin{cases} \theta_4 = -\arccos\left(\frac{x_l - l_2 \cos\theta_2}{l_4}\right) \\ \theta_6 = +\arccos\left(\frac{-l_8 \cos\theta_8 - x_l}{l_6}\right) \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_4 = -\frac{l_2 \sin(\theta_6 - \theta_2) \dot{\theta}_2 + l_8 \sin(\theta_6 - \theta_8) \dot{\theta}_8}{l_4 \sin(\theta_6 - \theta_4)} \\ \dot{\theta}_6 = -\frac{l_2 \sin(\theta_4 - \theta_2) \dot{\theta}_2 + l_8 \sin(\theta_4 - \theta_8) \dot{\theta}_8}{l_6 \sin(\theta_4 - \theta_6)} \end{cases} \quad (12)$$

其中 x_l 为体 4 和体 6 的铰接点横坐标,通过求解式(13)导出.

$$\begin{cases} (x_l - l_2 \cos\theta_2)^2 + (y_l - l_2 \sin\theta_2)^2 = l_4^2 \\ (-l_8 \cos\theta_8 - x_l)^2 + (-l_8 \sin\theta_8 - y_l)^2 = l_6^2 \end{cases} \quad (13)$$

令该多体系统中各体的长度相等,由其几何关系可导出系统的第二类拉格朗日方程.图 2 为仿真 20 s 的系统机械能和体 2 的转角.系统仅受到重力的作用,机械能保持守恒.不进行违约修正则机械能变化率为 0.01 焦耳每秒,进行违约修正则基本不变.两者的系统运动有显著的不同.考察约束方程,1 s 之内既已不能满足,仿真 20 s,约束方程左边约增加至 2.5×10^{-3} m,并且有逐渐增加的趋势.因此必须进行违约修正,仿真结果才可信.

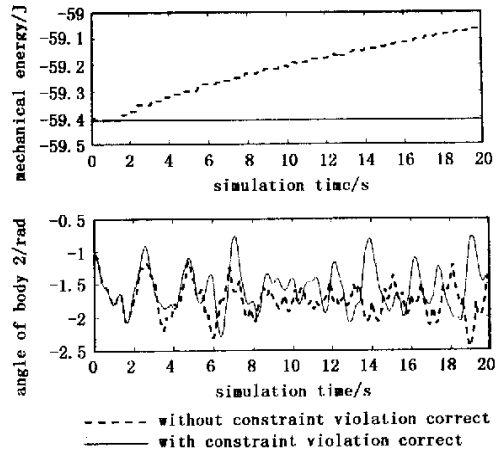


图 2 进行违约修正与不进行违约修正的比较
Fig. 2 Contrast of simulations with and without the constraints amendment

4 计算机仿真结果

图 1 所示的由刚体和光滑铰链组成的多体系统,仅受到重力的作用.各体质量均为 1 kg,体的输出端与输入端的距离均为 1 m,初始角速度均为零.在平面中运动,各体相对于质心的转动惯量均为 $1/12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,在空间中运动,各体在连体坐标系对质心的转动惯量矩阵均为 $\text{diag}(1/150, 13/150, 13.150) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.分别采用多体系统离散时间传递矩阵法和通常动力学方法求解系统的运动规律.前者根据动力学理论和运动、几何协调关系建立通用的刚体、光滑铰传递矩阵,然后根据系统特点构造出整体动力学方程^[5].后者根据各体的动力学方程

组成为总体方程或根据拉格朗日方法建立变量较少的动力学方程,然后采用四阶 Runge-Kutta 法求解^[6].

4.1 系统做平面运动的仿真结果

体 2,4,6,8,9,10 的初始转角分别为: $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, 0 和 π . 计算机仿真结果如图 3 和图 4 所示,体 9 和体 10 的运动含有大角度环运动,研究该运动属于典型的大运动非线性动力学问题.

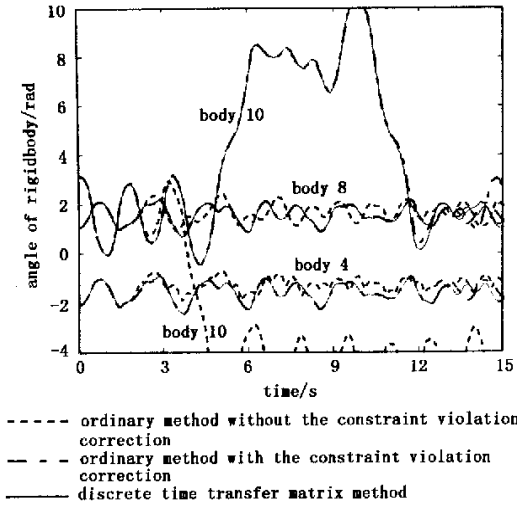


图 3 系统做平面运动的仿真结果(一)

Fig.3 Simulation result of moving in plane(1)

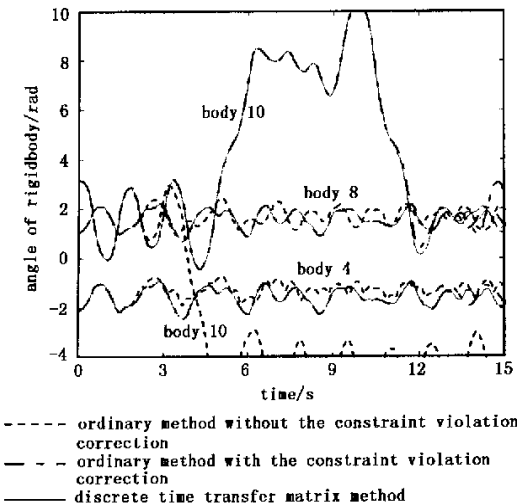


图 4 系统做平面运动的仿真结果(二)

Fig.4 Simulation result of moving in plane(2)

对于多体系统离散时间传递矩阵法,进行与不进行违约修正的结果基本相同.对于通常动力学方法,

进行与不进行违约修正的差别较大,选择不同时间步长,不进行违约修正的计算结果与多体系统传递矩阵法的相同部分均小于 2 s,进行速度违约修正,该相同部分约 14 s,再进行位移违约修正,该相同部分基本不变,但长时间的仿真表明位移违约修正仍不可少.可见,对于类似于本文含有完整约束的多体系统,多体系统离散时间传递矩阵法具有不需进行违约修正的优点.采用对(3)式进行数值积分并且由(11)和(12)式进行违约修正的计算结果与采用第二类拉格朗日方程的基本相同.

4.2 系统做空间运动的仿真结果

刚体角度坐标采用卡尔丹角 α, β, γ , 体 2,4,6,8,9,10 的初始转角分别为: $[0 \ 0 \ -\frac{\pi}{3}]^T$, $[0 \ 0 \ -\frac{2\pi}{3}]^T$, $[0 \ 0 \ \frac{2\pi}{3}]^T$, $[0 \ 0 \ \frac{\pi}{3}]^T$, $[-\frac{\pi}{6} \ \frac{\pi}{8} \ 0]^T$, $[\frac{\pi}{6} \ -\frac{\pi}{8} \ 0]^T$. 采用通常动力学方法,按照图示的传递方向,不能进行计算机仿真,改变体 3,4 的传递方向才可进行.同平面问题相同,约束方程很快不能满足,须进行违约修正.图 5 和图 6 为传递矩阵法与通常动力学方法都不进行违约修正的体 9,10 的转角计算机仿真结果比较.对其他结构的仿真表明,当接近奇点时易发生数值计算的困难.

5 结论

1) 多体系统离散时间传递矩阵法是研究多体系统运动规律的有效方法.因其数学建模的灵活性较高、程式化程度较强等优点,在航空、航天、兵器、车辆等领域,对于结构复杂,尤其是含链式结构较难的问题具有较高的研究价值.许多工程问题需要考虑的因素越来越多,对计算精度的要求也越来越高,与通常动力学方法相比,该方法有更重要的工程意义.

2) 对于类似于本文含有完整约束的多体系统,多体系统传递矩阵法具有不需进行违约修正的优点.

3) 通过与解析解的比较,表明本文采用的对体 4,6 转角重新赋值的违约修正方法有效.

4) 为了进行仿真实验的验证,可采用具有良好润滑的光滑铰连结而成的轻质短杆系统,由先进传感器测出各铰接点的位移、速度、加速度,然后换

算成各体角坐标的形式。

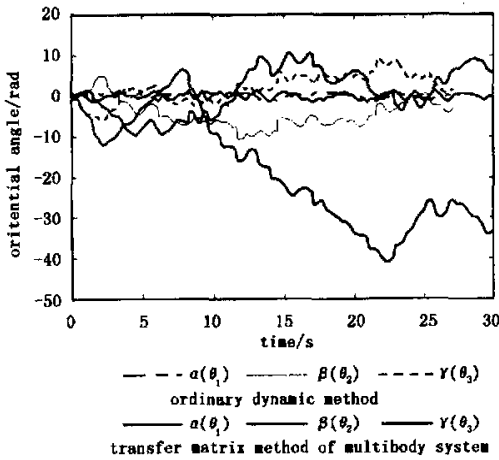


图5 系统做空间运动的体9仿真结果

Fig. 5 Simulation result of moving in space for body 9

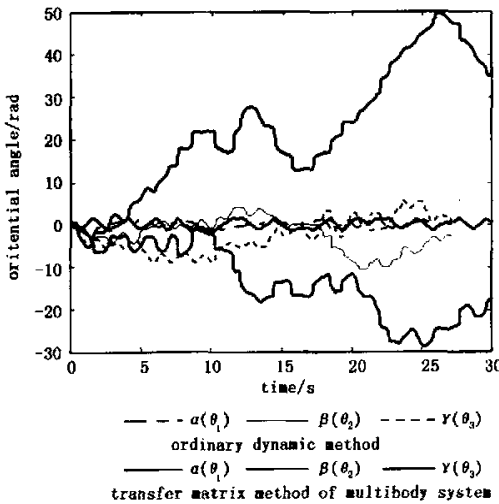


图6 系统做空间运动的体10仿真结果

Fig. 6 Simulation result of moving in space for body 10

参 考 文 献

- 1 Rui XT, Lu YQ, Pan L, Lu WG. The Discrete time transfer matrix method for multibody system dynamics. *Advances in Computational Multibody Dynamics*, 1999:93~108
- 2 Li CM, Rui XT. The solution for a multibody system by transfer matrix method. Nanjing: The 5th International Conference on Vibration Engineering, 2002:224~229
- 3 李春明, 芮筱亭. 提高多体系统离散时间传递矩阵法计算精度的研究. *应用力学学报*, 2004, 21(1): 56~61 (Li Chunming, Rui Xiaoting. Improvement of the accuracy of computation for the discrete time transfer matrix method of multibody system. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2004, 21(1): 56~61 (in Chinese))
- 4 李春明, 芮筱亭, 张春玲. 基于简化柔性体的刚柔混合多体系统动力学响应求解方法. *动力学与控制学报*, 2004, 2(2S): 7~10 (Li Chunming, Rui Xiaoting, Zhang Chunling. Getting of the dynamics response of rigid-clastic multibody system based on simplifying elastic-body. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(2S): 7~10 (in Chinese))
- 5 李春明, 芮筱亭. 完整系统的多刚体系统离散时间传递矩阵法研究. *力学季刊*, 2003, 24(3): 411~415 (Li Chunming, Rui Xiaoting. Study on Holonomic system with discrete time transfer matrix method. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2003, 24(3): 411~415 (in Chinese))
- 6 李春明. 提高多体系统离散时间传递矩阵法计算精度的研究[国[2001]35 博士后研究报告]. 南京理工大学, 2003 (Li Chunming. Study on Improving accuracy of discrete time transfer matrices method for multibody system dynamics [Thesis of post-doctor]. Nanjing University of Science and Technology, 2003 (in Chinese))

VALIDATING ON THE TRANSFER MATRIX METHOD OF MULTIBODY SYSTEM WITHOUT CONSIDERING CONSTRAINT VIOLATION CORRECTION*

Li Chunming¹ Rui Xiaoting²

(1. *Institute of Mechatronic Engineering, China University Of Petroleum (East China), Dongying 257061, China;*

2. *Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China*)

Abstract The computational simulation of the movement of a multibody system which including holonomic constraints moving in plane and in space was studied by using the discrete time transfer matrix method of multibody system (MS-DT-TMM). With ordinary dynamic method, regarding the Kardan Angle as the orientation angle, the dynamic equations were founded and solved, and the simulation results with or without the constraint violation correction were compared. The simulation results show that it is not necessary to deal with the constraints of the system for the MS-DT-TMM, because the constraint equations are always satisfied for the computational example studied in this paper.

Key words multibody dynamic, holonomic constraint, constraint violation correction, discrete time transfer matrix method

Received 24 May 2005, revised 02 July 2005.

* The project supported by CNP Cinnovation fundation and China University of Petroleum funation(Y030306)