

# 基于 Serret-Frenet 坐标系的翼伞系统轨迹跟踪控制

熊 菁 程文科 秦子增

(国防科大航天与材料工程学院,长沙 410073)

**摘要** 基于翼伞系统归航轨迹的特点,采用 Serret-Frenet 坐标系表示距离“平衡”轨迹的偏差,得到线性时不变的误差运动方程.由此误差方程可以得到控制量与轨迹偏差之间的传递函数,直接进行轨迹控制器的设计.对于控制器输入所需的轨迹偏差和偏差率可以采用解析的方法近似求解,极大地简化了计算.整个设计流程简单明了,采用 PD 控制器进行轨迹跟踪的算例表明此套方法的有效性.

**关键词** 轨迹跟踪,翼伞,平衡轨迹,Serret-Frenet 坐标系,PD(比例-微分)控制,侧向控制

## 引言

翼伞系统与常规降落伞系统相比,可以进行控制操纵,实现滑翔、转弯和雀降.全球定位系统(GPS)的使用,为实现物用翼伞系统的自主归航提供了条件.

到目前为止研究翼伞系统归航控制的参考文献并不多.早期比较常用的控制方法是非比例径向归航法<sup>[1,2]</sup>,它没有进行航迹规划,也就没有航迹跟踪,只是按照固定的转弯半径和偏转角度,指引翼伞系统向着接近目标点的方向飞行.此法工程运用比较简单,只需测量位置、速度及与水平面的夹角.存在的问题是轨迹不具有可知性,且为实现精确着陆对初始投放点要求严格,左右操纵绳反复交替的操纵使系统的飞行状态不易稳定.

对于轨迹跟踪,经典的设计步骤是<sup>[3,4]</sup>:1)确定基准状态;2)小扰动线性化的方法求误差运动方程;3)控制姿态稳定内回路的设计;4)质心运动外回路的设计. Gockel<sup>[5]</sup>对翼伞系统归航的设计基本按照上述方法进行,在对六自由度方程进行线性化的基础上,以偏航角和偏航角速度作为控制姿态内回路的控制量.测量的量有位置、偏航角和偏航角速度.其他的文献,如 Pollini<sup>[6]</sup>和 Tsai<sup>[7]</sup>,都可以看作是对内回路控制方法的讨论.

Do<sup>[8]</sup>与 Aguiar<sup>[9]</sup>指出在轨迹跟踪中“path-following”与“reference-tracking”的区别,path-following 是跟踪一条给定的几何路径,没有时间约束,而 reference-tracking 则要求与真实运动轨迹相重合.

基于 path-following 的思想, Kaminer<sup>[10]</sup>给出了以“平衡轨迹”(trimming trajectory)为基准的飞行器运动误差方程组,其距离的偏差在 Serret-Frenet 坐标系下表示.整个方程组的系数是线性定常的,可以直接得到偏差距离与控制量之间的关系,使得不需要进行内、外两个回路的设计,简化了控制器的设计过程.此方法适用于航迹以稳态运动为主,无时间约束的飞行器的轨迹跟踪问题.

本文首先分析了翼伞系统采用 Kaminer<sup>[10]</sup>方法的可行性;在公式的推导过程中,Kaminer 主要基于正向转弯来推导,本文充分考虑了翼伞的各类稳定飞行状态,通过推导修正了原文献方程中存在的多处正、负号错误,以及最后小扰动线性化方程中存在的漏项,得到了适合于翼伞归航控制设计的整套方程.然后采用经典的 PID 控制器来实现翼伞的归航控制.此方法的特点是控制器设计简单;所需的测量量只有位置和速度,使用简单的 GPS 接收机就可提供,对测量设备要求少.仿真的结果表明了方法的有效性.

## 1 系统特性分析

所谓的“平衡轨迹”是飞行器在控制输入给定情况下做稳态运动的轨迹,运动方程可以表示为

$$E := \begin{cases} F(\mathbf{v}_c, \boldsymbol{\Omega}_c, \boldsymbol{\Lambda}_c, U_c) = 0 \\ H(\mathbf{v}_c, \boldsymbol{\Omega}_c, \boldsymbol{\Lambda}_c, U_c) = 0 \\ \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Lambda}_c = \boldsymbol{\Xi}(\boldsymbol{\Lambda}_c)\boldsymbol{\Omega}_c \\ \frac{d}{dt}\mathbf{p}_c = {}^d\mathbf{B}\mathbf{v}_c \end{cases} \quad (1)$$

其中  $F, H$  为光滑函数, 对应于随质心的平动和绕质心的转动方程;  $V$  为在体坐标系  $B(t)$  下表示的  $B(t)$  坐标原点相对于大地系  $B(d)$  的线速度;  $\Omega$  为在  $B(t)$  下表示的  $B(t)$  相对于  $B(d)$  的角速度;  $\Lambda$  为  $B(d)$  向  $B(t)$  转换的欧拉角, 其各分量为  $\{\gamma, \theta, \psi\}$ ;  $\Xi$  为欧拉角的变化率  $d\Lambda/dt$  与  $\Omega$  间的关系矩阵, 只与  $\Lambda$  有关;  $P$  为在  $B(d)$  下表示的  $B(t)$  坐标原点的位置;  ${}^d B$  为从  $B(t)$  到  $B(d)$  的坐标变换矩阵, 只与  $\Lambda$  有关;  $U$  为控制量; 下标  $c$  代表此量取平衡轨迹下的值。

对于翼伞系统而言, 其平衡轨迹有两种, 一种是斜直线, 一种是螺旋线, 分别对应于稳态的滑翔(无下偏或小量的双侧下偏  $\delta_a$ ) 和转弯运动(单侧下偏  $\delta_e$ )。而翼伞归航轨迹的规划充分利用了其自身的稳态特性, 轨迹由这两种平衡轨迹组成<sup>[11]</sup>。因此, 翼伞系统的航迹跟踪也就是对平衡轨迹的跟踪。翼伞系统归航控制的要求有: 1) 着陆偏差小; 2) 实现雀降着陆; 3) 实现逆风着陆。这些因素在航迹规划中都已经考虑了, 实现 path-following 就能够满足要求。由此可知, 翼伞系统的归航控制可以采用 Kammer<sup>[10]</sup> 的方法进行误差方程的处理。

## 2 误差运动方程的确定

Serret-Frenet 坐标系  $B(A)$  是用来描述点在连续可微三维空间曲线运动特性的。它的 3 个坐标轴分别反映的是曲线的切线、法线和副法线, 见图 1。由于坐标原点沿着轨线运动, 其自变量取为弧长  $s$ 。

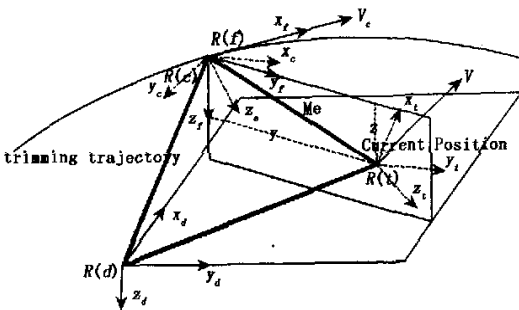


图 1 坐标系的定义

Fig. 1 Definition of Coordinates

定义  $V_e = V - V_c$ ,  $\Omega_e = \Omega - \Omega_c$ ,  $\Lambda_e = \Xi^{-1}(\Lambda - \Lambda_c)$ ,  $P_e = [s \ y \ z]^T$ , 其中  $y, z$  为平衡轨迹距翼伞当前位置的最短偏差在 Serret-Frenet 系下的分量表示, 见图 1 所示。

通过变换及小扰动线性化处理(推导方法见 Kammer<sup>[10]</sup>), 得到误差方程(2)。其中  $F_x = \partial F / \partial X$ ,  $X$  可指代  $V, \Omega, \Lambda, U, H_x$  的定义是类似的;  ${}^A B = {}^d B({}^d B |_c)$ , 是与偏航角  $\psi_c$  无关的量;  $\gamma_s$  为航迹倾斜角, 航迹向上升为正, 向下降为负;  $S(X)$  为反对称矩阵。

式(2)的各项系数都是时不变的, 整个方程组可以表示为  $\dot{X} = AX + BU$  的经典线性系统状态空间的形式, 见式(3)。控制量  $\delta U$  可以是  $\delta_e$  或  $\delta_a$ , 根据线性系统传递函数的求解方法, 可直接得到各偏差量与控制量之间的传递函数关系, 即:  $G_y = y(s)/\delta_e(s)$ ,  $G_z = z(s)/\delta_a(s)$ , 用于控制器的设计。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \delta V_e = F_V \delta V_e + F_\Omega \delta \Omega_e + F_\Lambda \Xi(\Lambda_c) \delta \Lambda_e + F_U \delta U \\ \frac{d}{dt} \delta \Omega_e = H_V \delta V_e + H_\Omega \delta \Omega_e + H_\Lambda \Xi(\Lambda_c) \delta \Lambda_e + H_U \delta U \\ \frac{d}{dt} \delta \Lambda_e = \delta \Omega_e - S(\Omega_e) \delta \Lambda_e \\ \frac{d}{dt} \delta P_e = |\dot{\psi}_c| \begin{bmatrix} 0 & \cos(\gamma_s) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\gamma_s) \\ 0 & \sin(\gamma_s) & 0 \end{bmatrix} \delta P_e + {}^A B \delta V_e - {}^A B S(V_c) \delta \Lambda_e \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \delta V_e \\ \frac{d}{dt} \delta \Omega_e \\ \frac{d}{dt} \delta \Lambda_e \\ \frac{d}{dt} \delta P_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_V & F_\Omega & F_\Lambda \Xi(\Lambda_c) & 0 \\ H_V & H_\Omega & H_\Lambda \Xi(\Lambda_c) & 0 \\ 0 & E & -S(\Omega_e) & 0 \\ {}^A B & 0 & -{}^A B S(V_c) & |\dot{\psi}_c| \begin{bmatrix} 0 & \cos(\gamma_s) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\gamma_s) \\ 0 & \sin(\gamma_s) & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta V_e \\ \delta \Omega_e \\ \delta \Lambda_e \\ \delta P_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_U \\ H_U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta U \quad (3)$$

### 3 控制器的设计

在不附加动力的情况下,翼伞的控制方式只有两种,单侧下偏  $\delta_e$  和双侧下偏  $\delta_a$ . 单侧下偏引起转弯运动,主要用于侧向偏差的修正. 当快速的进行双侧全下偏时,翼伞的水平速度先迅速减小而后增大,垂直速度也是先减小然后增大,如果选择整个系统动能最小的时候着陆就称为雀降. 雀降操纵只用于着陆,它实质上是一种“动力失速”. 而在不失速的情况下实施双侧下偏,可以在一定程度上增大系统的滑翔比<sup>[11]</sup>,实现纵向的调节. 但根据计算结果<sup>[11]</sup>也可看出,双侧下偏对滑翔比的影响并不是很大,在短距离上纵向调节的效果不明显. 而且,双侧下偏还会增大垂直速度,同时减小了单侧下偏的取值范围. 综上所述,在翼伞的归航控制中,主要由  $\delta_e$  来进行侧向的控制,只有在逆风对准后的着陆段采用  $\delta_a$  进行纵向控制.

由式(2)可知,翼伞系统的侧向和纵向运动是耦合的,当只采用  $\delta_e$  进行轨迹控制时,无法实现同时的侧向和纵向跟踪,因此,在此  $\delta_e$  只用于进行侧向的跟踪,消除侧向偏差  $y$ ,纵向的偏差在最后的着陆段视情况进行修正. 对于侧向控制通道的轨迹控制器的结构如图 2 所示. 控制器设计采用最简单的 PD 控制,在保证稳定性的前提下通过调节参数  $k_y, k_{\dot{y}}$  来实现对偏差的快速响应.

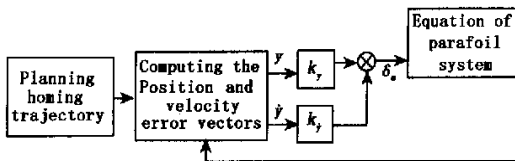


图 2 侧向通道轨迹控制器的结构示意图

Fig. 2 Structure of lateral channel tracking controller

### 4 偏差的解析求解

对于控制器的输入量——距离偏差和速度偏差,若采用优化的方法数值求解,计算量大,编程复杂. 在此参考 Kaminer<sup>[12]</sup> 的方法,给出了解的近似解法,极大缩减了计算量.

#### 4.1 确定当前飞行位置在平衡轨迹上的投影点

对于滑翔段可以得到精确的解析解

$$s^* = [\cos(\gamma_s)\cos(\psi_0) \quad \cos(\gamma_s)\sin(\psi_0) \quad -\sin(\gamma_s)] \times (P - P_0) + s_0 \quad (4)$$

对于转弯段得到的是近似的解析解

已知: 螺旋线圆心坐标  $P_1 = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T$ , 起始点的方向角(与  $+x$  轴向的夹角)  $\psi_f$ , 转弯半径  $r$ , 当前位置  $P_t = [x_t \ y_t \ z_t]^T$ .

当前位置在螺旋线所呈圆柱上的投影点

$$P_{proj} = \begin{bmatrix} x_{proj} \\ y_{proj} \\ z_{proj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + r(x_t - x_1) / \sqrt{(x_t - x_1)^2 + (y_t - y_1)^2} \\ y_1 + r(y_t - y_1) / \sqrt{(x_t - x_1)^2 + (y_t - y_1)^2} \\ z_t \end{bmatrix} \quad (5)$$

$P_{proj}$  的方向角

$$\chi = \begin{cases} \cos^{-1}(x_{proj} - x_1 / r) & y_{proj} - y_1 \geq 0 \\ 2\pi - \cos^{-1}(x_{proj} - x_1 / r) & y_{proj} - y_1 < 0 \end{cases}$$

由起始点所对应的圆柱的母线为分界,沿着转弯的方向将圆柱展开为二维,如图 3 所示,则由起始轴线到  $P_{proj}$  点所对应的纵轴线的距离为

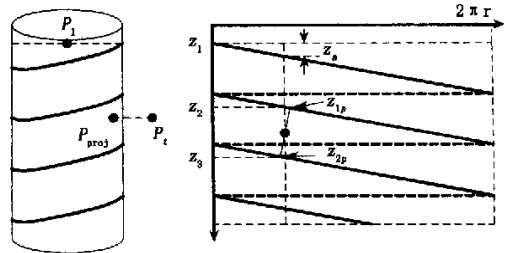


图 3 圆柱二维展开的几何关系图

Fig. 3 Graphical representation of column outspread to plane

$$z_a = -\text{mod}(\text{sign}(\dot{\psi}_c)(\chi - \psi_f) + 2\pi, 2\pi) \times r \times \text{tg}(\gamma_s) \quad (6)$$

$$\begin{cases} z_1 = z_{proj} - (\text{mod}(|z_{proj} - z_1 - z_a|, |2\pi r \text{tg}(\gamma_s)|)) \\ z_{1_p} = z_{proj} - |z_1 - z_{proj}| \cos^2(\gamma_s) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} z_2 = z_1 - 2\pi r \text{tg}(\gamma_s) \\ z_{2_p} = z_{proj} + |z_{proj} - z_2| \cos^2 \gamma_s \end{cases} \quad (7)$$

$$z_p = \begin{cases} z_{1_p} & |z_{1_p} - z_{proj}| < |z_{2_p} - z_{proj}| \\ z_{2_p} & \text{其它} \end{cases} \quad (8)$$

$$s^* = \frac{z_1 - z_p}{\sin(\gamma_s)} + s_1 \tag{9}$$

### 4.2 偏差的计算

$$\begin{cases} P_e = \hat{A}B(P_e(s^*) - P) \doteq [0 \ y \ z]^T \\ \dot{P}_e = \hat{A}B(\dot{P})_c(s^*) - V - S(\hat{\Omega})P_e \end{cases}$$

其中

$$\hat{\Omega} = [-\dot{\psi}_c \sin \gamma_s \ 0 \ \dot{\psi}_c \cos \gamma_s]^T \tag{10}$$

## 5 仿真结果

初始条件:1)从翼伞完全展开点到雀降实施点之间进行归航轨迹的规划;2)假设初始存在小量的轨迹偏差,偏差量为[20 30 10];

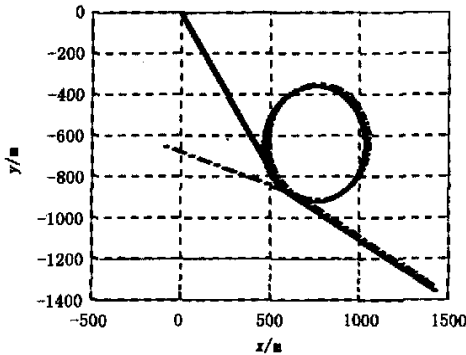
控制策略:仅采用侧向控制.

控制器:

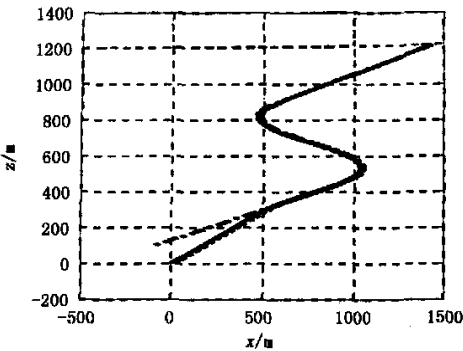
转弯段(侧向控制) $0.0275(S + 0.117)$ ,

滑翔段(侧向控制) $0.159(S + 0.125)$ .

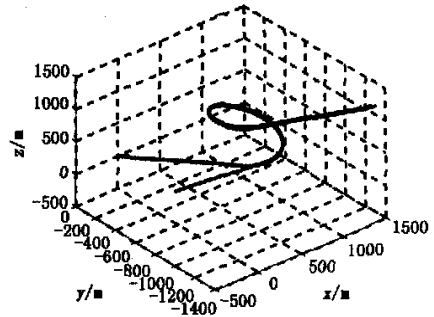
曲线说明:标准轨迹就是规划的归航轨迹<sup>[11]</sup>;开环控制轨迹指根据规划航迹中的控制量进行开环控制时得到的归航轨迹;闭环控制轨迹指用设计的控制器跟踪标准轨迹所得到的归航轨迹.



(a)俯视图  
(a)planeform

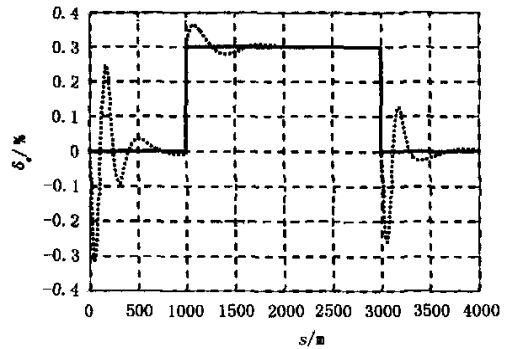


(b)侧视图  
(b)sideview



(c)三维视图

(c)tridimensional view



(d)控制曲线图

(d)curve of control

— 标准轨迹

----- 闭环控制轨迹

- · - 开环控制轨迹

图4 仿真结果图

Fig.4 Graph of Simulation Results

— planning trajectory

----- colsed loop control trajectory

- · - open loop control trajectory

### 结果分析:

a)由图4的(a,b)可知,开环控制的轨迹实施雀降位置在[-89 -652 101]m,偏离目标点666 m;而闭环控制的轨迹实施雀降位置在[16 -25 -1]m,偏离目标点30 m.

b)由图4的(d)可知,在整个控制过程中,控制量的波动主要发生在初始的偏差部分和分段归航中操纵量变换的起始部分.初始的偏差可能由各种干扰因素引起,而分段归航的各段之间的转换会引起翼伞系统的非平衡运动,这些也是导致开环控制轨迹偏差的主要原因.

c)由图4的(c)还可看出,轨迹跟踪过程,转弯

段的控制比较容易实现,控制偏差小。而滑翔段控制的初始偏差比较大,并且总是存在波动。因此,为便于控制,在轨迹规划中可以尽量减小滑翔段的距离。

## 6 结论

本文详细推导了基于 path-following 的思想,采用 Serret-Frenet 坐标系表示距离偏差的全套翼伞系统的误差运动方程和偏差计算的公式,给出了直接进行轨迹偏差控制的翼伞系统控制器设计的全过程。仿真算例表明,此套控制器设计方法适合于翼伞系统轨迹跟踪控制。

对于控制器的改进,以及风的影响的考虑将另文叙述。

## 参 考 文 献

- Goodrick TF, Pearson A, et al. Analysis of various automatic homing techniques for gliding airdrip systems with comparative performance in adverse winds. *AIAA-73-0462*, 1973
- Yili L, Huabao L. Theoretical investigation of gliding parachute trajectory with deadband and non-proportional automatic homing control. *AIAA-91-0834*, 1991
- 张明廉. 飞行控制系统. 北京:国防工业出版社, 1984. (Zhang Minglian. Flight control system. Beijing: Publishing House of Industry in National Defence, 1984(in chinese))
- 文传源. 现代飞行控制系统. 北京:北京航空航天大学出版社, 1992 (Wen Chuanyuan. Modern flight control system. Beijing: Publishing House of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1992(in chinese))
- Gockel W. Concept studies of an autonomous GNC system for gliding parachute. *AIAA-97-1465*, 1997
- Pollini L, Giulietti F, et al. Modeling, simulation and control of a wing parafoil for atmosphere to ground flight. *AIAA 2002-4789*, 2002
- Tsai H i B. Analytical and experimental study of a recovery guidance system using vortex lattice method, output regulator and proportional navigation guidance. Ames: Iowa State University, 1999
- Do KD, Pan J. Robust and adaptive path following for underactuated autonomous underwater vehicles. *Proceedings of The 2003 American Control Conference*, 2003. 1994-1999
- Aguiar AP, Dacic DB, et al. Path-following or reference-tracking? *5th IFAC/EURON Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles*. Lisbon, Portugal, 2004
- Kaminer I, Pascoal A, et al. Trajectory tracking for autonomous vehicles: an integrated approach to guidance and control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, 21(1): 29~38
- 熊菁, 秦子增, 等. 翼伞系统分段归航轨迹的优化设计. *航天返回与遥感*, 2004, 25(3): 11~16 (Xiong Jing, Qin Zizeng, Chen Wenke, Wen Hongwu. Optimal design in multiphase trajectory of parafoil system. *Spacecraft recovery & remote sensing*, 2004, 25(3): 11~16(in chinese))
- Kaminer I, Yakimenko OA. Development of control algorithm for the autonomous gliding delivery system. *AIAA 2003-2116*, 2003

## PATH-FOLLOWING OF PARAFOL SYSTEM BASED ON SERRET-FRENET

Xiong Jing Chen Wenke Qin Zizeng

(College of Aerospace and Material Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract** Based on the characters of parafoil homing trajectory, Serret-Frenet frame was used to describe the shortest distance from the current position to the trimming trajectory. Then, using the theory of small disturbance linearization, it showed that the error equations were time invariant. The transform function between the control and the position error could be found from those error equations, and could be used to design the trajectory controller directly. The position errors and velocity errors which are inputs to the trajectory controller could be solved by analytical method, which greatly simplify computation. The effectiveness was testified by the result of example.

**Key words** path-following, parafoil, trimming trajectory, Serret-Frenet frame, PD controller, lateral control