

减小临界振幅的机理与试验研究*

王士敏 王琪 徐平
(北京航空航天大学理学院,北京 100083)

摘要 对于受迫振动系统,当激励频率增加并且通过共振(临界)频率时,系统的振幅将达到其峰值.通过相位调制可以有效地减小共振振幅,其机理是振幅的变化取决于相应和激励之间的相位差,而此相位差可以通过控制激励频率的变化规律进行调制.该方法由受变频率脉冲激励的悬臂梁进行了实验验证.实验结果表明,对于给定的最大频率增加速率,通过相位调制可以将共振振幅减小18%左右.

关键词 相位调制,共振,临界频率

引言

对于变频率激励的受迫振动系统,例如,机器的启动或停车过程,如果系统的工作频率高于共振频率,系统通过其共振或临界频率时,将不可避免地出现共振,此时振幅达到最大.较大的振幅往往是有害的^[1,2,5].对于一些旋转机械,为了避免转子与定子之间的碰撞与摩擦,需要加大转子与顶子之间的间隙.而大的间隙有时会降低机器的工作效率.因此,如何有效地减小或控制共振时的最大振幅在机器的设计和实际应用中为有关研究人员广泛关注.

在工业实践中,为了避免较大的共振振幅,通常是以较大的速率增加激励频率(或转速),即快速地通过临界频率^[3].这一措施要求驱动系统有足够的功率,并且共振振幅仍然会出现.因此,就提出了这样一个问题:对于给定的激励频率的最大增加速率,能否进一步减小系统的共振振幅?针对转子系统,Millsaps^[4]首先提出了加速度规划方法(acceleration scheduling method):首先以一个较大的速率增加激励频率,当激励频率到达某特定大小时,再以一个较小的速率继续增加激励频率.这一做法是依据振动响应的幅频特性提出的,由于没有考虑到相应的相频特性,因此这一做法并不能起到减小最大振幅的作用;但是为我们前面的工作提供了思路,从而提出了相位调制方法^[7,8].这里将相位调制方法推广到一般的变频率强迫振动系统,并对该方法的机理进行了分析.最后,通过受变频率

脉冲激励的悬臂梁模型进行了实验验证.

1 模型与问题

考虑如图1所示的二自由度振动系统模型:振子的质量为 m ;弹簧的刚度系数分别为 k_1, k_2 ,原始长度分别为 l_1, l_2 ;两个方向的阻尼系数均为 c .外激励力的大小为常值,相位角为 φ .在水平或铅垂方向,外激励力变化的频率为 $\dot{\varphi}$;而频率的变化率则为相位角的加速度 $\ddot{\varphi}(t)$.

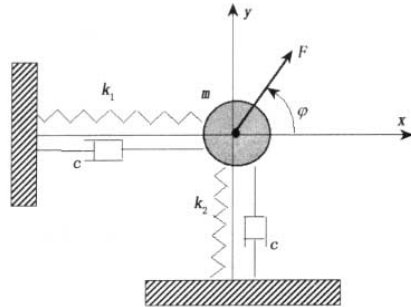


图1 二自由度受迫振动模型

Fig.1 Two degrees of freedom forced vibration system

系统的运动方程为

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + \frac{\partial P}{\partial x} &= F \cos \psi \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + \frac{\partial P}{\partial y} &= F \sin \psi \end{aligned} \quad (1)$$

其中 P 表示弹簧的势能,考虑两方向的耦合时,可表示为

$$P = \frac{k_1}{2} [x_2 + 2l_1x + y^2 - 2l_1\sqrt{(x+l_1)^2 + y^2}] +$$

2005-04-06 收到第1稿,2005-04-15 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10272008)

$$\frac{k_2}{2} [x_2 + 2l_2x + x^2 - 2l_2\sqrt{(y+l_2)^2 + x^2}]$$

通常情况下,增加激励频率的速率 $\dot{\varphi}(t)$ 越大,通过共振频率时的峰值振幅越小.实际工程中,激励频率增加的最大速率往往受到驱动装置功率的限制,此时,减小临界或共振振幅的问题可叙述为:对于给定的激励力幅值 F ,找出激励力相位角的变化规律 ψ ,在满足条件 $\dot{\psi} \leq A$ 的同时,使得激励频率 $\dot{\psi}$ 通过共振频率时振子的振幅为最小.为此,下面首先分析一下激励力的相位对振幅的影响.

2 振动能量、振幅与相位差的关系

为了表示激励相位和响应相位之间的关系,利用振子的动能 $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$,将响应的相位定义为振动速度矢量和水平方向的夹角 ρ ,即

$$\dot{x} = \sqrt{2T/m} \cos \rho, \dot{y} = \sqrt{2T/m} \sin \rho \quad (2)$$

由系统所具有的机械能

$$V = P + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

求出机械能随时间的变化率

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + m\ddot{x}\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + m\ddot{y}\right)\dot{y} \quad (3)$$

考虑到方程(1),公式(3)可以改写成

$$\dot{V} = \dot{x}(F \cos \psi - c\dot{x}) + \dot{y}(F \sin \psi - c\dot{y}) \quad (4)$$

再将关系式(2)代入(4)可得到

$$\dot{V} = \sqrt{2T/m} [F \cos(\rho - \psi) - c\sqrt{2T/m}] \quad (5)$$

由上式可以看出,系统振动能量的增减完全取决于响应和激励之间的相位差: $\beta = \rho - \psi$. 并且可以得出结论:当 $\cos(\rho - \psi) < 0$ 时振动能量,从而振幅一定时减小的;只有当 $\cos(\rho - \psi) > 0$ 时振幅才可能增加.

对于单自由度情况,运动方程(1)退化为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x = F \cos \psi$$

为了突出相位差的影响和表示上的方便,将上式写成无量纲形式

$$x'' + 2\delta x' + x = \tilde{F} \cos \psi \quad (6)$$

其中 $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $\tau = \omega t$, $2\delta = \frac{c}{m\omega}$, $\tilde{F} = \frac{F}{m\omega^2}$, “/” 表示对 τ 的导数. 利用系统的无量纲振动总能量

$$V = \frac{1}{2}(x'^2 + x^2) = \frac{1}{2}B^2$$

将系统的振动响应形式上表示为

$$x = B \sin \alpha, x' = B \cos \alpha \quad (7)$$

其中 α 为响应的相位角. 利用

$$V' = BB' \quad (8)$$

以及方程(6)和关系式(7)可导出

$$B' + 2\delta \cos^2 \alpha B = F \cos \alpha \cos \psi \quad (9)$$

为了说明激励与响应之间的相位差 $\alpha - \psi$ 对振幅的影响,我们将方程(9)改写为

$$B' + 2\delta \cos^2 \alpha B = \frac{1}{2}\tilde{F}[\cos(\alpha + \psi) + \cos(\alpha - \psi)] \quad (10)$$

当激励频率接近共振频率时激励与响应几乎同步,因此,相位差 $\alpha - \psi$ 为慢变量而 $\alpha + \psi$ 为快变量. 由此,仍然可以断定当 $|\alpha - \psi| \leq \pi/2$ 振幅趋于增加;考虑到阻尼的作用,当 $|\alpha - \psi| > \pi/2$ 时振幅一定减小. 即,相位差主导着振幅的变化趋势. 为了说明这个结果,选取 $\delta = 0.01$, $\tilde{F} = 0.5$, $\psi = 0.005\tau^2$; 先数值积分方程(6),再利用关系式(7)对方程(10)数值求解. 考虑和略去快变分量

$\frac{1}{2}\tilde{F} \cos(\alpha + \psi)$ 的结果如图2所示.

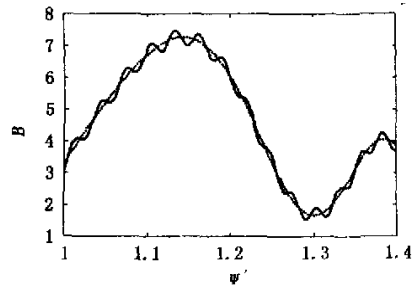


图2 相位差的快、慢变量对振幅的影响
实线表示方程(10)的数值解,虚线为略去快变量
 $\frac{1}{2}\tilde{F} \cos(\alpha + \psi)$ 时的数值解

Fig. 2 Affects of fast and slowly varied parts
in phase difference on vibration amplitude

The numerical solution of Eq. (10); solid and dot line are corresponded to with and without fast varied excitement

$\frac{1}{2}\tilde{F} \cos(\alpha + \psi)$, respectively

因此,通过调整响应和激励之间的相位差,有可能使得振动系统在通过临界频率的过程中从驱动装置吸收较少的能量,从而减小其振动振幅.

3 相位差与激励频率变化的联系

3.1 激励频率单调增加时的相位差

当激励频率单调增加时,相位差也是单调变化的,为了说明相位差随激励频率的变化规律,对于给定激励相位 $\psi = \frac{1}{2}A\tau^2$,先数值求解方程(6),再由关系式(7)解出响应的相位,以及相位差 $\alpha - \psi$.

为了与振幅的增减变化相对应,我们用相位差的正弦 $\sin(\alpha - \psi)$ 来描述其变化规律.图3为 $\bar{F} = 1, \delta = 0.01, A = 0.01$ 时的一个算例.

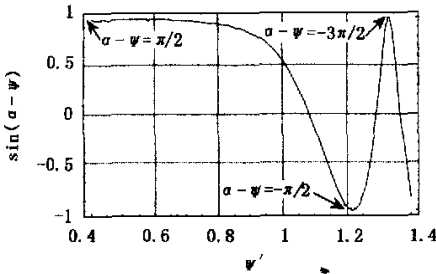


图3 响应与激励之间的相位差随激励频率的变化
 ψ' 为无量纲激励频率

Fig.3 Phase difference for constant increased frequency
 ψ' is dimensionless excitement frequency

从图3中可以看出,在到达临界频率 $\psi' \cong 1.2$ 以前,响应与激励的相位差 $\beta = \rho - \varphi$ 由 $\pi/2$ 减小到 $-\pi/2$,当相位差趋紧于 $-\pi/2$ 时振幅达到最大;伴随相位差由 $-\pi/2$ 减小到 $-3\pi/2$,振幅不断减小并在 $-3\pi/2$ 附近达到最小.若激励频率继续增加,振幅则进入下一个增减周期.振幅的变化如图4所示.这一振动特性表明,对于单调增加的激励频率,振幅在通过临界频率以前也必将是趋于增加的.

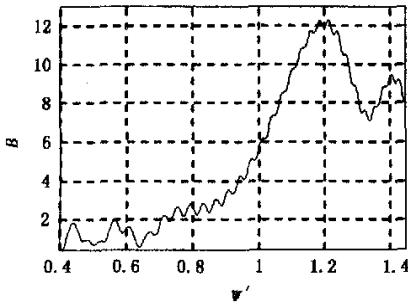


图4 振幅随激励频率的变化
 ψ' 为无量纲激励频率

Fig.4 Phase difference for constant increased frequency
 ψ' is dimensionless excitement frequency

3.2 激励频率往复变化时相位差的变化规律

相位调制方法指的是当激励频率增加到一定大小时,先以一个较小的速率减小激励频率,使得相应与激励的相位差得以调制.当相位差调整到振幅减小的状态时,再次以先前的速率增加激励频率.由于振幅的增减仅取决于响应与激励的相位差,当激励频率再次增加时,振幅将持续减小一段时间,然后开始增加.由于此时的激励频率已经接近共振频率,使得系统通过临界频率的过程变短,

共振振幅也将明显地减小.相位调制方法的有效性可以由方程(6)的数值解加以验证.

取参数 $\delta = 0.01, \bar{F} = 1$;以及初始条件 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$.频率单调增加工况:以 $\varphi = 0.005\tau^2$ 改变激励力的相位,相应的激励频率变化规律为 $\dot{\varphi} = 0.01\tau$,即激励频率以常速率 $A = 0.01$ 增加.

相位调制可以按以下规律改变激励力的相位

$$\dot{\varphi}(\tau) = \begin{cases} 0.01\tau & 0 \leq \tau \leq 93.5 \\ -0.001(\tau - 93.5) + 0.935 & 93.5 < \tau \leq 143.5 \\ 0.01(\tau - 143.5) + 0.885 & 143.5 < \tau \end{cases}$$

即先以速率 $A = 0.01$ 增加激励频率到 0.935,然后以速率 0.001 减小激励频率到 0.885,最后再以速率 $A = 0.01$ 增加激励频率通过临界频率.

由于在 $\tau = 93.5$ 和 $\tau = 143.5$ 要切换激励力相位变化规律,此时要注意保持振动位移 x 、振动速度 \dot{x} 、激励力相位角 φ 和激励频率 $\dot{\varphi}$ 的连续性.当 $\tau = 93.5$ 时:

$$x = 2.5886, \dot{x} = 2.8774, \psi = 43.7133, \dot{\varphi} = 0.935$$

在第二次切换时, $\tau = 143.5$:

$$x = -1.1587, \dot{x} = -3.9931, \psi = 88.495, \dot{\varphi} = 0.885$$

两种工况对比,最大振幅可以减小 20% 左右,如图5所示.

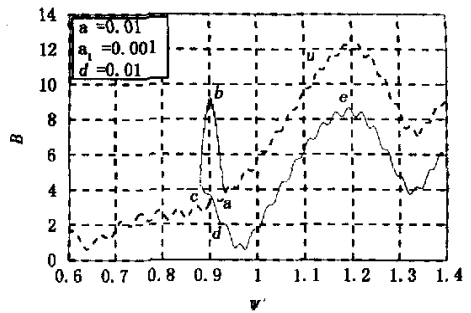


图5 相位调制前后振幅对比

虚线为激励频率单调增加时的振幅;

实线为经过相位调制的振幅

Fig.5 Comparison of vibration amplitudes with and without phase modulation
Modulated amplitude (solid line), and un-modulated one (dotted line)

4 实验验证

将尺寸为 $267 \text{ mm} \times 23 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ 的钢板的一端夹持在台钳上,构成悬臂梁.在自由端粘上一块纽扣状磁铁,用 15 V 继电器的电磁线圈产生一个作用在纽扣磁铁上的电磁力.见图6.

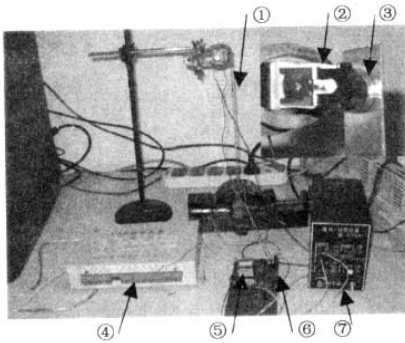


图 6 实验装置

- ① 薄钢板 ② 励磁线圈 ③ 纽扣状磁铁 ④ USB 数据采集器
- ⑤ 固态继电器 ⑥ 电桥放大电路 ⑦ 直流电源

Fig.6 Experimental facility

- ① steel sheet ② magnetic coil ③ button magnet ④ USB A/D converter
- ⑤ solid state relay ⑥ amplifier circuit ⑦ DC powers

电磁力变化的频率由计算机控制,激励信号的相位由 $p = \cos[2\pi(\frac{1}{2}at^2 + f_0t + \varphi_0)]$ 产生.控制信号通过 USB 数/模转换接口输出.悬臂梁的振动位移由一组全桥应变片测出,并通过 USB 数据采集器的模/数转换接口送入计算机处理.

悬臂梁的第一阶固有频率和阻尼系数由衰减法测出,分别为 13.2 Hz 和 0.2011 kg/s.其第一阶模态的振动方程可以由方程(6)表示.频率单调增加的工况由 $a = 6, f_0 = 0, \varphi_0 = 0$ 产生并持续 3 s. $a = 6$ 等价于无量纲相位角加速度 $A = 0.0055$.测得的振动信号如图 7 所示.

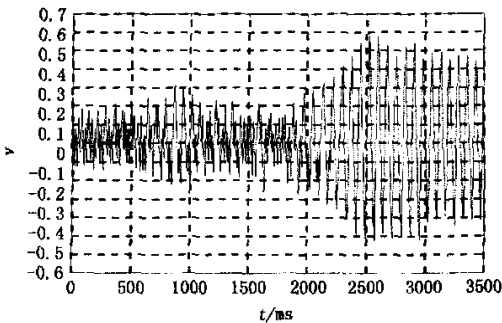


图 7 激励频率恒定增加时,悬臂梁根部的应变信号

Fig.7 Voltage signal of strain gauges for constant increased pulse rate

相位调制工况,以 $a = 6, f_0 = 0, \varphi_0 = 0$ 为参数,持续 2.05 s 后激励频率增加到 12.3. 然后以 $a = -1, f_0 = 12.3, \varphi_0 = 12.6075$ 为参数持续 0.7 s,将激励频率减小到 11.6.紧接着以 $a = 6, f_0 =$

11.6 和 $\varphi_0 = 20.9725$ 为参数持续 1 s 增加激励频率并通过临界频率.测得的振动信号如图 8 所示,最大振幅减小 18 % 左右.由于仅需要比较两种工况的振幅的比值,没有对振动位移进行标定.

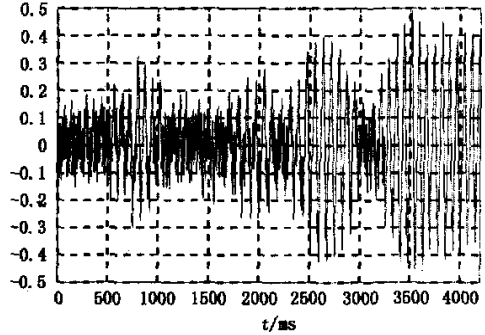


图 8 经过相位调制后,悬臂梁根部的应变信号

Fig.8 Voltage signal of strain gauges with phase modulation

为了与实验结果对照,这里以 $\tilde{F} = 0.2 \times 6^2/(x-6)^2$ 模拟电磁力的大小,无量纲阻尼系数为 $\delta = 0.0074$.激励频率的变化为 $\dot{\psi} = 0.0055\tau$.根据以上参数对方程(6)进行了数值积分,结果如图 9,图 10 所示.

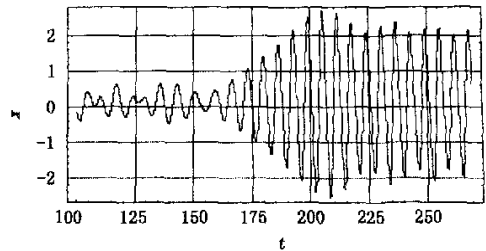


图 9 激励频率恒定增加,悬臂梁自由端的一阶振幅

Fig.9 Free-end vibration amplitude of first modal for constant increased pulse rate

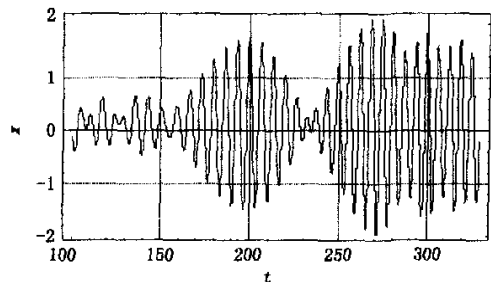


图 10 进行相位调制后,悬臂梁自由端的一阶振幅

Fig.10 Free-end vibration amplitude of first modal after phase modulation

5 结论

相位调制方法对减小临界振幅的有效性通过悬臂梁受迫振动进行了验证. 对于其它可以由方程(1)或(6)来刻画的实际振动系统, 实际上这是一类非常广泛的振动系统^[6], 该方法同样有效. 从方程(5)和(10)可以看出, 响应与激励的相位差决定了振幅的增减趋势. 阻尼对最大振幅出现的位置, 即振动能量变化率为零的位置有影响. 相位调制是通过改变激励频率的增加规律去调整相位差, 这一过程对于不同的振幅峰值位置均可进行, 因此适用于不同的阻尼系数. 但是, 由于振幅峰值出现的位置对加速度切换点的选取有影响, 在实施相位调制时应当考虑阻尼的大小. 分析与实验过程表明, 相位调制方法的方案, 根据实际系统的临界频率、增加激励频率的最大允许速率以及振动阻尼便可以确定, 如果可以应用于实际工程问题, 将会是一种简单、经济的减振方法.

参 考 文 献

1 Choy FK, Padovan J. Nonlinear transient analysis of rotor-

casing rub events. *J Sound and Vibration*, 1987, 113: 529~545

2 Li GX, Paidoussis MP. Impact phenomena of rotor-casing dynamical systems. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 5: 53~70

3 Fearn RL, Millsaps KT. Constant acceleration of an undamped simple vibrator through resonance. *J of Royal Aero Soc*, 1967, 8: 567~573

4 Millsaps KT, Reed GL. Reducing lateral vibrations of a rotor passing through critical speeds by acceleration scheduling. *ASME J of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1998, 120: 615~620

5 Yanabe S, Kanneko S, Shibata N. Rotor vibration due to collision with annular guard during passage through critical speed. *ASME J Vibration and Acoustics*, 1998, 120: 549~554

6 Markert R, Seidler M. Analytically based estimation of the maximum amplitude during passage through resonance. *International J of Solids and Structures*, 2001, 38: 1975~1992

7 Wang SM, Lu QS, Twizell EH. Reducing lateral vibrations of a rotor passing through critical speeds by phase modulating. *ASME J of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2003, 125: 766~771

EXPERIMENT VERIFICATION FOR REDUCING THE VIBRATION AMPLITUDE AT RESONANCE*

Wang Shimin Wang Qi Xu Ping

(Science School, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract A forced vibration system will approach its maximum vibration amplitude at resonance, if the resonant frequency has to be passed. This peak amplitude can be reduced by means of phase modulation technique, whose mechanism is that the increase/decrease of vibration amplitude is closely related to the phase difference between the response and excitement, and the phase difference can be modulated by controlling the course of excitement frequency. Experimental verification was conducted with a cantilever beam subjected to pulses excitement. For the given maximum rate of increasing the excitement frequency, the maximum vibration amplitude of the cantilever was reduced about 18 % with phase modulating during the passage of the first resonant frequency.

Key words phase modulation, resonance, critical frequency

Received 06 April 2005, revised 15 April 2005.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10272008)