

色关联的色噪声驱动的双稳杜芬模型的稳态分析*

靳艳飞 徐伟 李伟 马少娟

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

摘要 研究了由色关联的色噪声驱动的双稳杜芬模型的稳态概率密度函数及状态变量的均值和标准方差. 首先应用一致有色噪声近似方法, 推导出了具有色关联的色噪声驱动的双稳杜芬模型的稳态概率密度函数的解析表达式. 分析了噪声的“有色性”及关联性对稳态密度函数和状态变量的均值、标准方差的影响, 发现了一些由白噪声激励的杜芬模型中不会出现的新的非线性现象: 加性噪声强度、噪声之间的关联系数和关联时间都能够诱导非平衡相变.

关键词 双稳杜芬模型, 稳态概率密度函数, 色噪声, 均值, 标准方差

引言

白噪声只是一种理想情况, 所以在一些实际模型中, 必须采用色噪声才能准确表现系统的性质, 例如: 单模染料激光输出的实验研究表明, 只有引用含色泵噪声的激光模型, 才能正确描述染料激光的统计性质. 因此, 近年来色噪声驱动的非线性系统引起了人们的广泛关注^[1-12]. P. Jung 等^[3]对乘性色噪声驱动的双稳模型进行了研究并推导出了一致有色噪声近似 (UCNA). 利用 UCNA 和 Novikov 定理, 曹力等^[5,6]推导出了由相关色噪声驱动的双稳系统的稳态概率密度的表达式. 贾亚^[7,8]研究了色相关白噪声驱动的双稳系统的稳态性质和随机共振. 罗晓琴等^[9]讨论了由两种不同色噪声驱动的双稳系统的随机共振现象. 梁贵云等^[10,11]对色关联的色噪声驱动的单模激光线性模型进行了研究, 分析了其稳态性质. 由于色噪声的有限关联时间使朗之万方程中包含着对历史的记忆, 所以这一过程是非马尔可夫的, 没有精确的 Fokker-Planck 方程, 所以该模型要比由白噪声驱动的非线性模型复杂得多. 因此分析色噪声及其色关联对双稳杜芬系统影响的文章甚少.

本文研究了具有不同关联时间 $\tau_i (i = 1, 2, 3)$ 的色相关的色噪声驱动的双稳杜芬模型. 当相关时间 $\tau_i (i = 1, 2, 3) \rightarrow 0$ 时, 退化为文献^[4~9]研究的模型. 根据 UCNA 和 Novikov 定理, 推导出了稳

态概率密度的解析表达式, 讨论了噪声对杜芬模型的稳态性质和状态变量的均值、标准方差的影响, 发现了一些新的非线性现象.

1 双稳杜芬系统的稳态概率密度函数

受色关联的乘性和加性有色噪声激励的双稳杜芬模型可由下列微分方程表出

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 + x\xi(t) + \eta(t) \quad (1)$$

其中 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是具有零均值和非零自相关时间 τ_1, τ_2 的色噪声. 其统计性质为

$$\langle \eta(t) \rangle = \langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (2a)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t_1) \rangle = \frac{D}{\tau_1} \exp\left[-\frac{1}{\tau_1} |t - t_1|\right],$$

$$\langle \eta(t)\eta(t_1) \rangle = \frac{\alpha}{\tau_2} \exp\left[-\frac{1}{\tau_2} |t - t_1|\right] \quad (2b)$$

$$\langle \xi(t)\eta(t_1) \rangle = \langle \eta(t)\xi(t_1) \rangle =$$

$$\frac{\lambda\sqrt{\alpha D}}{\tau_3} \exp\left[-\frac{1}{\tau_3} |t - t_1|\right] \quad (2c)$$

这里 D 和 α 分别为乘性噪声强度和加性噪声强度, λ 为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间的关联系数, τ_3 为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 之间的互关联时间.

由(1)式可得: 势函数 $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$, 具有两个稳定点 $x_{s1} = -1, x_{s2} = 1$ 和一个不稳定点 $x_u = 0$. 根据 Novikov 定理和一致有色噪声近似 (UCNA), 相应的 FPK 方程为

2005-01-08 收到第1稿, 2005-03-06 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(1047209, 10332030)和陕西自然科学基金资助项目(2003A03).

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}A(x)P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x)P(x,t) \quad (3)$$

其中

$$A(x) = x - x^3 + \frac{1}{2}B'(x),$$

$$B(x) = \frac{Dx^2}{1+2\tau_1} + \frac{2\lambda\sqrt{Da}}{1+2\tau_3}x + \frac{\alpha}{1+2\tau_2} \quad (4)$$

$P(x,t)$ 表示状态变量 x 的概率密度函数, “ ∂ ” 表示对 x 的微分.

根据方程(3) ~ (4), 稳态概率密度函数为

当 $\frac{\lambda^2(1+2\tau_1)(1+2\tau_2)}{(1+2\tau_3)^2} > 1$ 时,

$$P_{st}(x) = N(B(x))^{\beta-1/2} \times \exp\left\{-\alpha x^2 + 4a\gamma x + 5a\gamma^2 - \frac{(\gamma - \gamma^3 - 6\gamma\mu\alpha)}{2\sqrt{-\mu/2a}} \times \ln \frac{\mu + (x + \gamma)\sqrt{-\mu/2a}}{\mu - (x + \gamma)\sqrt{-\mu/2a}}\right\} \quad (5)$$

当 $\frac{\lambda^2(1+2\tau_1)(1+2\tau_2)}{(1+2\tau_3)^2} < 1$ 时,

$$P_{st}(x) = N(B(x))^{\beta-1/2} \times \exp\left\{-\alpha x^2 + 4a\gamma x + 5a\gamma^2 - \frac{(\gamma - \gamma^3 - 6\gamma\mu\alpha)}{2\sqrt{-\mu/2a}} \times \tan^{-1}\left[\frac{(x + \gamma)\sqrt{1/2a\mu}}{\mu}\right]\right\} \quad (6)$$

其中 N 为归一化常数, 并且

$$\alpha = \frac{1+2\tau_1}{2D}, \gamma = \frac{\lambda\sqrt{Da}(1+2\tau_1)}{D(1+2\tau_3)},$$

$$\mu = \frac{\alpha}{1+2\tau_2} \left[1 - \frac{\lambda^2(1+2\tau_1)(1+2\tau_2)}{(1+2\tau_3)^2} \right],$$

$$\beta = a(1 - 3\gamma^2 + 2a\mu)$$

同时, 状态变量 x 的均值和标准方差为

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x P_{st}(x) dx \quad (7)$$

$$\lambda_2(0) = \frac{\langle x - \langle x \rangle \rangle^2}{\langle x \rangle^2} = \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle x \rangle^2} - 1 \quad (8)$$

2 噪声对稳态概率密度函数的影响

根据式(5) ~ 式(8), 讨论噪声对稳态概率密度函数及均值和标准方差的影响.

2.1 关联系数对稳态概率密度的影响

图1给出了稳态概率密度函数 $P_{st}(x)$ 随不同的关联系数 λ 变化的曲线. 由图1可以看出, 当 $\lambda = 0$ 时, $P_{st}(x)$ 具有对称的双峰结构. 当 $\lambda \neq 0$ 时, $P_{st}(x)$

的对称结构被破坏, 即: 当噪声之间具有正关联时, 随着 λ 的逐渐增大, 左边的峰逐渐增高, 右边的峰逐渐降低; 当噪声之间具有负关联时, 随着 $|\lambda|$ 的逐渐增大, 右边的峰逐渐增高, 左边的峰逐渐降低. 当 $\lambda = -1$ 时, 左边的峰完全消失, 右边的峰增加到最大; 当 $\lambda = 1$ 时, 右边的峰完全消失, 左边的峰增加到最大. 所以当 $\lambda, \tau_i (i = 1, 2, 3)$ 均非零时, 稳态概率密度曲线由双峰结构变成单峰结构, 噪声之间的相关系数 λ 能够诱导非平衡相变产生.

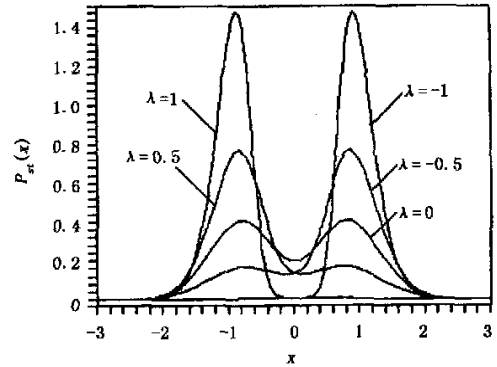


图1 稳态概率密度函数 $P_{st}(x)$ 随噪声关联系数 λ 变化的曲线

$D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$

Fig.1 The stationary probability distribution $P_{st}(x)$ with different λ

$D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$

2.2 噪声强度对稳态概率密度的影响

在图2和图3中, 固定关联系数 $\lambda = 1$. 图2中, 随着乘性噪声强度 D 的增加, 稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 的峰由 $x = -1$ 的位置转移到大约 $x = -0.4$ 的位置, 同时 $P_{st}(x)$ 曲线的宽度加宽但高度降低. 稳态概率密度曲线仍为单峰结构, 即乘性噪声强度不能诱导非平衡相变.

图3中, 随着加性噪声强度 α 的增加, 稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 左边峰的高度减小, 右边峰的高度增加. 当加性噪声强度 $\alpha = 0.1$ 时, $P_{st}(x)$ 具有单峰结构; 当 $\alpha = 1.2$ 时, $P_{st}(x)$ 呈双峰结构. 显然, 当关联时间 $\tau_i \neq 0 (i = 1, 2, 3)$ 时, 加性噪声强度能够诱导非平衡相变.

2.3 噪声关联时间对稳态概率密度的影响

在图4 ~ 图6中, 讨论了相关时间 $\tau_i (i = 1, 2, 3)$ 对 $P_{st}(x)$ 的影响. 图4中, 随着乘性噪声自相关时间 τ_1 的减小, $P_{st}(x)$ 的峰由 $x = -1$ 的位置移到

$x = -0.8$ 的位置,同时峰的高度降低,故 τ_1 只能改变 $P_{st}(x)$ 曲线的高度和宽度,但不能诱导相变. 图5中,随着加性噪声自相关时间 τ_2 的增加,稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 的峰值增大,峰的高度增加, τ_2 不能诱导相变. 由此可见乘性和加性噪声自相关时间 τ_1, τ_2 对稳态概率密度的影响是相同的.

图6中,随着噪声之间关联时间 τ_3 的增加, $P_{st}(x)$ 的峰值逐渐减小. 当 $\tau_3 = 0.3$ 时,概率密度函数具有单峰结构,当 τ_3 增大到2时,稳态概率密度 $P_{st}(x)$ 具有明显的双峰结构. 因此,噪声之间的关联时间 τ_3 能够使 $P_{st}(x)$ 曲线由单峰变为双峰,能够恢复稳态概率密度的对称结构.

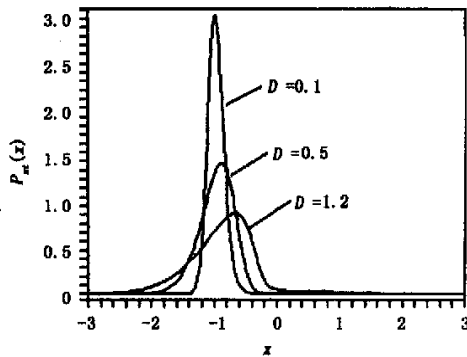


图2 稳态概率密度函数 $P_{st}(x)$ 随乘性噪声强度 D 变化的曲线

$$\lambda = 1, \alpha = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$$

Fig.2 The stationary probability distribution $P_{st}(x)$ with different D

$$\lambda = 1, \alpha = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$$

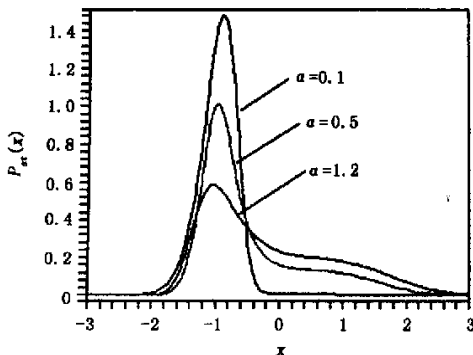


图3 稳态概率密度函数 $P_{st}(x)$ 随加性噪声强度 α 变化的曲线

$$\lambda = 1, D = 0.5, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$$

Fig.3 The stationary probability distribution $P_{st}(x)$ with different α

$$\lambda = 1, D = 0.5, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$$

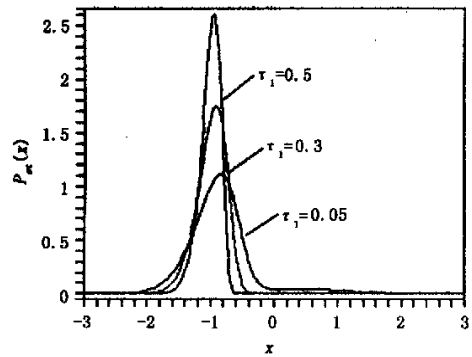


图4 稳态概率密度函数 $P_{st}(x)$ 随乘性噪声自相关时间 τ_1 变化的曲线

$$\lambda = 1, D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$$

Fig.4 The stationary probability distribution $P_{st}(x)$ with different τ_1

$$\lambda = 1, D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$$

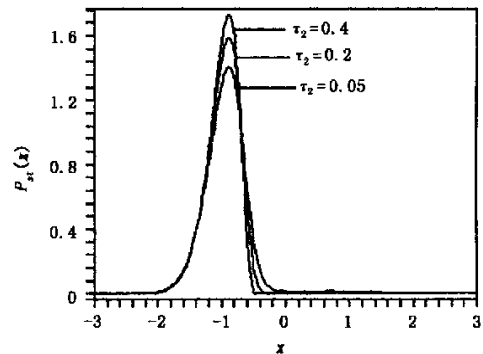


图5 稳态概率密度函数 $P_{st}(x)$ 随加性噪声自相关时间 τ_2 变化的曲线

$$\lambda = 1, D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_3 = 0.3$$

Fig.5 The stationary probability distribution $P_{st}(x)$ with different τ_2

$$\lambda = 1, D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_3 = 0.3$$

从上面的分析可以看出,对于具有色关联的色噪声的双稳杜芬系统,有许多新的非线性现象出现,并且各关联时间 $\tau_i (i = 1, 2, 3)$ 对稳态概率密度函数的影响是不同的.

2.4 相关系数和相关时间对均值和标准方差的影响

根据方程(7)~(8),均值 $\langle x \rangle$ 和标准方差 $\lambda_2(0)$ 随 $\lambda, \tau_i (i = 1, 2, 3)$ 变化的曲线在图7和图8中给出. 图7中,均值 $\langle x \rangle$ 随着 λ 的增加单调的减小,当 $-1 \leq \lambda < 0$ 时,由于稳态概率密度曲线绝大部分集中在 $x = 1$ 附近,所以 $\langle x \rangle$ 是正的. 当 $0 < \lambda \leq 1$ 时,稳

态概率密度曲线绝大部分集中在 $x = -1$ 附近,故 $\langle x \rangle$ 是负的.特别是当 $\lambda = 0$ 时,稳态概率密度曲线对称的分布在 $x = \pm 1$ 处,所以 $\langle x \rangle$ 等于零(参见图 7(a)).固定 $\lambda = 1$ 时,均值 $\langle x \rangle$ 随着 τ_1, τ_2 的增加逐渐减小,并且 $\langle x \rangle$ 为负值(参见图 7(b) 和图 7(c)).在图 7(d) 中, $\langle x \rangle$ 随着 τ_3 的增加逐渐增加,但仍然是负的,和稳态概率密度图是一致的.

图 8 中, $\lambda_2(0) - \lambda$ 曲线随 λ 趋于零而趋于无穷大,出现了图 8(a) 中的类似于“火山口”的图形,这是因为 $\lambda = 0$ 对应的均值 $\langle x \rangle$ 为零.当 $-1 \leq \lambda < 0$ 时, $\lambda_2(0)$ 随着 λ 的增加而增加,当 $0 < \lambda \leq 1$ 时, $\lambda_2(0)$ 随着 λ 的增加而减小. $\lambda_2(0)$ 随着 τ_1, τ_2 的增加而单调的减小,并且 $\lambda_2(0)$ 为正值(参见图 8(b) ~ 8(c)).图 8(d) 中, $\lambda_2(0)$ 随着 τ_3 的增加逐渐增加.

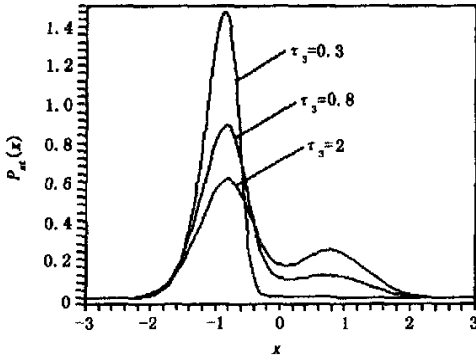


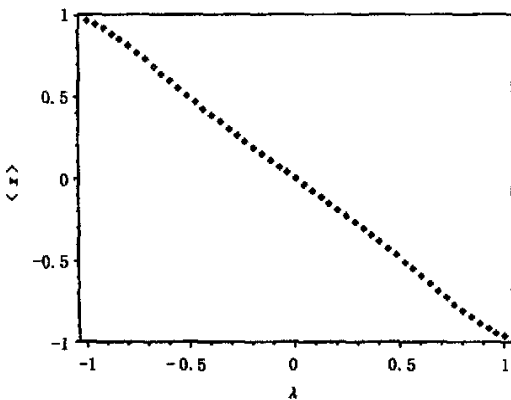
图 6 稳态概率密度函数 $P_n(x)$ 随噪声之间的互关联时间 τ_3 变化的曲线

$\lambda = 1, D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1$

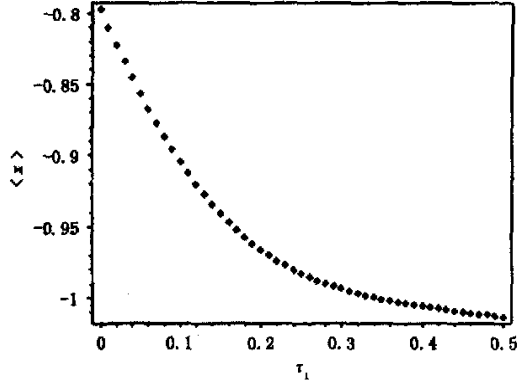
Fig. 6 The stationary probability distribution

$P_n(x)$ with different τ_3

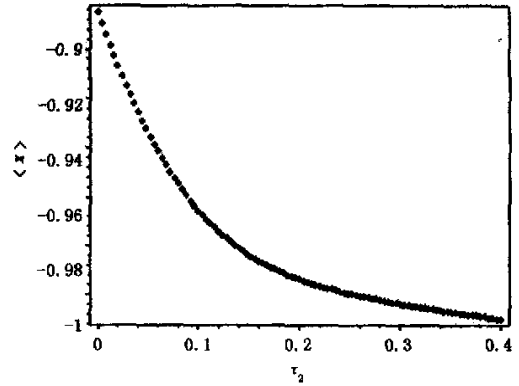
$\lambda = 1, D = 0.5, \alpha = 0.1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1$



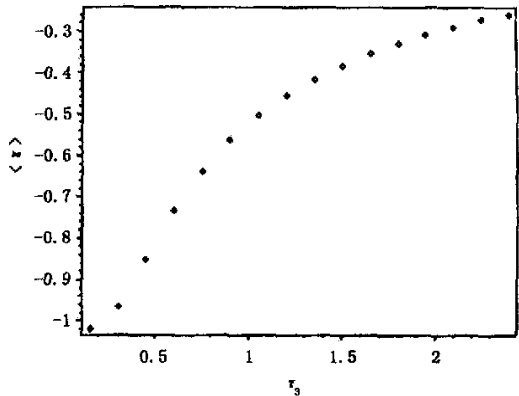
(a) $\tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$



(b) $\lambda = 1, \tau_2 = 0.1, \tau_3 = 0.3$



(c) $\lambda = 1, \tau_1 = 0.2, \tau_3 = 0.3$



(d) $\lambda = 1, \tau_1 = 0.2, \tau_2 = 0.1$

图 7 状态变量 x 的均值 $\langle x \rangle$ 随 $\lambda, \tau_i (i = 1, 2, 3)$ 变化的曲线 ($D = 0.5, \alpha = 0.1$)

Fig. 7 The mean $\langle x \rangle$ of the state variable

with different $\lambda, \tau_i (i = 1, 2, 3) (D = 0.5, \alpha = 0.1)$

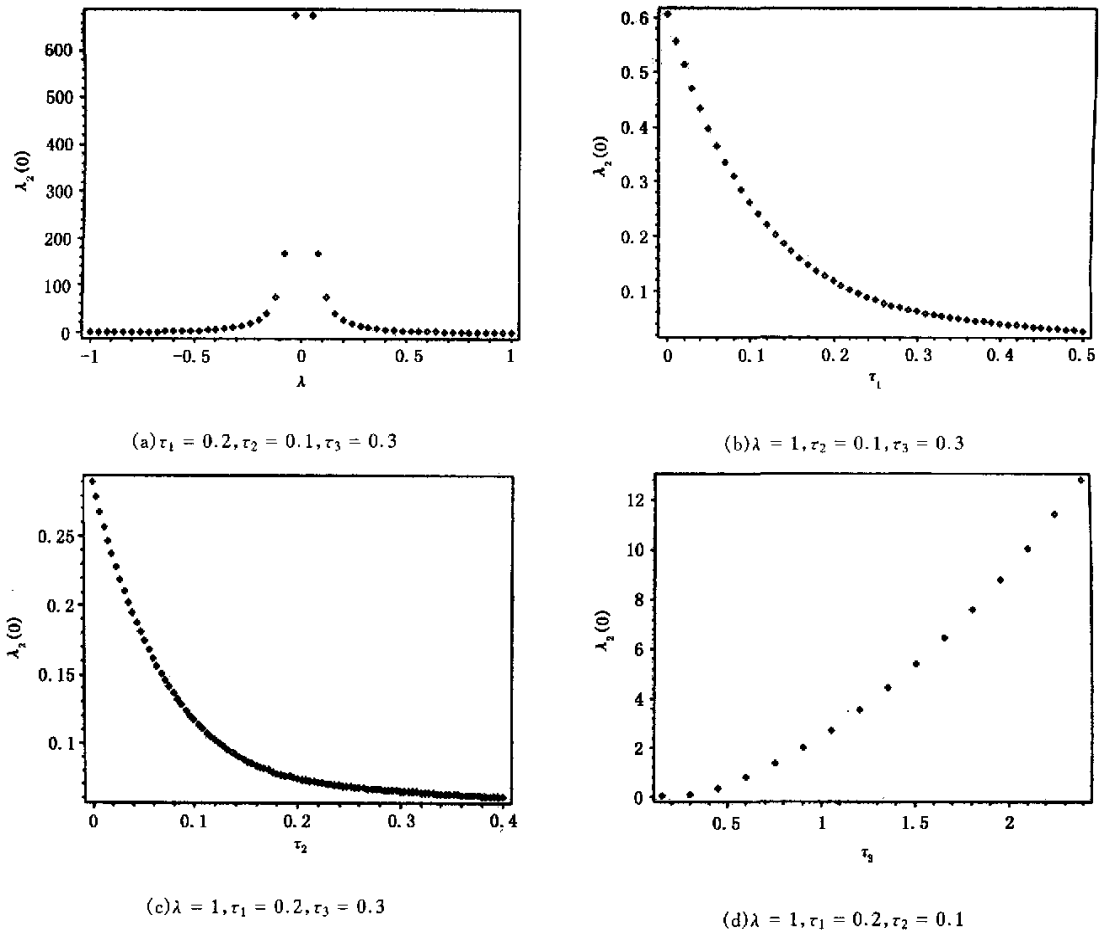


图8 状态变量 x 的标准方差 $\lambda_2(0)$ 随 $\lambda, \tau_i (i = 1, 2, 3)$

变化的曲线 ($D = 0.5, \alpha = 0.1$)

Fig. 8 The normalized variance $\lambda_2(0)$ of the state variable with different $\lambda, \tau_i (i = 1, 2, 3) (D = 0.5, \alpha = 0.1)$

3 结论

文中得到了由色关联的色噪声驱动的双稳杜芬模型的稳态概率密度函数的表达式,该理论结果是进一步对该模型的其它非线性现象,如平均首次穿越时间、随机共振和非平衡相变等进行研究的基础.此外,对模型的稳态概率密度函数及状态变量的均值和标准方差进行了分析,发现了一些在白噪声激励下双稳杜芬系统所不具有的非线性现象:

1) 噪声之间的关联系数 λ 使稳态概率密度函数由双峰结构 ($\lambda = 0$) 变为单峰结构 ($\lambda = \pm 1$),能够诱导非平衡相变.

2) 对于完全相关的色噪声 ($\lambda = \pm 1$),加性噪声强度和乘性噪声强度对稳态概率密度的影响是不同的:乘性噪声强度只能改变稳态密度的高度和

位置,而加性噪声强度可以改变稳态密度的单双峰结构.

3) 当 $\lambda = \pm 1$ 时,乘性噪声和加性噪声的自相关时间 τ_1, τ_2 对稳态概率密度函数的影响是相同的,它们均不能诱导相变.然而随着噪声间互关联时间 τ_3 的增加,稳态概率密度曲线出现双峰结构,故 τ_3 可以诱导非平衡相变.

4) 状态变量的均值 $\langle x \rangle$ 随着 λ, τ_1, τ_2 的增加而减小,随着 τ_3 的增加而增加.

5) 状态变量的标准方差 $\lambda_2(0)$ 随着 $|\lambda|, \tau_1, \tau_2$ 的增加而减小,随着 τ_3 的增加而增加.

参 考 文 献

- 1 Fox RF. Uniform convergence to an effective Fokker-

- Planck equation for weakly colored noise. *Phys Rev A*, 1986, 34:4525~4527
- 2 Fox RF. Functional-calculus approach to stochastic differential equations. *Phys Rev A*, 1986, 34:467~476
 - 3 Jung P, Hanggi P. Dynamical systems: A unified colored-noise approximation. *Phys Rev A*, 1987, 35:4464~4466
 - 4 胡岗. 随机力与非线性系统. 上海:上海科技教育出版社, 1994(Hu Gang. Stochastic Forces and Nonlinear Systems. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1994(in Chinese))
 - 5 Wu DJ, Cao L, Ke SZ. Bistable kinetic model driven by correlated noises: Steady-state analysis. *Phys Rev E*, 1994, 50:2496~2502
 - 6 Cao L, Wu DJ, Ke SZ. Bistable kinetic model driven by correlated noises: Unified colored-noise approximation. *Phys Rev E*, 1995, 52:3228~3231
 - 7 Jia Y, Cao L, Wu DJ. Effects of a dye laser with correlations between additive and multiplicative noise: Transient properties. *Phys Rev A*, 1995, 51:3196~3202
 - 8 Jia Y, Li JR. Steady-state analysis of a bistable system with additive and multiplicative noises. *Phys Rev E*, 1996, 53:5786~5792
 - 9 Luo XQ, Zhu SQ. Stochastic resonance driven by two different kinds of colored noise in a bistable system. *Phys Rev E*, 2003, 67:021104~021113
 - 10 Liang GY, Cao L, Wu DJ. Moments of intensity of single-mode laser driven by additive and multiplicative colored noises with colored cross-correlation. *Phys Lett A*, 2002, 294:190~198
 - 11 Liang GY, Cao L, Zhang L, Wu DJ. Statistical properties of a single-mode laser driven by additive and multiplicative coloured noises with a coloured cross-correlation for different correlation times. *Chin Phys*, 2003, 10:1109~1119
 - 12 Jin YF, Xu W. Mean first-passage time of a bistable kinetic model driven by two different kinds of coloured noises. *Chaos Solitons Fractals*, 2005, 23:275~280

STEADY-STATE ANALYSIS OF A BISTABLE DUFFING MODEL DRIVEN BY ADDITIVE AND MULTIPLICATIVE COLORED NOISES WITH A COLORED CORRELATED NOISE*

Jin Yanfei Xu Wei Li Wei Ma Shaojuan

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract We investigated the stationary probability distribution (SPD) and the mean and normalized variance of the steady-state properties of a bistable Duffing model subjected to the additive and multiplicative colored noises with a colored cross-correlation for different correlation times. The expression of SPD was obtained by using the unified colored noise approximation. Through analyzing the effects of the SPD and the mean and normalized variance, we found some new nonlinear phenomena absent for white noise: the additive noise intensity, the cross-correlation intensity and correlated time between multiplicative and additive noise can induce non-equilibrium phase transition.

Key words a bistable Duffing model, stationary probability distribution, colored noise, mean, normalized variance

Received 08 January 2005, revised 06 March 2005.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(10472091, 10332030) and the Natural Science Foundation of Shanxi Province of China(2003A03)