

# 一种基于 WENO 重构的半离散中心迎风格式

胡彦梅<sup>1</sup> 陈建忠<sup>2</sup> 封建湖<sup>1</sup>

(1. 长安大学理学院, 西安 710064)(2. 西北工业大学自动化学院, 西安 710072)

**摘要** 通过三阶 WENO 重构和半离散中心迎风数值通量的结合, 给出了一种求解双曲型守恒律方程的三阶半离散中心迎风格式. 格式保持了中心差分格式方法简单的优点. 数值计算的结果表明该方法具有较高的分辨率.

**关键词** 双曲型守恒律方程, 中心迎风格式, WENO 重构

## 引言

近年来, 高分辨率中心差分格式取得很大的进展, 高阶全离散中心格式、半离散中心格式和半离散中心迎风格式相继被提出. Liu 和 Tadmor<sup>[1]</sup> 利用二次重构, Levy 等<sup>[2,3]</sup> 基于四阶中心 WENO (weighted essentially non-oscillatory) 重构和三阶紧凑中心 WENO(compact central WENO) 重构, 将二阶全离散中心格式<sup>[4]</sup> 进行了高阶推广. 全离散格式的数值粘性与  $(\Delta x)^{2r}/\Delta t$  成比例<sup>[5]</sup>,  $r$  表示格式的阶数, 当  $\Delta t$  较小时会产生较大的数值耗散. 全离散中心格式的另一个缺点是没有半离散形式. 为了克服全离散格式的上述不足, Kurganov 等在文<sup>[5]</sup> 中提出数值粘性与  $(\Delta t^{2r-1})$  同阶的半离散中心格式, 其主要思想是利用波传播的最大局部波速, 更精确地估计了 Riemann 扇的宽度. 半离散中心迎风格式<sup>[6]</sup> 是对半离散中心格式的进一步推广, 通过对单侧局部速度的估计, 该格式考虑了波传播的方向, 使得它又具有迎风格性.

对一维问题而言, 将高阶(三阶或三阶以上) 重构方法和半离散中心数值通量<sup>[5]</sup> 或半离散中心迎风数值通量<sup>[6]</sup> 相结合, 就可得到高阶的半离散中心格式或半离散中心迎风格式. 半离散格式的精度由重构的精度决定. 如文<sup>[7]</sup> 采用三阶紧凑中心 WENO 重构<sup>[2]</sup>, 文<sup>[8]</sup> 采用二次重构方法均给出了相应的三阶半离散中心格式. 这两种重构都是在构造全离散中心格式时提出来的. 本文将一种高阶迎风格式即三阶 WENO 格式的重构方法<sup>[9-10]</sup> 和半

离散中心迎风数值通量进行结合, 得到了一种求解双曲型守恒律方程的三阶半离散中心迎风格式. 最后给出了一些数值算例, 并与三阶紧凑中心 WENO 重构<sup>[2]</sup> 和半离散中心迎风数值通量<sup>[6]</sup> 结合所得格式进行了比较. 结果表明本文方法有较高的分辨率并且具有计算量小的优点.

## 1 半离散中心迎风格式

对一维双曲型守恒律

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1}$$

记  $x_j = j\Delta x, x_{j\pm 1/2} = (j \pm 1/2)\Delta x, t^n = n\Delta t$ , 网格比  $\lambda = \Delta t/\Delta x$ . 以  $\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u(\xi, t^n) d\xi$  表示  $t = t^n$  时间层网格  $I_j = (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$  上的均值. 假定  $t = t^n$  时间层的网格均值  $\{\bar{u}_j^n\}$  已经求出, 则半离散中心迎风格式的基本构造如下<sup>[6]</sup>:

利用网格均值  $\{\bar{u}_j^n\}$ , 重构分片多项式

$$v(x, t^n) = \sum_j p_j^n(x) \chi_j(x) \tag{2}$$

式中  $\chi_j$  是  $I_j$  上的特征函数.  $v(x, t^n)$  可能在网格界面  $\{x_{j+1/2}\}$  处间断, 在真正非线性或线性退化的情况下, 估计间断面向左侧和右侧传播的局部速度

$$a_{j+1/2}^- = \min\{\lambda_1(\frac{\partial f}{\partial v}(u_{j+1/2}^+)),$$

$$\lambda_1(\frac{\partial f}{\partial v}(u_{j+1/2}^-)), 0\},$$

$$a_{j+1/2}^+ = \max\{\lambda_N(\frac{\partial f}{\partial v}(u_{j+1/2}^+)),$$

$$\lambda_N(\frac{\partial f}{\partial v}(u_{j+1/2}^-)), 0\},$$

其中  $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$  表示矩阵  $A(u) = \partial f / \partial u$  的  $N$  个特征值,  $u_{j+1/2}^- = p_j^n(x_{j+1/2}, t^n)$  和  $u_{j+1/2}^+ = p_{j+1}^n(x_{j+1/2}, t^n)$  分别表示  $v(x, t^n)$  在  $x_{j+1/2}$  左侧和右侧的值. 定义  $x_{j+1/2,l}^n = x_{j+1/2} + a_{j+1/2}^- \Delta t$ ,  $x_{j+1/2,r}^n = x_{j+1/2} + a_{j+1/2}^+ \Delta t$ . 在光滑区域  $[x_{j-1/2,r}^n, x_{j+1/2,r}^n] \times [t^n, t^{n+1}]$  和非光滑区域  $[x_{j-1/2,r}^n, x_{j+1/2,r}^n] \times [t^n, t^{n+1}]$  上对(1)式积分, 可得非均匀网格上的网格均值

$$\bar{w}_j^{n+1} = \frac{1}{x_{j+1/2,l}^n - x_{j-1/2,r}^n} \times \left\{ \int_{x_{j-1/2,r}^n}^{x_{j+1/2,l}^n} p_j^n(x) dx - \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(v(x_{j+1/2,l}^n, \tau)) - f(v(x_{j-1/2,r}^n, \tau))] d\tau \right\} \quad (3)$$

$$\bar{w}_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{x_{j+1/2,r}^n - x_{j-1/2,l}^n} \times \left\{ \int_{x_{j-1/2,l}^n}^{x_{j+1/2,r}^n} p_j^n(x) dx + \int_{x_{j-1/2,l}^n}^{x_{j+1/2,r}^n} p_{j+1}^n(x) dx - \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(v(x_{j+1/2,r}^n, \tau)) - f(v(x_{j-1/2,l}^n, \tau))] d\tau \right\} \quad (4)$$

式(3)和式(4)右端的通量积分可用中值定理或辛甫生公式来近似.

由网格均值  $\{\bar{w}_j^{n+1}, \bar{w}_{j+1/2}^{n+1}\}$ , 用重构  $v(x, t^n)$  的方法再进行一次相同阶数的重构,

$$\tilde{v}^{n+1}(x) = \sum_j (\tilde{v}_j^{n+1}(x) \chi_{[x_{j-1/2,r}^n, x_{j+1/2,l}^n]} + \tilde{v}_{j+1/2}^{n+1}(x) \chi_{[x_{j+1/2,l}^n, x_{j+1/2,r}^n]}) \quad (5)$$

对(5)式积分, 可得新的三阶全离散中心迎风格式

$$\bar{u}_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{v}^{n+1}(x) dx = \frac{1}{\Delta x} \left[ \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{v}_j^{n+1} dx + \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \tilde{v}_{j+1/2}^{n+1} dx + \int_{x_{j-1/2,l}}^{x_{j+1/2}} \tilde{v}_{j+1/2}^{n+1} dx \right] \quad (6)$$

全离散格式(6)具有半离散形式

$$\frac{d}{dt} u_j(t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} = -$$

$$\frac{H_{j+1/2}(t) - H_{j-1/2}(t)}{\Delta x} \quad (7)$$

其中数值通量

$$H_{j+1/2}(t) = \frac{a_{j+1/2}^+ f(u_{j+1/2}^-) - a_{j+1/2}^- f(u_{j+1/2}^+)}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} + a_{j+1/2}^+ a_{j+1/2}^- \left[ \frac{u_{j+1/2}^+ - u_{j+1/2}^-}{a_{j+1/2}^+ - a_{j+1/2}^-} \right] \quad (8)$$

由上述可知, 构造半离散格式的关键在于确定重构函数以计算网格界面处的值  $u_{j+1/2}^+$ .

### 2 三阶WENO重构

WENO方法是在ENO方法的基础上发展起来的, 其基本思想是将ENO方法只选择最光滑模板改进为每一个可能模板的加权平均, 而权值可以度量模板的光滑程度. 关于ENO方法和WENO方法在Shu的著名学术报告<sup>[10]</sup>中有详细的介绍和讨论. 这里用三阶WENO重构<sup>[9]</sup>计算网格界面处的值,

$$u_{j+1/2}^- = p_j^n(x_{j+1/2}, t^n) = \sum_{r=0}^1 \omega_r u_{i+1/2}^{(r)} = u(x_{j+1/2}, t^n) + O(\Delta x^3) \quad (9)$$

$$u_{j+1/2}^+ = p_{j+1}^n(x_{j+1/2}, t^n) = \sum_{r=0}^1 \tilde{\omega}_r \tilde{u}_{i+1/2}^{(r)} = u(x_{j+1/2}, t^n) + O(\Delta x^3) \quad (10)$$

式中  $u_{i+1/2}^{(0)} = \frac{1}{2} \bar{u}_j^n + \frac{1}{2} \bar{u}_{j+1}^n$ ,  $u_{i+1/2}^{(1)} = -\frac{1}{2} \bar{u}_{j-1}^n + \frac{3}{2} \bar{u}_j^n$ ,  $\tilde{u}_{i-1/2}^{(0)} = \frac{3}{2} \bar{u}_j^n - \frac{1}{2} \bar{u}_{j+1}^n$ ,  $\tilde{u}_{i-1/2}^{(1)} = \frac{1}{2} \bar{u}_{j-1}^n + \frac{1}{2} \bar{u}_j^n$ .

相应的权值为

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{m=0}^1 \alpha_m}, \alpha_r = \frac{d_r}{(\epsilon + \beta_r)^2}, r = 0, 1, d_0 = \frac{2}{3}, d_1 = \frac{1}{3} \quad (11)$$

$$\tilde{\omega}_r = \frac{\tilde{\alpha}_r}{\sum_{m=0}^1 \tilde{\alpha}_m}, \tilde{\alpha}_r = \frac{\tilde{d}_r}{(\epsilon + \beta_r)^2}, r = 0, 1, \tilde{d}_0 = \frac{1}{3}, \tilde{d}_1 = \frac{2}{3} \quad (12)$$

式中  $\epsilon > 0$  的引入是为了避免分母为零, 取  $\epsilon = 10^{-6}$ . “光滑因子”  $\beta_r$  为

$$\beta_0 = (\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n)^2, \beta_1 = (\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n)^2$$

### 3 数值算例

对半离散格式(7), (8)的时间方向采用三阶

SSP Runge-Kutta 方法<sup>[11]</sup>进行离散. 下列数值算例中, 将本文方法简记为 SDW3, 三阶紧凑中心 WENO 重构<sup>[3]</sup>和半离散中心迎风数值通量<sup>[6]</sup>结合所得格式记为 SDCW3. 如无特别指明 CFL 都取 0.475.

**算例 1** 用两个具有非凸通量函数的守恒律问题验证格式的收敛性. 第 1 个通量为  $f(u) =$

$$\frac{1}{4}(u^2 - 1)(u^2 - 4), \text{初值}$$

$$1) u_0(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ -2, & x > 0 \end{cases}$$

$$2) u_0(x) = \begin{cases} -3, & x < 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases}$$

计算区域均为  $x \in [-1, 1]$ , 并且在此区域内都采用了 80 个网格点. 图 1 给出了初值 1) 在  $t = 1$ , 取  $\lambda = 0.3$  的计算结果. 图 2 给出了初值 2) 在  $t = 0.04$  时刻的计算结果.

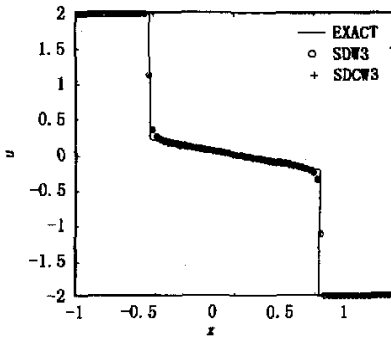


图 1 第 1 个通量函数, 初值 1)  
Fig. 1 The first flux with initial data 1)

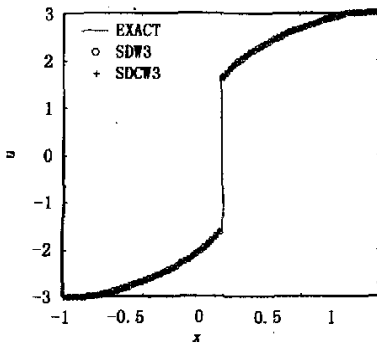


图 2 第 1 个通量函数, 初值 2)  
Fig. 2 The first flux with initial data 2)

第 2 个通量为 Buckley-Leverett 通量  $f(u) = 4u^2/4u^2 + (1 - u)^2, x \in [-1, 1]$ . 初值

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

网格数为 80, 取  $\lambda = 0.3, t = 0.4$  的计算结果如图 3 所示.

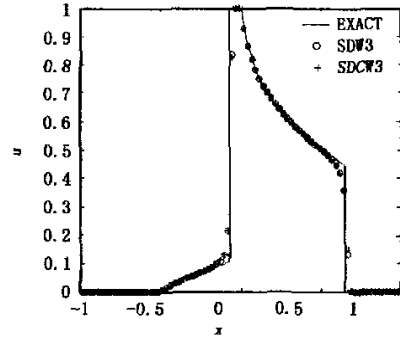


图 3 第 2 个非凸通量函数  
Fig. 3 The second nonconvex flux

**算例 2** 一维 Euler 方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} m \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix} = 0,$$

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{\rho}{2}u^2),$$

其中  $\rho, u, m = (\rho u), p, E$  分别表示密度, 速度, 动量, 压强和总能量,  $\gamma = 1.4$ . 计算区域为  $x \in [0, 1]$ , 考虑下列两个初值问题:

(i) Lax 的黎曼问题, 初值条件为

$$u_0(x) = \begin{cases} (0.445, 0.311, 8.928), & x < 0.5 \\ (0.5, 0.0, 1.4275), & x \geq 0.5 \end{cases}$$

图 4, 图 5 和图 6 分别给出了密度, 速度和压力的计算结果. 网格数为 200, 计算到  $t = 0.16$ .

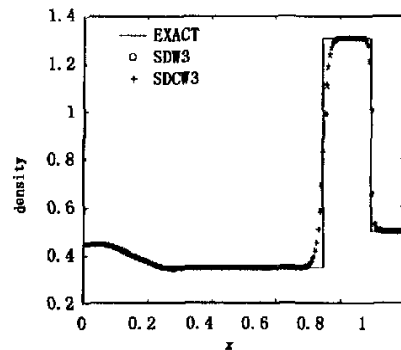


图 4 Lax 初值问题的密度图  
Fig. 4 Lax problem-density

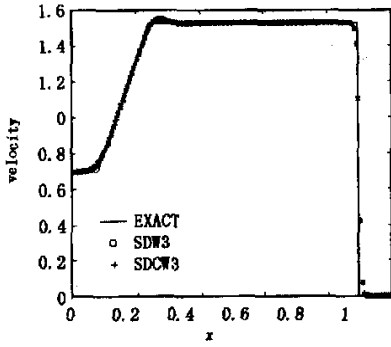


图 5 Lax 初值问题的速度图

Fig. 5 Lax problem-velocity

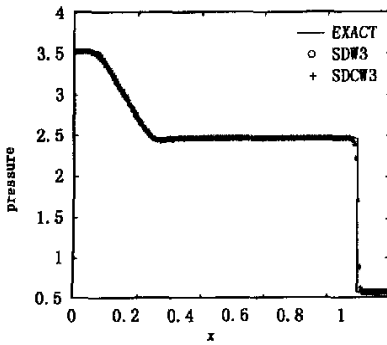


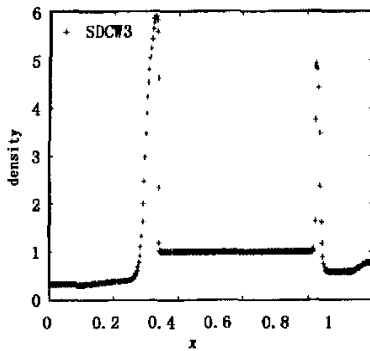
图 6 Lax 初值问题的压力图

Fig. 6 Lax problem-pressure

(ii) 双波干扰 (Interacting Blast Wave) 问题<sup>[12]</sup>, 其初值为

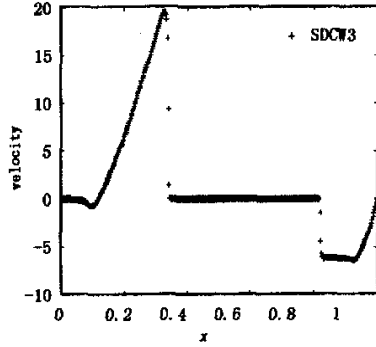
$$u_0(x) = \begin{cases} (1, 0, 2500) & 0 \leq x < 0.1 \\ (1, 0, 0.025) & 0.1 \leq x < 0.9 \\ (1, 0, 250.0) & 0.9 \leq x < 1 \end{cases}$$

采用 400 个网格点, 图 7 和图 8 分别给出了  $t = 0.01$  和  $t = 0.038$  时刻的计算结果。



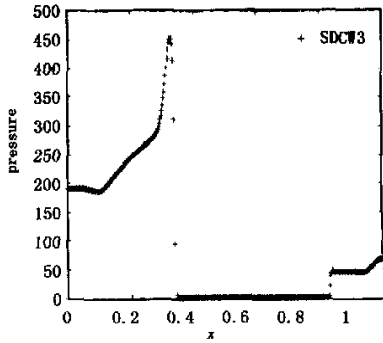
(a) 密度

(a) density



(b) 速度

(b) velocity

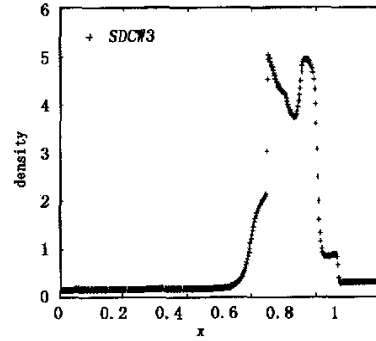


(c) 压力

(c) pressure

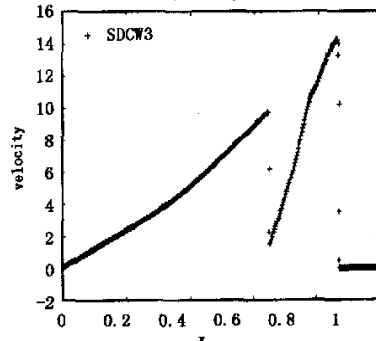
图 7 双波干扰问题的计算结果 ( $t = 0.01$ )

Fig. 7 The results of interacting blast wave problem at  $t = 0.01$



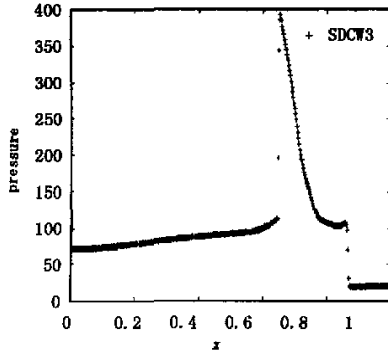
(a) 密度

(a) density



(b) 速度

(b) velocity



(c) 压力

(c) pressure

图8 双波干扰问题的计算结果( $t = 0.038$ )Fig.8 The results of interacting blast wave problem at  $t = 0.038$ 

#### 4 结论

通过上述数值算例的计算结果可以得出以下结论:

1) 从算例1的结果可以看到,数值解很好地收敛于熵解.

2) 从算例2的结果看,本文格式对于激波具有较高的分辨率.

3) SDW3 计算结果与 SDCW3 结果几乎一致,但计算量要小得多,这是因为三阶 WENO 重构是两个一次多项式进行凸组合,而三阶紧凑中心 WENO 重构是一个二次和两个一次多项式进行凸组合.数值算例的结果也验证了将迎风格式的重构方法引入半离散中心迎风格式是可行的.

#### 参 考 文 献

- Liu XD, Tadmor E. Third order nonoscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws. *Numer Math*, 1998, 79(3):397~425
- Levy D, Puppo G, Russo G. Central WENO schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Math Model Numer Anal*, 1999, 33:547~571
- Levy D, Puppo G, Russo G. Compact central WENO schemes for multidimensional conservation laws. *SIAM J Sci Comput*, 2000, 22:656~672
- Nessyahu H, Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. *J Comp Phys*, 1990, 87(2):408~463
- Kurganov A, Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *J Comput Phys*, 2000, 160:241~282
- Kurganov A, Noelle S, Petrova G. Semi-discrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations. *SIAM J Sci Comput*, 2001, 23:707~740
- Kurganov A, Levy D. A third-order semi-discrete central scheme for conservation laws and convection-diffusion equations. *SIAM J Sci Comput*, 2000, 22:1461~1488
- Kurganov A, Petrova G. A third-order semi-discrete genuinely multidimensional central scheme for hyperbolic conservation laws and related problems. *Numer Math*, 2001, 88(4):683~729
- Jiang GS, Shu CW. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J Comp Phys*, 1996, 126:202~228
- Shu CW. Essentially non-oscillatory and weighted essentially nonoscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. In *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, Lecture Notes in Mathematics, 1697. Berlin: Springer, 1998. 325~432
- Gottlieb S, Shu CW, Tadmor E. Strong stability preserving high order time discretization methods. *SIAM Rev*, 2001, 43(1):89~112
- Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J Comput Phys*, 1984, 54:115~173

## A SEMI-DISCRETE CENTRAL-UPWIND SCHEME BASED ON WENO RECONSTRUCTION

Hu Yanmei<sup>1</sup> Chen Jianzhong<sup>2</sup> Feng Jianhu<sup>1</sup>

(1. *College of Science, Chang'an University, Xi'an 710064, China*)

(2. *College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

**Abstract** A third-order semi-discrete central-upwind scheme for hyperbolic conservation laws was presented. The method was based on combining the third-order weighted essentially non-oscillatory reconstruction with the semi-discrete central-upwind numerical flux. The resulting scheme retained the main advantage of central schemes-simplicity, and the numerical results showed the high-resolution of the method.

**Key words** hyperbolic conservation laws, central-upwind schemes, WENO reconstruction